УДК 519.8

Е.М. Киселева

СТАНОВЛЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ *n*-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение

Мотивационным началом данной работы явилось желание автора, с одной стороны, подвести итог пятидесятилетней научной работы по становлению и развитию ею и ее научной школой теории оптимального разбиения множеств (ОРМ); с другой стороны, обратить внимание исследователей на возможность применения результатов теории ОРМ для решения огромного числа совершенно различных по своей природе оптимизационных задач теории и практики, сводящихся к непрерывным моделям оптимального разбиения множеств n-мерного евклидова пространства, в том числе для решения так называемых задач размещения–разбиения (location–allocation), задач построения диаграмм Вороного, различных их обобщений и многих других. Заметим, что задачам location–allocation в настоящее время уделяется, особенно в зарубежной научной литературе, значительное внимание [см., например, 1]. И наконец, в-третьих, обозначить направление дальнейшего развития теории ОРМ.

Основные результаты математической теории непрерывных задач ОРМ n-мерного евклидова пространства, являющихся неклассическими задачами бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными, разработанной в течение последних пятидесяти лет автором и ее учениками, изложены в более чем 400 научных работах, среди которых пять монографий [2–6]. Разработанная теория основана на едином подходе, состоящем в сведении исходных бесконечномерных задач оптимизации определенным образом (например, через функционал Лагранжа) к негладким, как правило, конечномерным задачам оптимизации, для численного решения которых применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации — различные варианты r-алгоритма, разработанные в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины под руководством Н.З. Шора [7].

В данной работе остановимся на истории становления и структуре сформировавшейся к настоящему времени теории оптимального разбиения множеств из n-мерного евклидова пространства. Приведем примеры применения методов и алгоритмов ОРМ к решению некоторых теоретических и практических задач оптимизации, сводящихся к непрерывным моделям оптимального разбиения множеств. Обозначим направление дальнейшего развития теории ОРМ.

История становления и структура теории оптимального разбиения множеств

Интерес к непрерывным моделям оптимального разбиения множеств, с одной стороны, вызван тем, что к указанным моделям сводится в математической постановке достаточно широкий класс как теоретических, так и практических задач оптимизации. Типичными представителями непрерывных задач ОРМ являются бесконечномерные транспортные задачи, или более общие — бесконечномерные задачи размещения предприятий с одновременным разбиением данного региона, непрерывно заполненного потребителями, на области потребителей, каждая из которых обслуживается одним предприятием в целях минимизации транспортных и производственных затрат. В роли потребителей здесь могут выступать также телефонные абоненты, школьники, избиратели, точки орошаемой территории, пациенты для диагностики заболеваний и т.д.

Необходимость рассмотрения бесконечномерных задач размещения возникает тогда, когда потребителей «очень много», например, в задачах о телефонных, радио-, телеабонентах, о школьных регионах, об избирательных округах и т.п., и формулировка задачи размещения как дискретной математической модели становится нецелесообразной из-за трудностей, связанных с решением задач чрезмерно большой размерности.

Существуют также задачи, сводящиеся к задачам оптимального разбиения, у которых множество, разбиваемое на подмножества, изначально континуально по своей структуре.

Впервые, по-видимому, бесконечномерный аналог транспортной задачи, так называемой задачи о перемещении масс, был рассмотрен Л.В. Канторовичем в 1942 г. в связи с решением классической проблемы Г. Монжа (задача о рвах и насыпях), сформулированной им в 1974 г. В [3] приведена библиография по этой задаче (о перемещении масс), а также информация о ее модификациях и обобщениях другими авторами.

Первое знакомство автора этой статьи с бесконечномерной задачей размещения производства, сведенной впоследствии к задаче оптимального разбиения множеств, состоялось в 1969 г. при прохождении преддипломной практики и дипломирования в Институте математики АН УССР.

Предметом исследований автора в тот период была упрощенная модель бесконечномерной задачи размещения производства в следующей постановке.

Пусть потребитель некоторой однородной продукции равномерно распределен в области $\Omega \subset E_2$. Конечное число N производителей расположены в изолированных точках $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2)$, $i = 1, ..., N$, области Ω. Считаются известными: $\rho(x)$ — спрос в продукции потребителя с координатами $x = (x^1, x^2)$; $c(x, \tau_i)$ — стоимость транспортировки единицы продукции от производителя $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2)$ потребителю с координатами $x = (x^1, x^2)$. Предполагается, что прибыль производителя зависит только от его расходов, которые являются суммой производственных затрат и транспортных расходов.

Для каждого i-го производителя задана функция $\varphi_i(Y_i)$, описывающая зависимость стоимости производства от его мощности Y_i, определяемой по формуле

$$Y_i = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx ,$$

и приведенные капитальные затраты на реконструкцию i-го производителя для увеличения его мощности от существующей до проектной Y_i.

Множество потребителей Ω_i можно разбивать на зоны обслуживания Ω_i потребителей i-м производителем так, чтобы

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ \mathrm{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \neq k, \ i, k = 1, ..., N. \qquad (1)$$

При этом мощность i-го производителя определяется суммарным спросом потребителей, принадлежащих Ω_i, и не должна превышать заданных объемов:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \ i = 1, ..., N; \qquad (2)$$

не исключается, что некоторые из подмножеств Ω_i окажутся пустыми.

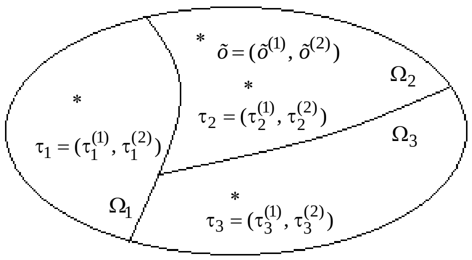


Рис. 1

На рис. 1 изображено разбиение множества $\Omega \subset E_2$ на три подмножества ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$) с центрами τ_1, τ_2, τ_3 этих подмножеств соответственно.

Требуется разбить множество потребителей Ω на зоны обслуживания их N производителями, т.е. на подмножества Ω_i, $i = 1, ..., N$, и разместить этих производителей в Ω так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее потребителю:

$$F(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}, \ \{\tau_1, ..., \tau_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx + \phi_i \left(\int_{\Omega_i} \rho(x)\, dx \right) \right\} \qquad (3)$$

при условиях (1), (2).

Задача (1)–(3) — бесконечномерная задача размещения.

В большинстве практических задач стоимость производства продукции на промышленном предприятии мощности Y_i равна произведению себестоимости этой продукции на ее количество. В силу этого имеем

$$\phi_i(Y_i) = d_i + a_i Y_i, \ i = 1, ..., N. \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в (3), получаем

$$F(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}, \ \{\tau_1, ..., \tau_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx. \qquad (5)$$

Задача (1), (5) при $a_i = 0, \ i = 1, ..., N$, — бесконечномерная транспортная задача.

В результате выполнения дипломной работы автор получила необходимое условие оптимальности для задачи (1), (5) в виде следующей теоремы и следствия из нее.

Теорема. Если возможное разбиение $(\Omega_{*1}, ..., \Omega_{*i}, ..., \Omega_{*N})$ оптимально для задачи (1), (5), то

$$c(x, \tau_i) + a_i \leq c(x, \tau_k) + a_k \text{ почти всюду (п.в.) для } x \in \Omega_{*i}, \ i, k = 1, ..., N. \qquad (6)$$

Следствие. В точках x, принадлежащих оптимальной границе подмножеств Ω_{*i} и Ω_{*k}, в неравенстве (6) достигается знак равенства.

 ISSN 0572-2691

За период с 1970 по 1975 гг. автор получила необходимые и достаточные условия оптимальности разбиений для некоторых непрерывных статистических, динамических и стохастических задач оптимального разбиения множеств.

С 1975 г. от необходимых условий оптимальности в задачах ОРМ автор перешла к разработке алгоритмов решения задач ОРМ.

1975–1980 гг. в основе дальнейшего развития теории оптимального разбиения множеств лежала следующая идея: исходные бесконечномерные задачи оптимизации типа (1)–(3) и более сложные сводятся определенным образом (например, через функционал Лагранжа с помощью теории двойственности) к конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина. Для численного решения этих конечномерных задач автор в то время использовала методы сглаживания, эффективность которых оставляла желать лучшего.

1980 г. — на международном симпозиуме «Основы программного обеспечения решения задач оптимального планирования» (г. Пущино) произошла встреча с Н.З. Шором, судьбоносная не только для автора статьи, но и для развития целого научного направления — нового раздела бесконечномерного математического программирования — теории непрерывных задач оптимального разбиения множеств. Н.З. Шор предложил для численного решения полученных вспомогательных негладких конечномерных задач применять современные эффективные методы недиффериенцируемой оптимизации — различные варианты r-алгоритма, разработанные им и его учениками в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

1992 г. — защита докторской диссертации «Математические модели и алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств» по специальности «математическая кибернетика» в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

Таким образом, к 1992 г. автором были заложены основы теории оптимального разбиения множеств, являющейся новым (неклассическим) разделом бесконечномерного математического программирования. Начала формироваться научная школа под руководством автора.

Забегая вперед, отмечу, что ученики автора защитили по названной тематике 17 кандидатских и 2 докторских диссертации.

В теории непрерывных задач ОРМ к настоящему времени сформировался ряд направлений, обусловленных как различными типами математических постановок задач разбиения, так и различными сферами ее приложений. Приведем некоторые из этих направлений и ссылки на основополагающие для этой теории статьи.

- Детерминированные линейные и нелинейные, однопродуктовые и многопродуктовые задачи ОРМ при ограничениях как с заданным положением центров подмножеств, так и с отысканием оптимального варианта их расположения [8–17].

- Задачи оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности, для снятия неопределенности в которых предлагается применять либо математический аппарат стохастического бесконечномерного математического программирования (если часть исходной информации имеет вероятностный характер), либо аппараты нечетких множеств и нечеткой логики (если параметры, входящие в описание моделей, нечеткие, неточные, недостоверные и т. д.) [18–23].

- Динамические задачи оптимального разбиения с критерием оптимальности, зависящим от фазовых траекторий и управления некоторой заданной управляемой системы [24–28].

- Непрерывные задачи о шаровом покрытии, сводящиеся к задачам ОРМ [29, 30].

Структуру сформировавшейся к настоящему времени теории оптимального разбиения множеств можно представить в виде следующей блок-схемы 1 (рис. 2).

Наиболее изученными на сегодняшний день являются статические задачи оптимального разбиения множеств (блок А).

В блоке В рассматриваются динамические задачи ОРМ с критерием оптимальности, зависящим от фазовых траекторий и управлений некоторой заданной управляемой системы. Так, например, в задаче (1), (2), (5), рассматриваемой как бесконечномерный аналог транспортной задачи, функции спроса и стоимости транспортировки единицы продукции могут изменяться в течение некоторого промежутка времени в силу действия определенных экономических факторов и являться неизвестными заранее фазовыми траекториями заданного управляемого процесса, описываемого некоторой системой дифференциальных уравнений с начальными условиями.

Блок-схема 1

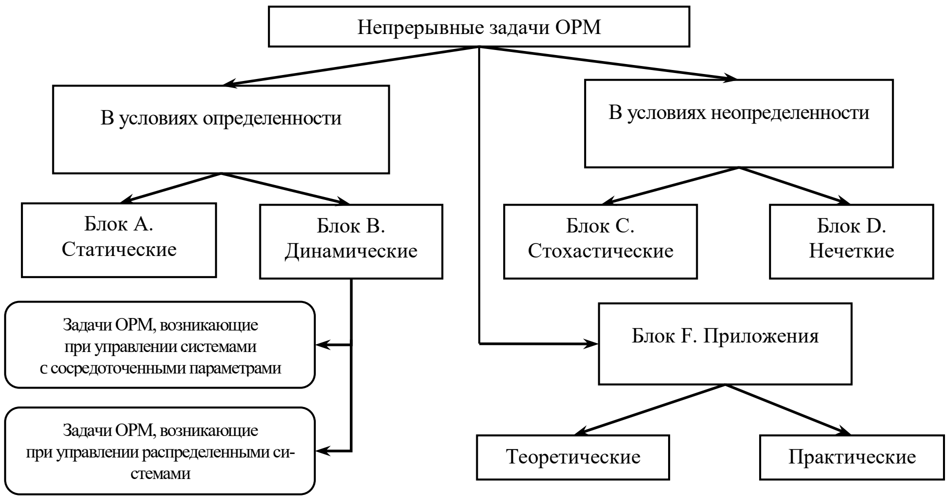


Рис. 2

Детальнее блоки А и В представимы в виде блок-схемы (рис. 3).

Блок-схема 2

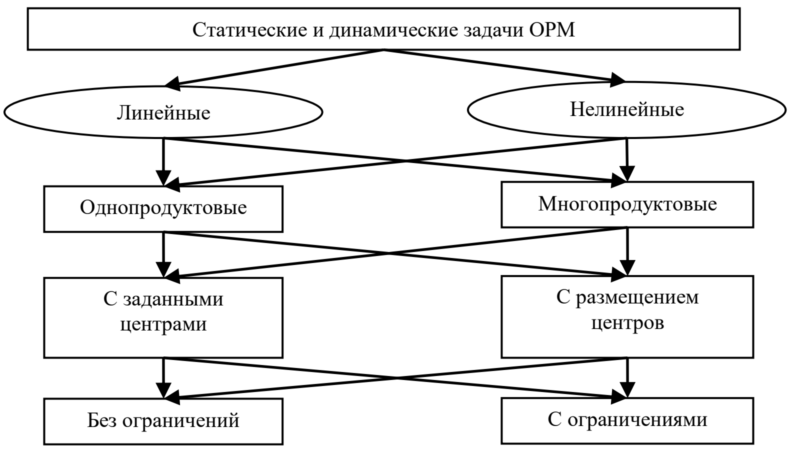


Рис. 3

 ISSN 0572-2691

Для решения приведенных в блоках А и В классов задач оптимального разбиения множеств предложен, как отмечалось выше, единый подход, в основе которого лежит следующая идея. Исходные задачи ОРМ, математически сформулированные как бесконечномерные задачи оптимизации, сводятся определенным образом (например, через функционал Лагранжа) к вспомогательным конечномерным негладким задачам максимизации либо негладким задачам максимина, для численного решения которых применяются современные эффективные методы недифференцируемой оптимизации, а именно, различные модификации r-алгоритма Н.З. Шора [7].

Особенностью такого подхода для линейных задач ОРМ является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить аналитически в явном виде, причем в аналитическое выражение могут входить параметры, отыскиваемые как оптимальное решение вышеназванных вспомогательных конечномерных задач оптимизации с негладкими целевыми функциями. Решение нелинейных задач ОРМ удается получить в виде операторных уравнений с параметрами, отыскиваемыми как оптимальное решение вспомогательных конечномерных негладких задач оптимизации, для решения которых применяются различные модификации r-алгоритма.

Продемонстрируем описанный выше подход на примере одной из задач блок-схемы 2, а именно на линейной многопродуктовой задаче А1 оптимального разбиения множеств при ограничениях в форме равенств и неравенств с отысканием координат центров подмножеств.

Приведем математическую постановку этой задачи оптимального разбиения, являющейся обобщением задачи (1), (2), (5) на случай, когда каждый i-й производитель с координатой τ_i, $i = 1, ..., N$, производит продукцию нескольких видов.

Пусть Ω — ограниченное, измеримое по Лебегу множество n-мерного евклидова пространства E_n.

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1^1, ..., \Omega_N^1, ..., \Omega_1^2, ...,$ $\Omega_N^2, ..., \Omega_1^j, ..., \Omega_N^j, ..., \Omega_1^M, ..., \Omega_N^M$ множества Ω назовем возможным разбиением множества $\Omega \subset E_n$ на N подмножеств по каждому из M продуктов, если

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i^j = \Omega, \; j = 1, ..., M, \; \mathrm{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \; i \neq k, \; i, k = 1, ..., N, \; j = 1, ..., M,$$

причем $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, ..., \tau_i^{(n)})$, $i = 1, ..., N$, — общий центр для подмножеств $\Omega_i^1, ...$ $..., \Omega_i^M$, принадлежащий Ω.

На рис. 4 изображено возможное разбиение множества $\Omega \subset E_2$ на три подмножества (Ω_1^j, Ω_2^j, Ω_3^j) по каждому из двух продуктов, $j = 1, 2$.

Сплошной линией обозначена граница по 1-му продукту, пунктирной линией — граница по 2-му продукту, τ_i — общий центр для подмножеств Ω_i^1, Ω_i^2, $i = 1, 2, 3$. Обозначим $\sum_{\Omega}^{NM}$ совокупность всех возможных разбиений множества Ω на N подмножеств по M продуктам, т.е.

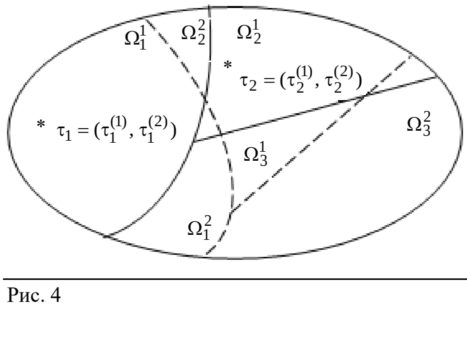


Рис. 4

$$\sum\nolimits_{\Omega}^{NM} = (\{\Omega_1^1, \ldots, \Omega_i^j, \ldots, \Omega_N^M\} : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i^j = \Omega, \ \mathrm{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0,$$

$$i \neq k, \ i, k = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, M).$$

Под непрерывной линейной многопродуктовой задачей оптимального разбиения множества из n-мерного евклидова пространства E_n на подмножества с отысканием координат центров (с размещением центров) подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств будем понимать задачу A1.

Задача A1. Найти

$$\min_{\{\Omega_1^1, \ldots, \Omega_i^j, \ldots, \Omega_N^M\}, \ \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i^j} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j) \rho^j(x) dx$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, \ i = 1, \ldots, p, \ \sum_{j=1}^{M} \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \ i = p+1, \ldots, N,$$

$$\{\Omega_1^1, \ldots, \Omega_i^j, \ldots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \ \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \ldots \times \Omega}_{N} = \Omega^N,$$

где $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \ldots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \Omega$; $a_1^1, \ldots, a_N^M, b_1, \ldots, b_N$ — заданные неотрицательные числа, причем выполняются условия разрешимости задачи:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^{N} b_i, \ 0 \leq b_i \leq S, \ i = 1, \ldots, N.$$

Введем характеристическую функцию $\lambda_i^j(x)$ подмножества Ω_i^j, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$, в виде

$$\lambda_i^j(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^j, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i^j. \end{cases}$$

Перепишем задачу A1 в виде B1, удобном для дальнейших исследований.

Задача B1. Найти

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau) \in \Gamma_1 \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau),$$

где

$$\Gamma_1 = \{\lambda(x) = (\lambda_1^1(x), \ldots, \lambda_i^j(x), \ldots, \lambda_N^M(x)) : \lambda(x) \in \Gamma_2 \ \text{п. в. для} \ x \in \Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx = b_i, \ i = 1, \ldots, p, \ \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \leq b_i, \ i = p+1, \ldots, N\};$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x) : \lambda_i^j(x) = 0 \vee 1, \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^j(x) = 1 \ \text{п.в. для} \ x \in \Omega; \ i = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, M\}.$$

Функции $c^j(x, \tau_i)$ действительные, ограниченные, определенные на $\Omega \times \Omega$, измеримые по аргументу x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \ldots, \tau_i^{(n)})$ из Ω для всех $i = 1, \ldots, N$; функции $\rho^j(x)$ действительные, ограниченные, измеримые и неотрицательные на Ω для всех $j = 1, \ldots, M$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \ldots, \tau_i^{(n)})$ — заданная точка подмножества Ω, одна и та же для всех $j = 1, \ldots, M$, называемая общим центром подмножеств $\Omega_i^1, \ldots, \Omega_i^M$; $a_1^1, \ldots, a_N^1, \ldots, a_1^M, \ldots, a_N^M$, $b_1, \ldots, b_N$ — заданные неотрицательные числа, причем

$$S = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \rho^j(x)dx \le \sum_{i=1}^{N} b_i \, , \; 0 \le b_i \le S \, , \; i = 1, \ldots, N \, ,$$

$$I(\lambda(\cdot), \tau) = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} [c^j(x, \tau_i) + a_i^j] \rho^j(x) \lambda_i^j(x) dx \, .$$

Задача B1 является задачей бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными $\lambda(\cdot)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Оптимальное решение $\{\lambda_*(\cdot), \tau_*\}$ задачи A1 для $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$, и почти всех $x \in \Omega$ имеет вид

$$\lambda_{*i}^j(x) = \begin{cases} 1, & \tilde{n}^{\mathrm{j}}(\tilde{o}, \tau_{*\mathrm{i}}) + \grave{a}_i^j + \psi_i^* \le \tilde{n}^{\mathrm{j}}(\tilde{o}, \tau_{*\mathrm{k}}) + \grave{a}_k^j + \psi_k^*, \\ & k = 1, \ldots, N, \; i \ne k \text{ ï.â. äëÿ } x \in \Omega, \text{ òîãäà } x \in \Omega_{*i}^j, \\ 0 & \text{â îñòàëüíûõ ñëó÷àÿõ}, \end{cases} \tag{7}$$

где в качестве $\tau_{*1}, \ldots, \tau_{*N}$, $\psi_1^*, \ldots, \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение следующей конечномерной недифференцируемой задачи оптимизации:

$$G(\psi) = \min_{\tau \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) =$$

$$= \min_{\tau \in \Omega^N} \left\{ \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \min_{i=1,\ldots,N} [c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i] \rho^j(x) dx - \sum_{i=1}^{N} \psi_i b_i \right\} \to \max \tag{8}$$

при условиях

$$\psi_i \ge 0 \, , \; i = p+1, \ldots, N \, , \tag{9}$$

где

$$G_1(\tau, \psi) = -\sum_{i=1}^{N} \psi_i b_i + \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \min_{k=1,\ldots,N} [c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k] \rho^j(x) dx \, . \tag{10}$$

Из вида оптимального решения задачи A1 для каждого фиксированного $\tau \in \Omega^N$ (в предположении, что выполняются условия $\rho^j(x) \ge 0$ п.в. для $x \in \Omega$, $j = 1, \ldots, M$) следует теорема 2.

Теорема 2. Для того чтобы возможное разбиение $(\Omega_{*1}^1, \ldots, \Omega_{*i}^j, \ldots, \Omega_{*N}^M)$ было оптимальным для задачи A1, необходимо и достаточно существования действительных констант $\psi_1, \ldots, \psi_p, \psi_{p+1}, \ldots, \psi_N$ (среди которых $\psi_{p+1}, \ldots, \psi_N$ неотрицательны) таких, что

$$c^j(x, \tau_i) + a_i^j + \psi_i \le c^j(x, \tau_k) + a_k^j + \psi_k \, ,$$

$$i \ne k \text{, п.в. для } x \in \Omega_{*i}^j \, , \; i, k = 1, \ldots, N \, , \; j = 1, \ldots, M \, . \tag{11}$$

При этом в точках x, принадлежащих оптимальной границе подмножеств $\Omega_{*_i}^j$ и $\Omega_{*_k}^j$, в неравенстве (11) достигается знак равенства.

Алгоритм решения задачи А1. Для отыскания решения задачи (8)–(10) используем алгоритм обобщенных псевдоградиенитов с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных обобщенных градиентов, близкий к r-алгоритму Н.З. Шора. Для этого от задачи (8)–(10) перейдем к задаче безусловной максимизации по ψ с помощью введения в целевую функцию (10) негладкой штрафной функции множества $\{\psi_i \geq 0, i = p+1, ..., N\}$: найти

$$\max_{\psi \in E_N} \min_{\tau \in \Omega^N} P(\tau, \psi), \tag{12}$$

где $P(\tau, \psi) = G_1(\tau, \psi) - S \sum_{i=p+1}^{N} \max(0, -\psi_i)$.

Здесь S — достаточно большое положительное число (значительно больше максимального из множителей Лагранжа для функции (10)). О возможности перехода от задачи (8)–(10) к (12) см. в [3].

Определим i-ю компоненту $2N$-мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$g_p(\tau, \psi) = (g_p^{\psi}(\tau, \psi), g_p^{\tau}(\tau, \psi)) = (g_p^{\psi_1}(\tau, \psi), ..., g_p^{\psi_N}(\tau, \psi), g_p^{\tau_1}(\tau, \psi), ..., g_p^{\tau_N}(\tau, \psi))$$

функции (12) в точке $(\tau, \psi) = (\tau_1, ..., \tau_N, \psi_1, ..., \psi_N)$ следующим образом:

$$g_p^{\psi_i}(\tau, \psi) = \begin{cases} \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{j=1}^{M} \rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx - b_i, \quad i = 1, ..., p, \\ \int\limits_{\Omega} \sum\limits_{j=1}^{M} \rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx - b_i + S \cdot \max[0, \operatorname{sign}(-\psi_i)], \; i = p+1, ..., N, \end{cases} \tag{13}$$

$$g_p^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \rho^j(x) g_{c^j}^{\tau_i}(\tau, x)\lambda_i^j(x)dx, \; i = 1, ..., N, \tag{14}$$

где $g_{c^j}^{\tau_i}(\tau, x)$ — i-я компонента N-мерного вектора обобщенного градиента $g_{c^j}^{\tau}(\tau, x)$ функции $c^j(x, \tau_i)$, $j = 1, ..., M$, в точке $\tau = (\tau_1, ..., \tau_N)$.

Алгоритм 1. Область Ω заключаем в параллелепипед П, стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho^j(x) = 0$ при $x \in П \setminus \Omega$, $j = 1, ..., M$. Параллелепипед П покрываем прямоугольной сеткой и задаем начальное приближение $(\tau, \psi) = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$. Вычисляем значения $\lambda^{(0)}(x)$ в узлах сетки по формуле (7) при $\psi = \psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$. Вычисляем значения $(g_p^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}), \; g_p^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}))$ в узлах сетки по формулам (13), (14) при $\psi = \psi^{(0)}$, $\tau = \tau^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$. Выбираем начальный пробный шаг $h_0 > 0$ r-алгоритма и находим

$$\tau^{(1)} = P_П(\tau^{(0)} - h_0 g_p^{\tau}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})), \; \psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_p^{\psi}(\tau^{(0)}, \psi^{(0)}),$$

где $P_П$ — оператор проектирования на П.

Переходим ко второму шагу.

Пусть в результате вычислений после k (k = 1, 2,…) шагов алгоритма получены определенные значения $\psi^{(k)}, \tau^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$ в узлах сетки.

Опишем (k+1)-й шаг.

1. Вычисляем значения $\lambda^{(k)}(x)$ в узлах сетки по формуле (7) при $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_p(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$ по формулам (13), (14) при $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\tau = \tau^{(k)}$, $\psi = \psi^{(k)}$.

3. Проводим (k + 1)-й шаг r-алгоритма обобщенных почти-градиентов с растяжением пространства, близкого к r-алгоритму [7], краткая схема которого имеет вид

$$\tau^{(k+1)} = \mathrm{P}_{\Pi}(\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_p^{\tau}), \quad \psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\psi} \tilde{g}_p^{\psi},$$

где B_{k+1}^{τ}, B_{k+1}^{ψ} — операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство E_N, причем $B_0^{\psi} = I_N$, $B_0^{\tau} = I_N$, I_N — единичная матрица; $\tilde{g}_p = B_{k+1}^{*} g_p(\tau^{(k)}, \psi^{(k)})$; h_k — шаговый множитель, выбор которого осуществляется из условия минимума по направлению.

4. Если условие

$$\| (\tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) \| \le \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0, \tag{15}$$

не выполняется, переходим к (k+2)-му шагу алгоритма, если выполняется, то к п. 5.

5. Полагаем $\psi^{*} = \psi^{(l)}$, $\tau_{*} = \tau^{(l)}$, $\lambda_{*}(x) = \lambda^{(l)}(x)$, где l — номер итерации, на которой выполнилось условие (15).

6. Вычисляем оптимальное значение целевого функционала по формуле (8) при $\tau = \tau_{*}$, $\psi = \psi^{*}$ и для контроля правильности счета — по формуле

$$I(\lambda_{*}(\cdot), \tau_{*}) = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} [c^{j}(x, \tau_{*i}) + a_i^{j}] \rho^{j}(x) \lambda_{*i}^{j}(x) dx .$$

Алгоритм 1 описан.

Частными случаями рассмотренной задачи А1 являются задачи ОРМ как с заданными координатами центров подмножеств, так и неизвестными заранее; как без ограничений, так и с ограничениями (см. блок-схему 2). Из теоремы 1 легко получить оптимальные решения для перечисленных выше задач ОРМ.

Покажем это на примере линейной однопродуктовой задачи ОРМ без ограничений с размещением центров подмножеств.

Задача А2 (линейная однопродуктовая без ограничений с размещением центров):

$$\min_{\{\Omega_1,\dots,\Omega_N\},\{\tau_1,\dots,\tau_N\}} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx ,$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega , \ \mathrm{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \ne j, \ i, j = \overline{1, N} ,$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), \ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N, \ \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) .$$

Характеристическая функция подмножества Ω_i, $i=1,\ldots,N$, имеет вид

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega_i,\\ 0, & x\in\Omega\setminus\Omega_i.\end{cases}$$

Так как задача А2 без ограничений, то в ее оптимальном решении будут отсутствовать переменные ψ_i, $i=1,\ldots,N$, ответственные за ограничения в форме равенств и неравенств, тогда оптимальное решение (7) перепишем в виде

$$\lambda_i^*(x)=\begin{cases}1, \ (c(x,\tau_i^*)+a_i)=\min\limits_{k=1,\ldots,N}(c(x,\tau_k^*)+a_k), \ x\in\Omega_i^*,\\ \\ 0 \ \text{в остальных случаях, тогда} \ x\notin\Omega_i^*,\end{cases}$$

а в качестве $\tau_i=(\tau_1^*,\ldots,\tau_n^*)$ выбирается оптимальное решение следующей конечномерной недиференцируемой задачи оптимизации:

$$G(\tau)=\int\limits_{\Omega}\min_{k=1,\ldots,N}(c(x,\tau_k)+a_k)\,\rho(x)dx\to\min,\quad \tau\in\Omega^N\subset\underbrace{E_n\times\ldots\times E_n}_{N}.$$

Как отмечалось выше, в отличие от рассмотренных задач ОРМ, для которых решение получено в явном виде, решение для нелинейных задач ОРМ удается получить в виде операторных уравнений с параметрами, отыскиваемыми как оптимальное решение вспомогательных конечномерных негладких задач оптимизации с помощью различных модификаций r-алгоритма Шора [7].

Продемонстрируем это на примере следующей задачи ОРМ.

Задача А3 (нелинейная, многопродуктовая при ограничениях с размещением центров подмножеств).

Пусть Ω — ограниченное, измеримое по Лебегу множество в n-мерном евклидовом пространстве E_n.

Необходимо найти $N\cdot M$ измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1^1,\ldots,\Omega_N^1$; $\Omega_1^2,\ldots,\Omega_N^2;\ldots;\Omega_1^M,\ldots,\Omega_N^M$ (среди которых могут быть и пустые) и разместить их центры $\tau_1,\ldots,\tau_N$ так, чтобы найти

$$\min_{(\{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_N^M\},\,\{\tau_1,\ldots,\tau_N\})}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\phi_i^j\left(\int\limits_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx\right)+\int\limits_{\Omega_i^j}c^j(x,\tau_i)\rho^j(x)\,dx\right]$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx=b_i,\ i=1,\ldots,p,\quad \sum_{j=1}^{M}\int\limits_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx\le b_i,\ i=p+1,\ldots,N,$$

$$\{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_i^j,\ldots,\Omega_N^M\}\in\textstyle\sum_{\Omega}^{NM},\quad \tau=(\tau_1,\ldots,\tau_N)\in\Omega^N.$$

Здесь от функций $c^j(x,\tau_i)$ и $\rho^j(x)$ и от параметров $b_1,\ldots,b_N$ требуется выполнение тех же условий, что и в задаче А1; функции $\phi_i^j(Y_i^j)$, $i=1,\ldots,N$, $j=1,\ldots,M$, — действительные, ограниченные выпуклые (или вогнутые), дважды непрерывно дифференцируемые функции своего аргумента, где $Y_i^j=\int\limits_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx$.

Дальнейшие исследования удобнее проводить, введя в рассмотрение характеристические функции подмножеств Ω_i^j:

$$\lambda_i^j(x)=\begin{cases}1, \ x\in\Omega_i^j, \\ 0, \ x\in\Omega\setminus\Omega_i^j,\end{cases} \quad i=1,\ldots,N, \quad j=1,\ldots,M .$$

Оптимальное решение задачи А3. Для $i=1,\ldots,N$, $j=1,\ldots,M$, и почти всех $x\in\Omega$ оно определяется следующим образом:

$$\lambda_i^{*j}(x)=\begin{cases}1, \text{ если } c^j(x,\tau_i^*)+\psi_i^*+\phi'^j_{iY_i^j}\left(\int\limits_\Omega \rho^j(x)\lambda_i^{*j}(x)dx\right)= \\ =\min\limits_{k=1,\ldots,N}\left[c^j(x,\tau_k^*)+\psi_k^*+\phi'^j_{kY_k^j}\left(\int\limits_\Omega \rho^j(x)\lambda_k^{*j}(x)dx\right)\right], \\ 0 \ \text{ в противном случае,}\end{cases}$$

а в качестве $Y_1^{*1},\ldots,Y_N^{*M}$, $\tau_1^*,\ldots,\tau_N^*$, $\psi_1^*,\ldots,\psi_N^*$ выбирается оптимальное решение двойственной задачи, которая приведена к виду

$$G(Y,\tau,\psi)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}\phi_i^j(Y_i^j)-\phi'^j_{iY_i^j}(Y_i^j)\cdot Y_i^j+ \\ +\int\limits_\Omega \min\limits_{k=1,\ldots,N}[c^j(x,\tau_k)+ \\ +\psi_k+\phi'^j_{kY_k^j}(Y_k^j)]\rho^j(x)dx\end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i \to \max_{\psi\ge 0}\min_{\tau\in\Omega^N}\max_{Y\in U}$$

$$U=\{Y=(Y_1^1,\ldots,Y_N^M)\in E_{N\times M}:0\le\sum_{j=1}^{M}Y_i^j\le b_i, \ i=1,\ldots,N\}.$$

2. Теоретические и практические приложения

Теория ОРМ эффективно применяется для решения ряда теоретических классов оптимизационных задач, сводящихся к задачам ОРМ. На рис. 5 приведены некоторые из этих классов задач теории оптимизации.

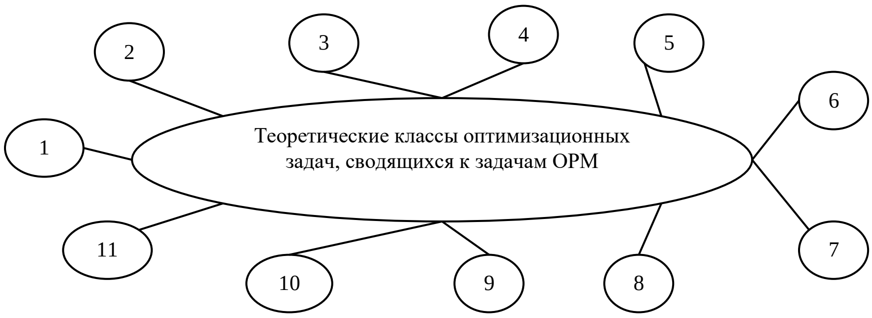


Рис. 5

1. Задачи распознавания образов (четких и нечетких) для минимизации средней функции потерь от неправильного распознавания.

2. Задачи теории классификации и кластеризации, изучающей вопросы разделения заданного множества (конечного или бесконечномерного) элементов на непересекающиеся подмножества

3. Задачи, возникающие в теории статистических решений при разбиении пространства признаков на непересекающиеся классы (обобщенная задача Неймана–Пирсона) [19].

4. Задачи глобальной оптимизации [31, 32].

5. Задачи построения оптимальных квадратур [33].

6. Непрерывные задачи оптимального шарового (однократного и многократного) покрытия ограниченных множеств евклидова пространства [29, 30].

7. Задачи геометрического проектирования.

8. Задачи целочисленного стохастического программирования.

9. Задача стартового управления параболической системой [4, 24].

10. Задача идентификации многозонных моделей динамики, относящиеся к классу обратных задач, формулируемых для систем с сосредоточенными параметрами [5].

11. Задачи построения диаграммы Вороного и ее обобщений [34, 35].

Продемонстрируем возможность применения математического аппарата решения непрерывных задач ОРМ, описанного в разд. 1, к следующим теоретическим задачам оптимизации:

- обобщенная задача Неймана–Пирсона;
- задача глобальной оптимизации;
- задача построения оптимальных квадратур;
- задача построения обобщенной диаграммы Дирихле–Вороного.

Обобщенная задача Неймана–Пирсона. Найти критическую вектор-функцию $\varphi^*(x)=(\varphi_1^*(x),\ldots,\varphi_N^*(x))$ такую, что

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\varphi_i(x)\,dx \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x)=1,\ 0\le\varphi_i(x)\le 1 \text{ п.в. для } x\in\Omega,\ i=1,2,\ldots,N,$$

$$\int_{\Omega} f_i(x)\varphi_i(x)dx\le d_i,\ i=1,\ldots,N;\ \sum_{i=1}^{N}d_i\ge\int_{\Omega}\min_{i=1,\ldots,N} f_i(x)dx.$$

Задача Неймана–Пирсона сводится к линейной непрерывной задаче оптимального разбиения при дополнительных ограничениях в форме неравенств с фиксированными центрами подмножеств, являющейся частным случаем задачи А1 [19].

Ее оптимальное решение согласно теореме 1 имеет вид

$$\varphi_i^*(x)=\begin{cases}1,\ (1+\xi_i^*)c_i(x)=\min\limits_{k=1,\ldots,N}(1+\xi_k^*)c_k(x),\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$(\xi_1^*,\ldots,\xi_N^*):\ G(\xi)=\int_{\Omega}\min_{i=1,\ldots,N}[(1+\xi_i)c_i(x)-\sum_{i=1}^{N}\xi_i d_i\to\max,$$

$$\xi_i\ge 0,\ i=1,\ldots,N.$$

Описанный подход для различных обобщений задачи Неймана–Пирсона позволяет найти оптимальное решение и, кроме того (в отличие от имеющихся научных результатов других авторов), определить константы $\xi_i\ge 0$, входящие в это решение.

Задача глобальной оптимизации. Рассмотрим задачу отыскания точки $x^* = (x^{*(1)}, \ldots, x^{*(n)})$, в которой функция $f(x)$ достигает глобального минимального значения на $\Omega \subset E_n$, т. е.

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x), \tag{16}$$

где $f(x)$ — многоэкстремальная недифференцируемая функция на $\Omega \subset E_n$.

Пусть в некоторой подобласти Ω_i, $1 \le i \le N$, области Ω, функция $f(x)$ унимодальна (точку локального минимума функции $f(x)$ на Ω обозначим τ_i^*), и пусть

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ \operatorname{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \ \ i \ne k, \ i, k = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, M.$$

Задача (16) поиска глобального минимума функции $f(x)$ на Ω сводится к непрерывной линейной однопродуктовой задаче ОРМ без ограничений с отысканием координат центров подмножеств, т.е. к задаче А2 с параметрами $a_i = 0, \ i = 1, \ldots, N$: найти

$$\min_{(\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \ldots, \tau_N\})} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) dx \tag{17}$$

при условиях

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \ \operatorname{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \ \ i \ne k, \ i, k = 1, \ldots, N, \ j = 1, \ldots, M,$$

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N) \in \Omega^N, \ x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \Omega; \ \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \ldots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega.$$

Целевой функционал этой задачи представляет собой суммарные потери от неправильного разбиения области Ω на зоны притяжения $\Omega_1^*, \ldots, \Omega_N^*$ и неправильного отыскания локальных минимумов $\tau_1^*, \ldots, \tau_N^*$ в каждой из этих зон, а функция $c(x, \tau_i), \ i = 1, \ldots, N$, должна являться штрафом за ошибку, допускаемую при отнесении точки x из области притяжения одного локального минимума к области притяжения другого.

Оптимальное решение задачи (17), см. [31, 32], достигается при каждом фиксированном $\tau \in \Omega^N$ на вектор-функции $\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x), \ldots, \lambda_i^*(x), \ldots, \lambda_N^*(x))$, i-я компонента которой имеет вид

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i^*) = \min\limits_{k=1,\ldots,N} c(x, \tau_k^*), \text{ тогда } x \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях, тогда } x \notin \Omega_i^*; \end{cases}$$

а в качестве вектора $\tau^* = (\tau_i^*, \ldots, \tau_N^*)$ выбирается оптимальное решение следующей задачи:

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1,2,\ldots,N} c(x, \tau_i) dx \to \min, \ \tau = (\tau_i, \ldots, \tau_N) \in \Omega^N.$$

Предложенный подход дает возможность найти одновременно заданное число локальных минимумов и их зоны притяжения.

Построение оптимальных квадратур. Рассматривается задача построения оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов вида $\int\limits_{\Omega} f(x)dx,$ где Ω — измеримое множество конечной лебеговой меры в n-мерном евклидовом пространстве E_n.

Традиционно всякая квадратурная формула вида

$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} p_i f(\tau_i) \tag{18}$$

задается вектором коэффициентов и узлов $(p^N,\ \tau^N)=\{p_1, ..., p_N,\ \ \tau_1, ..., \tau_N\}$, где коэффициенты $p_1, ..., p_N$ — произвольные действительные числа, а узлы $\tau_i = (\tau_i^1, ..., \tau_i^n),\ i = 1, ..., N,$ — точки из Ω.

Для численного решения задачи одновременного отыскания наилучшей гарантированной точности, оптимальных узлов $\tau_1^*, ..., \tau_N^*$ и оптимальных коэффициентов $p_1^*, ..., p_N^*$ рассматриваемой квадратурной формулы (18) эта задача сводится к непрерывной линейной однопродуктовой задаче оптимального разбиения множества Ω на подмножества $\Omega_1, ..., \Omega_N$ с одновременным отысканием координат центров этих подмножеств, совпадающих с координатами оптимальных узлов квадратурной формулы. В то же время значения оптимальных коэффициентов будем вычислять как лебеговы меры подмножеств $\Omega_1, ..., \Omega_N$, на которые разбивается множество Ω [33].

Задача построения обобщенной диаграммы Вороного. Как известно, диаграмма Вороного — это математический объект, который нестрого описывается следующим образом. Диаграмма Вороного заданного конечного множества M точек плоскости (пространства) представляет такое разбиение плоскости (пространства), при котором каждая область (ячейка Вороного) этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества M, чем к любому другому элементу этого множества.

Стандартной (классической) диаграммой Вороного (ДВ) конечного множества M точек-генераторов $\tau_1, ..., \tau_N$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathrm{E}_n\ (n \geq 1)$ называется совокупность многогранников Вороного (МВ) $\mathrm{Vor}(\tau_i),\ i = 1, ..., N$, исходных точек:

$$\mathrm{Vor}(\tau_i) = \{x \in \mathrm{E}_n : r(x, \tau_i) \leq r(x, \tau_j),\ \ j \neq i,\ \ j = 1, ..., N\}, \tag{19}$$

где $r(x, y)$ определяется как одна из метрик:

$$\text{евклидова } r(x, \tau_i) = \| x - \tau_i \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x^j - \tau_i^j)^2}\,, \tag{20}$$

$$\text{манхэттенская } r(x, \tau_i) = \| x - \tau_i \|_1 = \sum_{j=1}^{n} | x^j - \tau_i^j |, \tag{21}$$

$$\text{Чебышева } r(x, \tau_i) = \| x - \tau_i \|_0 = \max_{j=1, \ldots, n} \{| x^j - \tau_i^j |\}. \tag{22}$$

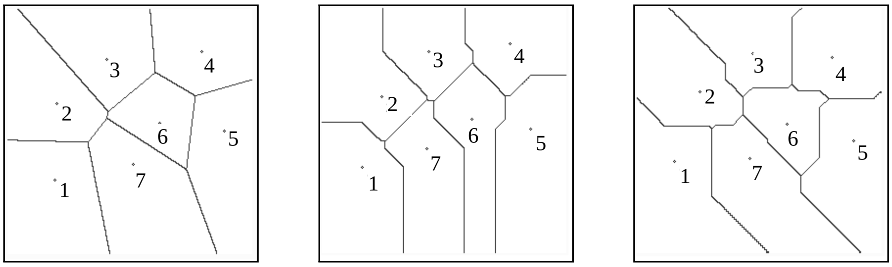
В работах [5, 34, 35] приводится огромный спектр теоретических и практических задач, при решении которых используются классическая диаграмма Вороного и многочисленные ее обобщения.

В [34, 35] разработан единый подход к построению диаграммы Вороного и различных ее обобщений, основанный на формулировании непрерывных задач оптимального разбиения множеств из n-мерного евклидова пространства на подмножества с критерием качества, обеспечивающим соответствующий вид диаграммы Вороного, и применении разработанного в [3, 4] математического и алгоритмического аппаратов решения таких задач. В результате такого подхода появляется возможность строить не только известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые.

На рис. 6, 7 представлены стандартные (классические) диаграммы Вороного, генерируемые N заданными точками и полученные в результате решения задачи A2 (с заданным расположением центров подмножеств) с функцией плотности $\rho(x)=1$ при всех $x \in \Omega = \{(x^1, x^2) \in R^2 : 0 \le x^i \le 10,\ i = 1, 2\}$; на рис. 6: *а* — евклидова метрика при N = 7, *б* — манхэттенская метрика при N = 7, *в* — метрика Чебышева при N = 7; на рис. 7: *а* — евклидова метрика при N = 100, *б* — манхэттенская метрика при N = 150, *в* — метрика Чебышева при N = 200.

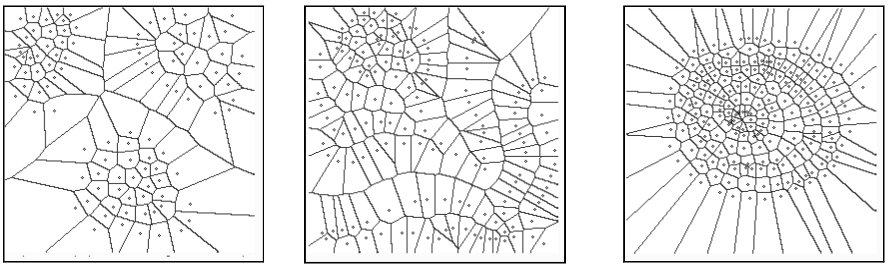
На рис. 8 представлены диаграммы Вороного с оптимальным размещением N точек-генераторов: *а* — евклидова метрика при N = 300, *б* — манхэттенская метрика при N = 300, *в* — метрика Чебышева при N = 200.

Таким образом, при соответствующей формулировке непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множества решение этой задачи приводит к тому или иному варианту диаграммы Вороного заданного числа точек с их фиксированным расположением либо с их размещением в ограниченном множестве.



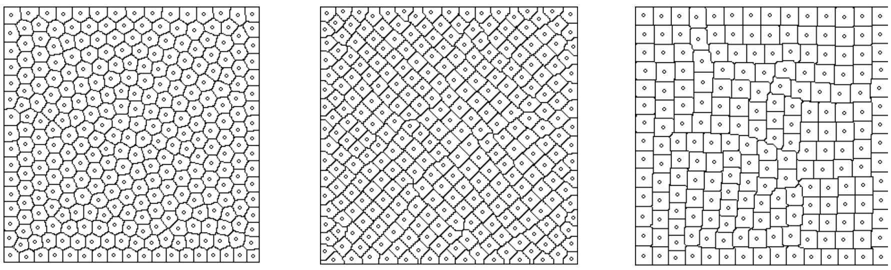
а *б* *в*

Рис. 6



а *б* *в*

Рис. 7



а *б* *в*

Рис. 8

Универсальность данного подхода к построению диаграмм Вороного подтверждается еще и следующими фактами:

• модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств могут быть обобщены на случай нечеткого задания исходных параметров задачи или требования нечеткого разбиения множества, в результате и результирующие диаграммы Вороного могут носить нечеткий характер;

• если при математическом описании практических задач оптимального разбиения множеств учитывать состояние некоторого объекта или процесса, которое может изменяться со временем и/или в пространстве, то при решении некоторых таких задач можно получить динамические диаграммы Вороного**;**

• среди непрерывных задач оптимального разбиения множеств выделяют класс задач, в которых наряду с разбиением требуется отыскать еще и оптимальное расположение центров подмножеств, таким образом, наряду с задачей построения диаграммы Вороного можно ставить задачу отыскания оптимальных (в каком-то смысле) координат точек-генераторов этой диаграммы (см. рис. 8);

• сложность алгоритмов построения диаграмм Вороного на основе описанного подхода существенно не меняется при увеличении количества точек-генераторов;

• результатом такого подхода является возможность строить не только известные диаграммы Вороного, но и конструировать новые.

3. Практические приложения теории ОРМ

Созданная теория может применяться для решения следующих практических задач: распознавания образов для минимизации средней функции потерь от неправильного распознавания, медицинской диагностики, территориального планирования сфер обслуживания; геологического прогнозирования; охраны окружающей среды, например задача обеспечения экологической безопасности при размещении отстойников радиоактивных отходов атомных электростанций с учетом экологической структуры региона; размещения предприятий, станций скорой помощи, базовых станций сотовой связи, нефтяных скважин; бесконечномерные транспортные задачи и задачи размещения предприятий; проектирования сетей из искусственных спутников земли для контроля диапазона круговых орбит; повышения обороноспособности и обеспечения национальной безопасности страны, развития агропромышленного комплекса и многие другие. Более полный перечень практических задач, сводящихся к задачам ОРМ, можно найти в работах [2–5].

Типичными представителями непрерывных задач оптимального разбиения множеств являются, как отмечалось выше, бесконечномерные транспортные задачи, или более общие — бесконечномерные задачи размещения предприятий с одновременным разбиением данного региона, непрерывно заполненного потребителями, на области потребителей, каждая из которых обслуживается одним предприятием в целях минимизации транспортных и производственных затрат (см., например, разд. 1, задача (1)–(3)). В роли потребителей здесь могут выступать также телефонные абоненты, школьники, избиратели, точки орошаемой территории, пациенты для диагностики заболеваний и т.д. Такие задачи в работах зарубежных авторов (см., например, [1]) называют location–allocation. Продемонстрируем на примере нелинейной многопродуктовой задачи location–allocation , сводящейся в математической постановке к нелинейной многопродуктовой задаче А3 из разд. 1, возможности разработанных в созданной теории ОРМ алгоритмов решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств.

 ISSN 0572-2691

Пусть задано множество $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le 10\}$ потребителей продукции трех видов, которая может производиться девятью пунктами производства. Стоимость транспортировки единицы продукции с i-го, $i = \overline{1,9}$, предприятия к потребителю (x, y) для каждого j-го, $j = \overline{1,3}$, вида продукции задается следующим образом:

$$c^j(x, y, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}, & \text{если } j = 1, \\ \max(|x - \tau_i^{(1)}|, |y - \tau_i^{(2)}|), & \text{если } j = 2, \\ |x - \tau_i^{(1)}| + |y - \tau_i^{(2)}|, & \text{если } j = 3. \end{cases}$$

Спрос $\rho^j(x, y)$ на продукцию j-го вида распределен по области Ω с плотностью

$$\rho^j(x, y) = \frac{1}{\ln|(x - y)^j - 110{,}003|}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Функции $\phi_i^j(Y_i^j)$, описывающие зависимость стоимости производства продукции j-го вида на i-м предприятии от его мощности Y_i^j, имеют вид $\phi_i^j(Y_i^j) = (Y_i^j)^2$, $i = \overline{1,9}$, $j = \overline{1,3}$, где мощность Y_i^j i-го предприятия по производству j-го вида продукции определяется по формуле $Y_i^j = \iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y)dxdy.$

Мощность i-го, $i = \overline{1,9}$, пункта производства по всем видам продукции определяется суммарным спросом потребителей, которые принадлежат Ω_i^j, $j = \overline{1,3}$, и для пунктов производства с номерами 3, 6, 8 должна быть равна заданным объемам, а для пунктов производства с номерами 1, 2, 4, 5, 7, 9 не должна превышать заданных объемов:

$$0 \le \sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y)dxdy \le b_i,\ i = 1, 2, 4, 5, 7, 9, \quad \sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y)dxdy = b_i,\ i = 3, 6, 8,$$

$$b_{1,7} = 100,\ b_2 = 86,\ b_3 = 36,\ b_4 = 80,\ b_5 = 17,\ b_6 = 5,\ b_8 = 15,\ b_9 = 25.$$

Требуется разбить множество потребителей Ω на зоны их обслуживания Ω_i^j девятью предприятиями по каждому виду продукции при условии, что

$$\bigcup_{i=1}^{9} \Omega_i^j = \Omega,\ j = \overline{1,3},\ \operatorname{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0,\ i \ne k,\ i, k = \overline{1,9},\ j = \overline{1,3},$$

и разместить эти предприятия в области Ω так, чтобы минимизировать функционал суммарных затрат на производство продукции и доставку ее к потребителю:

$$F(\{\Omega_1^1, ..., \Omega_i^j, ..., \Omega_9^3\},\ \{\tau_1, ..., \tau_9\}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{9} \left[\phi_i^j \left(\iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y)dxdy \right) + \iint\limits_{\Omega_i^j} c^j(x, \tau_i)\rho^j(x, y)dxdy \right].$$

Для программной реализации описанного в разд. 1 алгоритма использовался объектно-ориентированный язык программирования C# и среда разработки Microsoft Visual Studio [36].

Множество Ω покрывалась сеткой с узлами (i, j), $i = 1, ..., 21$, $j = 1, ..., 21$. В качестве начальных значений двойственных переменных заданы $\psi_i^{(0)} = 0$, $i = \overline{1,9}$; начальные значения мощностей предприятий: $Y_i^l = 10$, для i = 1, 3, 4, 6, 7, 9 и $Y_i^l = 100$, для i = 2, 5, 8; $l = \overline{1,3}$; начальные координаты размещения предприятий $\tau_i^{(0)} = (0; 0)$, $i = \overline{1,9}$.

Условием прекращения вычислений было выполнение неравенства

$$\| (Y^{(k)}, \tau^{(k)}, \psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}) \| \le \varepsilon \ , \ \varepsilon = 10^{-3} \ .$$

В результате работы алгоритма получены: максимальное значение функционала двойственной задачи $G^* \approx 673{,}4$; минимальное значение функционала прямой задачи $F_* \approx 676{,}4$; оптимальные мощности каждого из девяти предприятий по каждому из трех продуктов; оптимальные координаты девяти размещенных предприятий.

Оптимальное разбиение множества потребителей Ω на девять зон обслуживания каждым из девяти предприятий по трем видам продукции представлено на рис. 9; точками отмечены оптимальные расположения предприятий, цифрами — номера подмножеств.

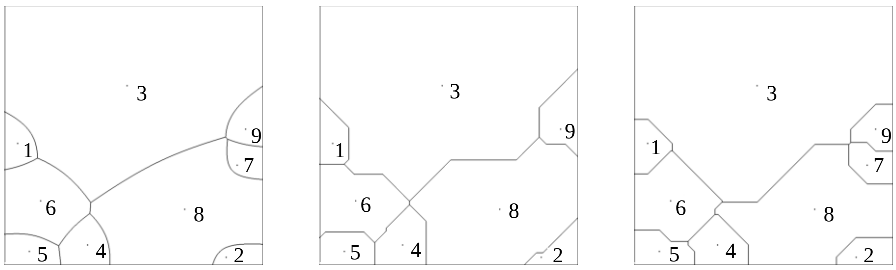


Рис. 9

Таким образом, в отличие, например, от известных автору результатов по решению задач location-allocation из работы [1] и работ, приведенных в ссылках к [1], алгоритмы, разработанные в теории ОРМ, обладают рядом преимуществ:

• применяются для решения нелинейных, многопродуктовых задач location-allocation при ограничениях на мощности предприятий в виде равенств и неравенств с размещением предприятий;

• в результате работы алгоритмов получают оптимальные разбиения множества потребителей на зоны их обслуживания каждым из предприятий по каждому продукту; оптимальные координаты размещенных предприятий и оптимальные мощности предприятий;

• не зависят от размерности пространства E_n (вопрос сводится лишь к вычислению многомерных интегралов);

• не зависят от геометрии разбиваемых множеств;

• благодаря высокому быстродействию r-алгоритма Шора применимы для задач больших размерностей (N = 100, 200, 300 и т.д.), см. [3–5];

• в итерационном процессе одновременно улучшаются размещения центров подмножеств, разбиения и объемы производства продукции на предприятиях.

 ISSN 0572-2691

Заключение

В данной работе приведена структура сформировавшейся к настоящему времени теории оптимального разбиения множеств из n-мерного евклидова пространства, являющейся новым разделом неклассического бесконечномерного математического программирования.

Описан единый для всех разделов теории ОРМ подход, который продемонстрирован на примерах как линейной, так и нелинейной многопродуктовых задач оптимального разбиения множеств с ограничениями и отысканием центров подмножеств.

Возможность применения созданных математического и алгоритмического аппаратов решения непрерывных задач ОРМ продемонстрирована на примерах решения некоторых теоретических задач оптимизации, таких как обобщенная задача Неймана–Пирсона; задачи глобальной оптимизации, построения оптимальных квадратур, построения обобщенной диаграммы Вороного.

Универсальность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере решения одной практической задачи, сводящейся к непрерывной задаче ОРМ, а именно, нелинейной многопродуктовой задаче location–allocation.

Теория непрерывных задач оптимального разбиения множеств является активно развивающимся направлением современной теории оптимизации. За пределами статьи остались наименее развитые разделы теории ОРМ, например такая большая ее ветвь, как задачи ОРМ в условиях неопределенности (стохастические, нечеткие), родственные с задачами ОРМ непрерывные задачи об оптимальном шаровом (однократном и многократном) покрытии, а также динамические задачи ОРМ. Требует дальнейшего развития направление научных исследований, связанное с приложением моделей и методов оптимального разбиения множеств к многочисленным теоретическим и практическим задачам оптимизации. Интересным направлением дальнейших исследований является также получение единых для всех разделов теории ОРМ обобщенных необходимых условий оптимальности разбиений на основе теории функции множеств.

О.М. Кісельова

СТАНОВЛЕННЯ ТА РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН n-ВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ. ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРАКТИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Наведено історію становлення, структуру та основні результати теорії оптимального розбиття множин, яка розроблена за останні п'ятдесят років автором та її учнями. Показано приклади застосування результатів цієї теорії ОРМ до розв'язання деяких різних за своєю природою теоретичних оптимізаційних задач, які зводяться у математичній постановці до неперервних задач оптимального розбиття. Практичні застосування теорії ілюструються на прикладі розв'язання узагальненої задачі розміщення–розбиття (location–allocation). Визначено напрями подальшого розвитку теорії оптимального розбиття множин.

E.M. Kiseleva

THE EMERGENCE AND FORMATION OF THE THEORY OF OPTIMAL SET PARTITIONING FOR SETS OF THE n-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE. THEORY AND APPLICATIONS

The history of the emergence and formation, structure and main results of the theory of optimal set partitioning, which has been developed during the previous fifty years by the author and her students, are presented. The examples of its applications to the variety of essentially different theoretical optimization problems that may be interpretated mathematically as continuous optimal set partitioning problems are presented. The real-world applications of the theory are illustrated by solving the generalized location–allocation problem example. The future directions of the optimal set partitioning theory are discussed.

1. *Murat A., Verter V., Laporte G.* A continuous analysis framework for the solution of location-allocation problems with dense demand // Computers and Operations Research. — 2010. — **37**. — P. 123–136.
2. *Киселева Е.М.* Математические методы оптимального разбиения множеств и их приложения // Дн-к : ДГУ, 1982. — 108 с.
3. *Киселева Е.М., Шор Н.З.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. — Киев : Наук. думка, 2005. — 564 с.
4. *Киселева Е.М., Коряшкина Л.С.* Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические. — Киев : Наук. думка, 2013. — 606 с.
5. *Киселева Е.М., Коряшкина Л.С.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и *r*-алгоритмы. — Киев : Наук. думка, 2015. — 400 с.
6. *Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Ус С.А.* Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем. — Дн-к : НГУ, 2015 — 270 с.
7. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. — Киев : Наук. думка, 1979. — 200 с.
8. *Киселева Е.М.* Алгоритм решения задачи оптимального разбиения с ограничениями // Кибернетика. — 1983. — № 1. — С.115–120.
9. *Kiseleva E.M., Shor N.Z.* An algorithm of solution of a multiproduct problem of optimal partitioning with constraints. // Cybernetics. — 1985. — **21** (1). — P. 90–99.
10. *Kiseleva E.M.* Solution of the problem of optimal partitioning including allocation of the centres of gravity of the subsets // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1989. — **29** (3). — P. 47–56.
11. *Kiseleva E.M., Shor N.Z.* Analysis of algorithms for a class of continuous partition problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 1994. — **30** (1). — P. 64–74.
12. *Kiseleva E.M., Koryashkina L.S.* A continuous problem of optimal partition with a nondifferentiable functional // Ibid. — 2000. — **36,** N 6. — P. 570–578.
13. *Kiseleva E.M., Zhiltsova A.A.* The necessary optimality conditions for continuous problems of set partitioning in terms of the theory of set functions // Journal of Automation and Information Sciences. — 2008. — **40,** N 12. — P. 14–26
14. *Kiselyova O.M., Dunaichuk M.S.* Solving a continuous nonlinear problem of optimal set partition with arrangement of subset centers in the case of a convex objective functional // Cybernetics and Systems Analysis. — 2008. — **44,** N 2. — P. 261–275.
15. *Kiseleva E.M., Kadochnikova Ya.E.* Solving a continuous single-product problem of optimal partitioning with additional conditions // Journal of Automation and Information Sciences. — 2009. — **41** (7). — P. 48–63.
16. *Киселева Е.М., Строева В.А.* Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 1. — С. 40 — 53.
17. *Kiseleva E.M., Zhiltsova A.A., Stroyeva V.A.* General scheme to obtain necessary optimality conditions for continuous optimal set partitioning problems // Journal of Automation and Information Sciences. — 2012. — **44** (9). — P. 51–65.
18. *Kiseleva E.M., Shor N.Z.* The solution of the continuous optimal decomposition problem with incomplete initial data // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1991. — **31** (6). — P. 13–20.
19. *Киселева Е.М.* Решение обобщенной задачи Неймана-Пирсона с использованием методов оптимального разбиения множеств // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1992. —**31**, № 1. — С.167–173.
20. *Kiseleva E.M., Kuznetsov K.A.* On application of the method of potential functions to the stochastic problem of the optimal partitioning of sets // Journal of Automation and Information Sciences. — 1999. — **31** (1–3). — P. 108–112.
21. *Kiseleva E.M., Kuznetsov K.A.* On solution of continuous stochastic problem of optimal partitioning with objective functional recovery // Ibid. — 2000. — **32** (3). — P. 60–66.

22. *Kiseleva E.M., Lebed O.Yu.* Classification of fuzzy problems of optimal sets partition and some approaches to their solution // Ibid. — 2009. — **41**, N 1. — P. 15–26.
23. *Киселева Е.М., Притоманова О.М., Журавель.* Алгоритм решения непрерывной задачи оптимального разбиения *(множеств)* с нейролингвистической идентификацией функций, входящих в целевой функционал // «Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2018. — № 2. — С. 15–32.
24. *Капустян В.Е., Киселева Е.М., Кроха Л.С.* Решение некоторых задач стартового управления методом оптимального разбиения множеств // Там же. — 1995. — № 5. — С. 80–88.
25. *Kiseleva E.M., Koriashkina L.S.* On solving and properties of the simplest dynamical problem of optimal set partition problem // Journal of Automation and Information Sciences. — 2013. **45** (6). — P. 1–12.
26. *Kiseleva E.M., Koriashkina L.S., Shevchenko T.A.* On dynamical problem of optimal set partition with integral constraints // Ibid. — 2013. — **45** (7). — P. 41–53.
27. *Kiseleva E.M., Koriashkina L.S., Shevchenko T.A.* Solving the dynamic optimal set partitioning problem with arrangement of centers of subsets // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — **50** (6). — P. 842–853.
28. *Shevchenko T., Kiseleva E.M., Koriashkina L.* The features of solving of the set partitioning problems with moving boundaries between subsets // Operations Research Proceedings. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2009. — P. 533–538.
29. *Kiseleva E.M., Lozovskaya L.I., Timoshenko E.V.* Solution of continuous problems of optimal covering with spheres using optimal set-partition theory // Cybernetics and Systems Analysis. — 2009. — **45** (3). — P. 421–437.
30. *Киселева Е.М., Коряшкина Л.С., Михалева А.А.* Оптимальное многократное шаровое покрытие невыпуклых областей // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Дн-к: ДНУ, 2015. — С. 72–87.
31. *Киселева Е.М., Степанчук Т.Ф.* Поиск глобального минимума недифференцируемой функции с помощью метода оптимального разбиения множеств // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 2. — С. 45–60.
32. *Kiseleva E.M., Stepanchuk T.* On the efficiency of a global non-differentiable optimization algorithm based on the method of optimal set partitioning // Journal of Global Optimization. — 2003. — **25** — P. 209–235.
33. *Киселева Е.М., Степанчук Т.Ф.* О выборе оптимальных коэффициентов и оптимальных узлов квадратурных формул для функциональных классов, заданных квазиметриками // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 3. — С. 138–153.
34. *Kiseleva E.M., Koriashkina L.S.* Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations I. Theoretical foundations // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — **51,** N 3. — P. 325–335.
35. *Kiseleva E.M., Koriashkina L.S.* Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi diagrams based on the theory of optimal set partitioning // Ibid. — 2015. — **51,** N 4. — P. 489–499.
36. *Киселева Е.М., Притоманова О.М., Шаравара В.В., Журавель С.В.* Объектно-ориентированный подход к программной реализации алгоритма решения нелинейных задач оптимального разбиения множеств // Питання прикладної математики і математичного моделювання. — Дн-к: ДНУ, 2017. — Вип. 17. — С. 87–95.

Получено 08.06.2018