

УДК 517.9

*Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенец*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КОМПОЗИЦИЯ  
И ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ  
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

**Введение**

Линейные системы управления со входом (управлением)  $u(t)$ , состоянием  $x(t)$ , выходом  $v(t)$  и начальным состоянием  $x_0$  в классической монографии [1] описываются соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bu(t), \quad v(t) = cx(t) + du(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

В случае стационарной системы, когда матричные коэффициенты  $a, b, c, d$  не зависят от времени, при переходе к амплитудам периодических колебаний или преобразованиям Лапласа  $\hat{u}(\lambda), \hat{x}(\lambda), \hat{v}(\lambda)$  функций  $u(t), x(t), v(t)$ , удовлетворяющих (1) с нулевым начальным состоянием  $x_0 = 0$  (2), получаем

$$\hat{x}(\lambda) = (\lambda E - a)^{-1} b \hat{u}(\lambda), \quad \hat{v}(\lambda) = [d + c(\lambda E - a)^{-1} b] \hat{u}(\lambda). \quad (3)$$

При переходе к преобразованиям Лапласа функции дополняем нулем для  $t > T$ . Здесь и в дальнейшем символ  $E$  обозначает единичную матрицу соответствующей размерности. Из выражений (3) видно, что система (1), (2) не имеет резонанса (особенности) на бесконечной частоте, амплитуда состояния  $\hat{x}(\lambda)$  убывает до нуля при неограниченном возрастании комплексной частоты  $\lambda$ . Последнее свойство может не выполняться в некоторых реальных системах, например в приведенных ниже примерах радиотехнических фильтров. Поэтому рассмотрим более общие уравнения для состояния  $x$  и выхода  $v$ , не разрешенные относительно производной состояния:

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx(t) = Fu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}(Mx) + Nx + Ku, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где  $A, B \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ,  $M, N \in \mathbf{R}^{p \times m}$ ,  $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $K \in \mathbf{R}^{p \times n}$ . Множество вещественных

$m \times n$ -матриц обозначается  $\mathbf{R}^{m \times n}$ . Системы управления с уравнениями состояний

© Л.А. ВЛАСЕНКО, А.Г. РУТКАС, В.В. СЕМЕНЕЦ, 2018

*Международный научно-технический журнал  
«Проблемы управления и информатики», 2018, № 5*

вида (4) в теории управления называют дескрипторными [2, 3]. В теории дифференциальных игр изучаются дескрипторные системы с двумя конфликтными управлениями [4]. Состояния дескрипторных систем управления также могут описываться дифференциальными уравнениями второго порядка, не разрешенными относительно старшей производной. Эти дескрипторные системы служат хорошими конечномерными аппроксимациями бесконечномерных систем управления типа Соболева [5].

Соотношения (4), (5), (2) определяют систему  $\Phi = \Phi(u, x_0, x, v)$ . Уравнение (4) и систему  $\Phi$  назовем регулярными, если их характеристический пучок матриц  $\lambda A + B$  является регулярным, т.е.  $\chi(\lambda) = \det(\lambda A + B) \neq 0$  (многочлен  $\chi(\lambda)$  — не тождественный нуль), вырожденными, если  $\det A = 0$  (или матрица  $A$  необратима), и явными, если  $A = E$ . Согласно введенной терминологии система (1), (2) является явной с нулевой матрицей  $M = 0$ . В дальнейшем будем рассматривать только регулярные дескрипторные системы управления.

При операторной трактовке системы  $\Phi$  коэффициенты в (4), (5) будем понимать как линейные операторы  $A, B: X \rightarrow Y$ ,  $F: U \rightarrow Y$ ,  $M, N: X \rightarrow V$ ,  $K: U \rightarrow V$ , действующие в вещественных конечномерных евклидовых пространствах  $X, Y, U, V$ . Тогда матричные коэффициенты интерпретируются как матрицы соответствующих операторов относительно определенных базисов [6]. Здесь  $\dim X = \dim Y = m$ ,  $\dim U = n$ ,  $\dim V = p$ . В частности, можно выбрать

$X = Y = \mathbf{R}^m$ ,  $U = \mathbf{R}^n$ ,  $V = \mathbf{R}^p$ . Значения функций входов (управлений)  $u(t)$  принадлежат пространству входов (управлений)  $U$ , функций состояний  $x(t)$  — пространству состояний  $X$ , функций выходов  $v(t)$  — пространству выходов  $V$ , функций  $Fu(t)$ ,  $Ax(t)$ ,  $Bx(t)$  — пространству образов  $Y$ . Регулярность характеристического пучка операторов  $(\lambda A + B): X \rightarrow Y$  и, соответственно, дескрипторной системы  $\Phi$  эквивалентна тому, что найдется хотя бы одно вещественное число  $\lambda_0$ , при котором существует обратный оператор  $(\lambda_0 A + B)^{-1}: Y \rightarrow X$ , определенный на всем пространстве  $Y$ .

В данной работе исследуются вопросы композиции и декомпозиции дескрипторных систем управления. Рассматривается последовательное соединение двух и более систем управления в одну, а также последовательное разложение сложной системы управления в цепочку более простых. В отличие от предшествующих работ, например [7], данные исследования относятся к системам управления самого общего вида — дескрипторным системам управления. Приводятся условия, которые позволяют представить систему как последовательное соединение систем меньших размерностей. В последнем разделе статьи полученные результаты иллюстрируются на примерах дескрипторных систем, описывающих переходные процессы в радиотехнических фильтрах. Построенная композиция имеет наглядную физическую интерпретацию в виде классического каскадного соединения четырехполюсников.

Обозначим  $C^k([0, T], X)$  класс вектор-функций  $x(t): [0, T] \rightarrow X$ , которые  $k$  раз непрерывно дифференцируемы при всех  $t \in [0, T]$ ;  $C^0 = C$ . Для канонического базиса евклидова  $m$ -мерного пространства  $\mathbf{R}^m$  используем обозначение  $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^m$ . При рассмотрении операторов в пространствах типа  $\mathbf{R}^m$  матрицы операторов запишем относительно этих базисов. Обозначим  $\text{Lin}\{\dots\}$  линейную оболочку векторов,  $\text{Ker } K$  — ядро оператора  $K$ ,  $\dim X$  — размерность пространства  $X$ .

## 1. Решение уравнения состояний (4)

Опишем состояния системы  $\Phi$ , т.е. решения уравнения (4), которыми именуется такие функции  $x(t) \in C([0, T], X)$ , что  $Ax(t) \in C^1([0, T], Y)$  и удовлетворяется уравнение (4). В частном случае явной системы (1), (2) с непрерывным управлением  $u(t)$  и начальным условием (2) существует единственное решение  $x(t)$ , которое допускает представление в виде формулы Коши или формулы вариации постоянных. При этом вектор  $x_0$  в (2) может быть любым вектором из пространства состояний  $X$ . Для вырожденного уравнения (4) может не существовать решений  $x(t)$  с определенными начальными данными [8], и возникает задача описания множества допустимых начальных данных.

Обычно решение вырожденного уравнения (4) ищется с помощью метода К. Вейерштрасса приведения регулярного пучка матриц  $\lambda A + B$  к канонической форме [8]. Этот метод трудно формализуется и не приводит к общей формуле решения  $x(t)$  типа формулы Коши. В связи с этим изложим иной функционально-аналитический метод построения явных формул для решения и описания начального многообразия уравнения (4). Метод основывается на использовании двух пар проекционных матриц  $P_1, P_2$  и  $Q_1, Q_2$ , которые отвечают спектральным проекторам типа Рисса в пространстве состояний  $X$  и пространстве образов  $Y$  системы [9]:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=\gamma} (\lambda A + B)^{-1} A d\lambda, \quad P_2 = E - P_1, \\ Q_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=\gamma} A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\gamma$  — радиус окружности в комплексной плоскости с центром в нуле, охватывающей весь конечный спектр пучка матриц  $\lambda A + B$  так, что для всех конечных собственных чисел  $\lambda_k$  выполнено условие  $|\lambda_k| < \gamma$ . Практическое интегрирование по комплексной переменной  $\lambda = \gamma e^{i\varphi}$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) осуществляется

отдельно для каждого элемента матриц  $(\lambda A + B)^{-1}A$  и  $A(\lambda A + B)^{-1}$  с использованием теоремы о вычетах. Матрицы  $P_k, Q_k$  вещественны, если вещественны матрицы  $A, B$ . Определим матрицы [10]

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1A + Q_2B, \quad H = G^{-1}Q_2A, \quad S = -G^{-1}Q_1B, \quad (7)$$

с помощью которых удобно записывается явная формула для решения  $x(t)$  начальной задачи (4), (2). Матрица  $H$  является нильпотентной с индексом нильпотентности  $\nu$ . Число  $\nu$  совпадает с индексом  $r = \text{ind}(A, B)$  пучка матриц  $\lambda A + B$ , когда  $\det A = 0$ . Если  $\det A \neq 0$  ( $\exists A^{-1}$ ), то  $r = 0$ . Для определения индекса пучка матриц также используют степенную оценку резольвенты  $(\lambda A + B)^{-1}$  в окрестности бесконечно удаленной точки  $|\lambda| \geq \gamma$

$$\|(\lambda A + B)^{-1}\| \leq C_0 |\lambda|^{k-1}, \quad 0 \leq k \leq m = \dim X, \quad (8)$$

которая следует из формулы обращения  $m \times m$ -матрицы. В (8) используется операторная норма, которая является корректной после комплексификации пространств  $X, Y$  и перехода к комплексным расширениям операторов  $A, B$  [6]. Индекс  $r = \text{ind}(A, B)$  пучка матриц  $\lambda A + B$  есть минимальное из целых чисел  $k$ , допускающих оценку (8).

В теореме устанавливаются условия согласования начального состояния  $x_0$  дескрипторной системы и управления  $u(t)$ , которые обеспечивают однозначную разрешимость начальной задачи (4), (2). Также указывается явная формула, которая описывает соответствующее состояние системы — решение задачи Коши (4), (2).

**Теорема 1** [10]. Пусть  $\lambda A + B$  — регулярный пучок  $m \times m$ -матриц с индексом  $r$ , компонента  $Q_1 Fu(t)$  правой части уравнения (4) непрерывна на  $[0, T]$ , а для компоненты  $Q_2 Fu(t)$  выполнены условия гладкости

$$H^k G^{-1} Q_2 Fu(t) \in C^k([0, T], X), \quad k = 0, 1, \dots, \nu - 1, \quad (9)$$

и условия согласования с начальным вектором

$$P_2 x_0 = \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [H^k G^{-1} Q_2 Fu(0)]. \quad (10)$$

Тогда задача Коши (4), (2) имеет единственное решение, которое допускает представление

$$x(t) = e^{St} P_1 x_0 + \int_0^t e^{S(t-\tau)} G^{-1} Q_1 Fu(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [H^k G^{-1} Q_2 Fu(t)]. \quad (11)$$

Положим  $0^0 = E$ , где  $0$  — квадратная нулевая матрица соответствующей размерности.

*Замечание 1.* Если система не вырождена (существует обратная матрица  $A^{-1}$ ), тогда проекторы (6) и матрицы (7) принимают вид  $P_1 = Q_1 = E$ ,  $P_2 = Q_2 = 0$ ,  $G = A$ ,  $S = -A^{-1}B$ ; условие согласования (10) выполнено для любого начального вектора  $x_0 \in X$ , в правой части формулы (11) третье слагаемое равно нулю и равенство (11) есть формула Коши для решения уравнения  $x'(t) = Sx(t) + A^{-1}Fu(t)$ . Если пучок  $\lambda A + B$  не имеет конечных собственных чисел, т.е.  $\det(\lambda A + B) \equiv \text{const} \neq 0$  (см. разд. 4), то  $P_1 = 0$ ,  $Q_1 = 0$ ,  $P_2 = E$ ,  $Q_2 = E$ ,  $G = B$ ,  $H = B^{-1}A$ ,  $S = 0$  и третье слагаемое в правой части формулы (11) дает единственное решение  $x(t)$  уравнения (4) с единственным допустимым начальным вектором  $x_0 = P_2 x_0$ , который определяется по формуле (10).

*Замечание 2.* Пусть в условиях теоремы 1 управление непрерывно и в условиях (9) требования гладкости повышены на единицу:

$$u(t) \in C([0, T], U), \quad H^k G^{-1} Q_2 Fu(t) \in C^{k+1}([0, T], X), \quad k = 0, 1, \dots, \nu - 1. \quad (12)$$

Тогда состояние  $x(t)$  (11) является непрерывно дифференцируемым, а выход  $v(t)$  (5) — непрерывным. Вместо серии условий (12) иногда на практике удобнее проверить одно более сильное условие  $Q_2Fu(t) \in C^V([0, T], Y)$ .

Как и в [11], для амплитуд периодических колебаний  $\hat{u}(\lambda), \hat{x}(\lambda), \hat{v}(\lambda)$  с комплексной частотой  $\lambda$ , т.е. преобразований Лапласа функций  $u(t), x(t), v(t)$ , введем частотные матрицы-функции  $\theta(\lambda)$  и  $w(\lambda)$  или отображения входа на состояние и входа на выход:

$$\hat{x}(\lambda) = \theta(\lambda)\hat{u}(\lambda), \quad \hat{v}(\lambda) = w(\lambda)\hat{u}(\lambda).$$

Для явной системы (1) вследствие (3) получаем

$$\theta(\lambda) = (\lambda E - a)^{-1}b, \quad w(\lambda) = d + c(\lambda E - a)^{-1}b.$$

Для дескрипторной системы  $\Phi$  (4), (5) с нулевым начальным состоянием  $x_0 = 0$  (2) имеем

$$\hat{x}(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}F\hat{u}(\lambda), \quad \hat{v}(\lambda) = [K + (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}F]\hat{u}(\lambda),$$

если  $\lambda$  не является собственным числом характеристического пучка системы, т.е. существует резольвента  $(\lambda A + B)^{-1}$ . Следовательно, для дескрипторной системы  $\Phi$  определим частотные матрицы-функции  $\theta(\lambda), w(\lambda)$  как

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) &= (\lambda A + B)^{-1}F, \\ w(\lambda) &= K + (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1}F = K + (\lambda M + N)\theta(\lambda). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $w(\lambda)$  — передаточная матрица-функция дескрипторной системы. При операторной трактовке системы  $\Phi$  вводим в рассмотрение частотные оператор-функции  $\theta(\lambda), w(\lambda)$  в комплексных оболочках исходных пространств и заменяем исходные операторы на их комплексные расширения.

## 2. Последовательная композиция дескрипторных систем

Принцип последовательной композиции (последовательного соединения) двух систем управления  $\Phi_j = \Phi_j(u_j, x_{j0}, x_j, v_j)$ ,  $j = 1, 2$ , в одну систему управления  $\Phi(u, x_0, x, v) = \Phi_1 \otimes \Phi_2$  состоит в том, что выход  $v_1$  первой системы отождествляется со входом  $u_2$  второй; вход  $u$  результирующей системы  $\Phi$  совпадает с входом  $u_1$  системы  $\Phi_1$ ; выход  $v$  системы  $\Phi$  — с выходом  $v_2$  системы  $\Phi_2$  [1]. Пусть системы  $\Phi_j$  описываются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_j x_j) + B_j x_j(t) &= F_j u_j(t), \\ v_j(t) &= \frac{d}{dt}(M_j x_j) + N_j x_j + K_j u_j, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x_j(0) = x_{j0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Вещественные евклидовы пространства входов, состояний, образов и выходов системы  $\Phi_j$  обозначаются как  $U_j, X_j, Y_j$  и  $V_j$ . Относительно пространств входов и выходов рассматриваемых систем предполагаем, что

$$V_1 = U_2, \quad U = U_1, \quad V = V_2. \quad (15)$$

Система  $\Phi$  имеет пространства входов  $U=U_1$  и выходов  $V=V_2$ . Относительно пространства состояний  $X$  и пространства образов  $Y$  системы  $\Phi$  предполагаем, что они являются прямыми суммами соответствующих пространств систем  $\Phi_1, \Phi_2$ :

$$X = X_1 \dot{+} X_2, \quad Y = Y_1 \dot{+} Y_2. \quad (16)$$

На рис. 1 изображен принцип последовательной композиции  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ .

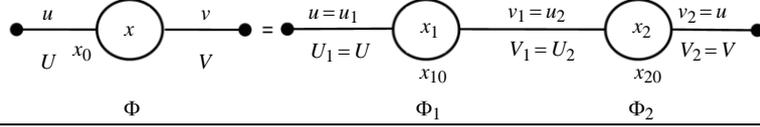


Рис. 1

Полученную последовательную композицию  $\Phi$  опишем в операторной форме (4), (5), (2) в предположении, что

$$\begin{aligned} u(t) = u_1(t), \quad x_0 = x_{10} + x_{20}, \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ v(t) = v_2(t), \quad u_2(t) = v_1(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Если в соотношениях (14) учесть равенства (17), то получим

$$\frac{d}{dt}(A_1 x_1) + B_1 x_1(t) = F_1 u(t), \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt}(-F_2 M_1 x_1 + A_2 x_2) - F_2 N_1 x_1(t) + B_2 x_2(t) = F_2 K_1 u(t), \quad (19)$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}(K_2 M_1 x_1 + M_2 x_2) + K_2 N_1 x_1(t) + N_2 x_2(t) + K_2 K_1 u(t). \quad (20)$$

Введем в рассмотрение операторы  $A, B: X \rightarrow Y$ ,  $F: U \rightarrow Y$ ,  $M, N: X \rightarrow V$  и  $K: U \rightarrow V$ , которые представим в блочной форме согласно прямым разложениям пространств  $X, Y$  (16) и равенствам (15) для пространств  $U, V$ :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ -F_2 M_1 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ -F_2 N_1 & B_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 K_1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$M = [K_2 M_1 \quad M_2], \quad N = [K_2 N_1 \quad N_2], \quad K = K_2 K_1.$$

Теперь уравнения (18), (19) записываются в виде (4), а выход (20) — в виде (5).

Систему управления  $\Phi$  (4), (5), (2) с пространствами состояний  $X$  и образов  $Y$  (16), с пространствами входов  $U$  и выходов  $V$  (15), с блочными операторными коэффициентами (21), соответствующими прямым суммам (16), с начальным вектором  $x_0$ , входом  $u(t)$  и выходом  $v(t)$  в (17) будем называть последовательным соединением или последовательной композицией  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$  систем  $\Phi_1, \Phi_2$  (14). Подпространства  $X_2, Y_2$  образуют инвариантную пару подпространств относительно пучка операторов  $\lambda A + B$ , так как справедливы включения

$$AX_2 \subset Y_2, \quad BX_2 \subset Y_2. \quad (22)$$

При последовательной композиции дескрипторных систем управления  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$  резольвента характеристического пучка системы  $\Phi$  выражается че-

рез резольвенты характеристических пучков систем  $\Phi_j$  для всех несобственных чисел  $\lambda$  этих пучков:

$$(\lambda A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} (\lambda A_1 + B_1)^{-1} & 0 \\ (\lambda A_2 + B_2)^{-1} F_2 (\lambda M_1 + N_1) (\lambda A_1 + B_1)^{-1} & (\lambda A_2 + B_2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получим оценки резольвенты и индекса  $r = \text{ind}(A, B)$  характеристического пучка системы  $\Phi$ , используя индексы  $r_j = \text{ind}(A_j, B_j)$  характеристических пучков систем  $\Phi_j$ :

$$\|(\lambda A + B)^{-1}\| \leq C_0 |\lambda|^{r_1 + r_2 - 1} \quad (|\lambda| \gg 1), \quad r \leq r_1 + r_2.$$

Амплитуды периодических колебаний систем  $\Phi, \Phi_1, \Phi_2$  связаны равенствами

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{u}_1(\lambda), \quad \hat{u}_2(\lambda) = \hat{v}_1(\lambda), \quad \hat{v}(\lambda) = \hat{v}_2(\lambda), \quad \hat{x}(\lambda) = \hat{x}_1(\lambda) + \hat{x}_2(\lambda).$$

Поэтому, как для открытых систем в [11], частотные оператор-функции  $\theta(\lambda), w(\lambda)$  системы  $\Phi$  допускают представления посредством частотных оператор-функций  $\theta_1(\lambda), w_1(\lambda)$  и  $\theta_2(\lambda), w_2(\lambda)$  систем  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ :

$$\theta(\lambda) = \begin{bmatrix} \theta_1(\lambda) \\ \theta_2(\lambda) w_1(\lambda) \end{bmatrix}, \quad w(\lambda) = w_2(\lambda) w_1(\lambda). \quad (23)$$

Здесь оператор-функция  $\theta(\lambda): U \rightarrow X_1 + X_2$  записана в блочной форме согласно прямому разложению. При последовательной композиции  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$  передаточная оператор-функция  $w(\lambda)$  допускает мультипликативное представление через передаточные оператор-функции  $w_1(\lambda), w_2(\lambda)$  (согласно терминологии в [12]).

### 3. Последовательная декомпозиция дескрипторных систем

Рассмотрим задачу, обратную композиции. Система  $\Phi$  (4), (5), (2) с пространством состояний  $X$  и образов  $Y$  допускает последовательную декомпозицию, если существуют подсистемы  $\Phi_1, \Phi_2$  (14) с пространствами состояний  $X_1, X_2$  и образов  $Y_1, Y_2$  меньшей размерности, чем  $X$  и  $Y$ , такие, что имеет место последовательная композиция  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ .

**Теорема 2.** Пусть в дескрипторной регулярной системе  $\Phi$  (4), (5), (2) оператор  $K: U \rightarrow V$  имеет обратный  $K^{-1}: V \rightarrow U$ . Система  $\Phi$  допускает декомпозицию  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$  на регулярные подсистемы  $\Phi_j$  (14) с  $\dim U_1 = \dim V_1$ , если и только если существуют прямые разложения вида (16), такие, что  $\dim X_2 = \dim Y_2$ , подпространства  $X_2, Y_2$  являются инвариантной парой относительно характеристического пучка  $\lambda A + B$  системы  $\Phi$  в смысле (22), а подпространства  $X_1, Y_1$  — инвариантной парой относительно возмущенного пучка  $\lambda(A + FK^{-1}M) + (B + FK^{-1}N)$ :

$$(A + FK^{-1}M) X_1 \subset Y_1, \quad (B + FK^{-1}N) X_1 \subset Y_1. \quad (24)$$

*Доказательство.* Заметим, что в силу существования обратного оператора  $K^{-1}$ , определенного на всем  $V$ , размерности пространств  $U, V$  совпадают:  $\dim U = \dim V$ .

*Докажем необходимость.* Пусть система  $\Phi$  (4), (5), (2) допускает декомпозицию  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ . Тогда существуют прямые разложения (16), согласно которым операторные коэффициенты  $A, B: X \rightarrow Y$ ,  $F: U \rightarrow Y$ ,  $M, N: X \rightarrow V$ ,  $K: U \rightarrow V$  имеют блочную структуру (21), причем выполнены соотношения (22), т.е. подпространства  $X_2, Y_2$  являются инвариантной парой относительно характеристического пучка  $\lambda A + B$  системы  $\Phi$ . При этом в силу регулярности системы  $\Phi_2$  имеем равенство размерностей  $\dim X_2 = \dim Y_2$ .

Так как оператор  $K$  обратим, из его представления в (21) следует, что  $\text{Ker } K_1 = \{0\}$ . В силу  $\dim U_1 = \dim V_1$  обратимым является оператор  $K_1$ , отсюда  $K^{-1} = K_1^{-1} K_2^{-1}$ . В частности, получаем, что  $\dim U_2 = \dim V_2$ . Для того чтобы завершить доказательство необходимости, покажем, что справедливы включения (24). Согласно прямым разложениям (16) введем две пары взаимно дополнительных проекторов  $\Pi_1, \Pi_2$  в пространстве  $X$  и  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — в пространстве  $Y$ :

$$\Pi_j: X \rightarrow X_j, \Gamma_j: Y \rightarrow Y_j, j = 1, 2; \quad (25)$$

$$\Pi_1 \Pi_2 = 0, \Pi_1 + \Pi_2 = E_X, \Gamma_1 \Gamma_2 = 0, \Gamma_1 + \Gamma_2 = E_Y.$$

С помощью этих проекторов из блочной структуры (21) получаем

$$\Gamma_2 A \Pi_1 = -\Gamma_2 F_2 M_1 \Pi_1 = -\Gamma_2 F K_1^{-1} K_2^{-1} M \Pi_1 = -\Gamma_2 F K^{-1} M \Pi_1,$$

$$\Gamma_2 B \Pi_1 = -\Gamma_2 F_2 N_1 \Pi_1 = -\Gamma_2 F K_1^{-1} K_2^{-1} N \Pi_1 = -\Gamma_2 F K^{-1} N \Pi_1.$$

Следовательно,

$$\Gamma_2 (A + F K^{-1} M) \Pi_1 = 0, \Gamma_2 (B + F K^{-1} N) \Pi_1 = 0. \quad (26)$$

Поэтому соотношения (24) выполняются и возмущенный операторный пучок  $\lambda(A + F K^{-1} M) + (B + F K^{-1} N)$  имеет инвариантную пару подпространств  $X_1, Y_1$ .

Необходимость доказана.

*Докажем достаточность.* Пусть теперь условия теоремы 2 выполняются для системы  $\Phi$  (5), (4), (2). В искомой декомпозиции  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$  системы  $\Phi_1, \Phi_2$  с пространствами состояний  $X_1, X_2$  и образов  $Y_1, Y_2$ , удовлетворяющими прямым разложениям (16), строятся следующим образом. Выберем

$$V_1 = U_2 = V_2 = V, U_1 = U, K_1 = K, K_2 = E.$$

Принимая во внимание проекторы (25), положим

$$\begin{aligned}
A_1 &= \Gamma_1 A \Pi_1 : X_1 \rightarrow Y_1, \quad A_2 = \Gamma_2 A \Pi_2 : X_2 \rightarrow Y_2, \\
B_1 &= \Gamma_1 B \Pi_1 : X_1 \rightarrow Y_1, \quad B_2 = \Gamma_2 B \Pi_2 : X_2 \rightarrow Y_2, \\
F_1 &= \Gamma_1 F : U_1 \rightarrow Y_1, \quad F_2 = \Gamma_2 F K^{-1} : U_2 \rightarrow Y_2, \\
M_1 &= M \Pi_1 : X_1 \rightarrow V_1, \quad M_2 = M \Pi_2 : X_2 \rightarrow V_2, \\
N_1 &= N \Pi_1 : X_1 \rightarrow V_1, \quad N_2 = N \Pi_2 : X_2 \rightarrow V_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, операторы систем  $\Phi_1, \Phi_2$  определены.

Покажем справедливость блочных представлений (21) операторов  $A, B, F, M, N, K$  исходной системы  $\Phi$  посредством операторов построенных систем  $\Phi_1, \Phi_2$ . Вследствие инвариантности (22) верхние угловые блоки операторов  $A, B$  равны нулю:  $\Gamma_1 A \Pi_2 = 0, \Gamma_1 B \Pi_2 = 0$ . Если записать инвариантность (24) в виде (26), то для нижних угловых блоков операторов  $A, B$  получим  $\Gamma_2 A \Pi_1 = -\Gamma_2 F K^{-1} M \Pi_1 = -F_2 M_1, \Gamma_2 B \Pi_1 = -\Gamma_2 F K^{-1} N \Pi_1 = -F_2 N_1$ . Остальные представления блоков операторов в (21) очевидны. Начальные векторы, входы и выходы систем  $\Phi_1, \Phi_2$  удовлетворяют (17). Состояние  $x(t)$  результирующей системы  $\Phi$  по построению есть сумма в (17) состояний  $x_1(t), x_2(t)$  систем  $\Phi_1, \Phi_2$ . Следовательно,  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$  и декомпозиция системы  $\Phi$  осуществлена.

Теорема доказана.

#### 4. Иллюстрация декомпозиции на примере радиотехнической системы

Проиллюстрируем полученные результаты на примере системы, которая возникает при описании переходных режимов радиотехнического четырехполюсного фильтра, изображенного на рис. 2.

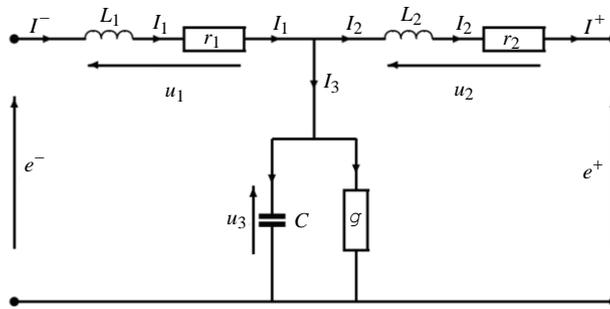


Рис. 2

Токи и напряжения удовлетворяют уравнениям Кирхгофа:

$$I_1 = I^-, \quad I_2 + I_3 = I^-, \quad u_1 + u_3 = e^-, \quad e^+ = u_3 - u_2, \quad I^+ = I^- - I_3. \quad (27)$$

В фильтре на рис. 2 колебания составляющих двухполюсников описываются уравнениями

$$u_j = \frac{d}{dt}(L_j I_j) + r_j I_j, \quad I_3 = \frac{d}{dt}(C u_3) + g u_3, \quad j = 1, 2. \quad (28)$$

С фильтром связываем систему управления  $\Phi = \Phi(u, x_0, x, v)$  в виде (4), (5), (2). Опишем эту систему. Управление (вход)  $u$ , выход  $v$ , состояние  $x$  — векторы

$$u = \begin{pmatrix} e^- \\ I^- \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} e^+ \\ I^+ \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Компоненты состояния  $x$  являются энергетическими характеристиками инерционных элементов цепи — индуктивностей  $L_1, L_2$  и емкости  $C$ . В качестве пространств состояний  $X$ , образов  $Y$ , входов  $U$ , выходов  $V$  выбираем

$$X = Y = \mathbf{R}^3, \quad U = V = \mathbf{R}^2. \quad (30)$$

С помощью равенств (28) исключаем неэнергетические переменные  $u_1, u_2, I_3$  из уравнений Кирхгофа (27):

$$I_1 = I^-, \quad \frac{d}{dt}(Cu_3) + I_2 + gu_3 = I^-, \quad \frac{d}{dt}(L_1 I_1) + r_1 I_1 + u_3 = e^-. \quad (31)$$

$$e^+ = e^- - \frac{d}{dt}(L_1 I_1 + L_2 I_2) - r_1 I_1 - r_2 I_2, \quad I^+ = I^- - \frac{d}{dt}(Cu_3) - gu_3. \quad (32)$$

Матричные коэффициенты системы  $\Phi$  вводим в соотношения (4), (5):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ L_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g \\ r_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$$M = \begin{pmatrix} -L_1 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_2 & 0 \\ 0 & 0 & -g \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этим матрицам соответствуют операторы  $A, B: X \rightarrow Y$ ,  $F: U \rightarrow Y$ ,  $M, N: X \rightarrow V$ ,  $K: U \rightarrow V$  в пространствах  $X, Y, U, V$  (30). Учитывая обозначения (29), уравнения (31) записываются как векторное уравнение (4), а выходы (32) — как векторный выход (5). Начальный вектор  $x_0$  (2) определяется заданными начальными значениями токов  $I_1(0), I_2(0)$  и напряжения  $u_3(0)$ . Таким образом, описана система управления  $\Phi$ , соответствующая фильтру на рис. 2. Очевидно, что  $\Phi$  — дескрипторная вырожденная регулярная система.

Осуществим декомпозицию системы  $\Phi$  на подсистемы меньших размерностей с помощью теоремы 2. Проверим выполнение условий этой теоремы. Так как  $\det(\lambda A + B) \equiv 1$ , система  $\Phi$  является регулярной. Матрица  $K$  обратима. Структура матриц  $A, B$  (33) предполагает прямые разложения (16), которые в этом случае являются ортогональными:

$$X = Y = \mathbf{R}^3 = X_1 \oplus X_2 = Y_1 \oplus Y_2, \quad (34)$$

$$X_1 = Y_1 = \text{Lin}\{\bar{e}_1\}, \quad X_2 = Y_2 = \text{Lin}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\},$$

где  $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  — векторы канонического базиса пространства  $\mathbf{R}^3$ .

Двухмерное подпространство  $X_2 = Y_2$  инвариантно относительно характеристического пучка матриц  $\lambda A + B$  системы, т.е. выполняется соотношение (22) теоремы.

Проекторы (25), соответствующие разложениям (34), записываем в виде диагональных матриц  $\Gamma_1 = \Pi_1 = \text{diag}\{1, 0, 0\}$ ,  $\Gamma_2 = \Pi_2 = \text{diag}\{0, 1, 1\}$ . Осуществляя непосредственные вычисления, убеждаемся в справедливости равенств (26). Следовательно, возмущенный матричный пучок системы  $\lambda(A + FK^{-1}M) + (B + FK^{-1}N)$  имеет инвариантное подпространство  $X_1 = Y_1$ , что означает справедливость включений (24).

Таким образом, условия теоремы 2 для системы  $\Phi$ , описывающей переходные режимы фильтра на рис. 2, выполнены. Поэтому существуют подсистемы  $\Phi_1, \Phi_2$ , структура которых указана в доказательстве теоремы, такие, что имеет место декомпозиция  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ . Опишем системы  $\Phi_1, \Phi_2$  (14). Система  $\Phi_1$  имеет одномерные пространства состояний и образов  $X_1 = Y_1$  (34), а система  $\Phi_2$  — двумерные пространства состояний и образов  $X_2 = Y_2$  (34). Двухмерные пространства входов и выходов этих систем совпадают:  $U_1 = V_1 = U_2 = V_2 = U = V = \mathbf{R}^2$ . В канонических базисах выпишем матричные коэффициенты, которым соответствуют операторы систем  $\Phi_j$  (14) в пространствах  $X_j = Y_j$ ,  $U_j = U$ ,  $V_j = V$ :

$$\begin{aligned} A_1 = 0, B_1 = 1, F_1 = (0 \ 1), M_1 = \begin{pmatrix} -L_1 \\ 0 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} -r_1 \\ 0 \end{pmatrix}, K_1 = K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -L_2 & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} -r_2 & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

Система управления  $\Phi_2$ , в свою очередь, также допускает декомпозицию согласно теореме 2. Действительно, справедливы ортогональные разложения:

$$X_2 = Y_2 = X_{21} \oplus X_{22} = Y_{21} \oplus Y_{22}, \quad X_{21} = Y_{21} = \text{Lin}\{\vec{e}_3\}, \quad X_{22} = Y_{22} = \text{Lin}\{\vec{e}_2\}.$$

Характеристический пучок операторов  $\lambda A_2 + B_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  обладает одномерным инвариантным подпространством  $X_{22} : A_2 X_{22} \subset X_{22}$ ,  $B_2 X_{22} \subset X_{22}$ . Возмущенный пучок операторов  $\lambda(A_2 + F_2 M_2) + (B_2 + F_2 N_2) : X_2 \rightarrow Y_2$  — одномерным инвариантным подпространством  $X_{21} : (A_2 + F_2 M_2) X_{21} \subset X_{21}$ ,  $(B_2 + F_2 N_2) X_{21} \subset X_{21}$ . Следовательно, условия теоремы 2 выполнены для системы  $\Phi_2$  и система допускает декомпозицию  $\Phi_2 = \Phi_{21} \otimes \Phi_{22}$ . Матричные коэффициенты (в канонических базисах), которым соответствуют операторы систем  $\Phi_{2j}$  в пространствах  $X_{2j} = Y_{2j}$ ,  $U_{2j} = U$ ,  $V_{2j} = V$ , имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{21} = 0, B_{21} = 1, F_{21} = (1 \ 0), M_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ -C \end{pmatrix}, N_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, K_{21} = K_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_{22} = 0, B_{22} = 1, F_{22} = (0 \ 1), M_{22} = \begin{pmatrix} -L_2 \\ 0 \end{pmatrix}, N_{22} = \begin{pmatrix} -r_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

В результате исходная трехмерная система управления  $\Phi$  (4), (5), (2) с матричными коэффициентами (33) допускает декомпозицию в цепочку трех одномерных систем

$$\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_{21} \otimes \Phi_{22} \quad (37)$$

с состояниями  $x_1(t) = I_1(t)\vec{e}_1$ ,  $x_{21}(t) = u_3(t)\vec{e}_3$ ,  $x_3(t) = I_2(t)\vec{e}_2$ . Как и система  $\Phi$ , системы  $\Phi_1, \Phi_{21}, \Phi_{22}$  являются вырожденными.

Нетрудно видеть, что полученные системы  $\Phi_1, \Phi_{21}, \Phi_{22}$  описывают три четырехполюсника, изображенные в соответствующем порядке на рис. 3. Эти четырехполюсники содержат лишь по одному инерционному элементу  $L_1, C, L_2$  соответственно. Их каскадное соединение, согласно терминологии из теории цепей [12, 13], дает исходный четырехполюсник, изображенный на рис. 2. При этом  $e_1^- = e_1^-, I_1^- = I_1^-, e_{21}^- = e_1^+, I_{21}^- = I_1^+, e_{22}^- = e_{21}^+, I_{22}^- = I_{21}^+, e_{22}^+ = e_2^+, I_{22}^+ = I_2^+$ .

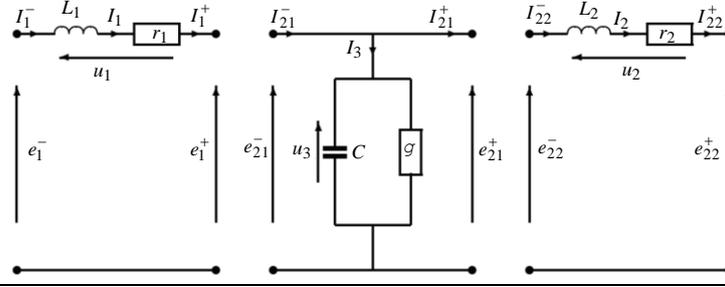


Рис. 3

*Замечание 3.* Если заранее неизвестна структура цепи на рис. 2, а известно лишь описание ее переходных режимов в виде системы управления (4), (5), то восстановить структуру можно, воспользовавшись описанной выше декомпозицией (37). Действительно, каждая из систем  $\Phi_1, \Phi_{21}, \Phi_{22}$  с одномерным пространством состояний легко восстанавливается в виде соответствующего четырехполюсника на рис. 3.

При последовательной композиции  $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$  для частотных отображений справедливы свойства (23). Система  $\Phi$  — композиция (37) из трех систем, поэтому свойства (23) принимают вид

$$\theta(\lambda) = \begin{bmatrix} \theta_1(\lambda) \\ \theta_{21}(\lambda)w_1(\lambda) \\ \theta_{22}(\lambda)w_{21}(\lambda)w_1(\lambda) \end{bmatrix} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \text{Lin}\{\bar{e}_1\} \dot{+} \text{Lin}\{\bar{e}_3\} \dot{+} \text{Lin}\{\bar{e}_2\}, \quad (38)$$

$$w(\lambda) = w_{22}(\lambda)w_{21}(\lambda)w_1(\lambda) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad (39)$$

где  $\theta(\lambda), w(\lambda), \theta_1(\lambda), w_1(\lambda), \theta_{21}(\lambda), w_{21}(\lambda), \theta_{22}(\lambda), w_{22}(\lambda)$  — в соответствующем порядке частотные оператор-функции систем  $\Phi, \Phi_1, \Phi_{21}, \Phi_{22}$ . Учитывая определение частотных матриц-функций (13) и выражения (35), (36) для матричных коэффициентов систем  $\Phi_1, \Phi_{21}, \Phi_{22}$ , получим

$$\theta_1(\lambda) = (0 \ 1), \quad w_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -(\lambda L_1 + r_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_{21}(\lambda) = (1 \ 0),$$

$$w_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\lambda C + g) & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_{22}(\lambda) = (0 \ 1), \quad w_{22}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -(\lambda L_2 + r_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Передаточная матрица-функция  $w(\lambda)$  системы  $\Phi$  — произведение (39) передаточных матриц-функций систем  $\Phi_{22}, \Phi_{21}, \Phi_1$ :

$$w(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + (\lambda L_2 + r_2)(\lambda C + g) & -(\lambda L_1 + r_1) - (\lambda L_2 + r_2)p(\lambda) \\ -(\lambda C + g) & p(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где  $p(\lambda)$  обозначается выражение

$$p(\lambda) = 1 + (\lambda C + g)(\lambda L_1 + r_1).$$

Учитывая блочную структуру оператора  $\theta(\lambda)$  (38), определим его матрицу в канонических базисах с помощью частотных матриц-функций систем  $\Phi_1, \Phi_{21}, \Phi_{22}$ :

$$\theta(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\lambda C + g) & p(\lambda) \\ 1 & -(\lambda L_1 + r_1) \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Для характеристического пучка матриц  $\lambda A + B$  системы  $\Phi$ , где  $A, B$  определены в (33), при всех комплексных решениях  $\lambda$  существует резольвента

$$(\lambda A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p(\lambda) - 1 & 1 & -(\lambda C + g) \\ -(\lambda L_1 + r_1) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью резольвенты вычисляются частотные матрицы-функции  $\theta(\lambda)$  и  $w(\lambda)$  (13), и в результате опять получаем выражения (41) и (40).

При заданных входных напряжении  $e^-(t)$  и токе  $I^-(t)$  при условии их согласования в начальный момент времени с заданными начальными значениями токов  $I_1(0), I_2(0)$  и напряжения  $u_3(0)$ , применяя теорему 1, опишем состояния системы  $\Phi$ , т.е. энергетические переменные  $I_1(t), I_2(t), u_3(t)$ , по формуле (11). Остальные токи и напряжения цепи на рис. 2 вычисляются непосредственно по формулам (28).

Так как матричный пучок  $\lambda A + B$  обратим при всех комплексных  $\lambda$ , то проекционные матрицы  $P_1, Q_1$  в (6) нулевые, соответственно,  $P_2 = Q_2 = E$  единичные. По формулам (7) находим

$$G = B, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g r_1 & 1 & -g \\ -r_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = 0, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g L_1 & 0 & C \\ L_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Индекс нильпотентности матрицы  $H$  равен  $\nu = 3$  ( $H^2 \neq 0, H^3 = 0$ ), следовательно,

$$x(t) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [H^k G^{-1} F u(t)].$$

Находим компоненты состояния  $x(t)$ :

$$x_1(t) = I_1(t) = I^-(t), \quad x_3(t) = u_3(t) = e^-(t) - r_1 I^-(t) - L_1 \frac{dI^-(t)}{dt},$$

$$x_2(t) = I_2(t) = -g e^-(t) + (g r_1 + 1) I^-(t) - C \frac{de^-(t)}{dt} + (g L_1 + C r_1) \frac{dI^-(t)}{dt} + L_1 C \frac{d^2 I^-(t)}{dt^2}.$$

Из этих формул следует необходимое требование гладкости управления  $u(t)$ : входное напряжение  $e^-(t)$  должно быть непрерывно дифференцируемым, входной ток  $I^-(t)$  — дважды непрерывно дифференцируемым. При заданном управлении  $u(t)$  состояние системы  $x(t)$  определяется однозначно, и ему соответствуют един-

ственные допустимые начальные значения токов  $I_1(0), I_2(0)$  и напряжения  $u_3(0)$

(см. формулу (10) ограничения на начальный вектор  $x_0$ , в которой  $P_2 = Q_2 = E$ ).

Электрическая цепь на рис. 2 относится к классу четырехполюсных радиотехнических фильтров с сосредоточенными параметрами, которые трактуются как схемы замещения волноводов. При этой трактовке результаты о композиции, декомпозиции и эволюции четырехполюсников могут быть использованы для оценки некоторых характеристик электромагнитного поля на отдельных участках сложных волноводных устройств. В частности, на практике такие оценки удобно учитывать при разработке средств защиты рабочего персонала от вредных электромагнитных излучений, создаваемых несколькими приборами внутри закрытого помещения. Информация о деталях и волноводной модели этой задачи изложена в работе [14].

### Заключение

Исследованы колебания, частотные характеристики и декомпозиция дескрипторных систем с иллюстрацией в радиотехнике.

Для линейных дескрипторных систем управления описаны допустимые начальные состояния и управления, эволюция состояния и выхода, исследована декомпозиция на системы меньших размерностей. Рассмотрены приложения в радиотехнике.

*Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенець*

### ПОСЛІДОВНІ КОМПОЗИЦІЯ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЯ ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Для аналізу складних лінійних дескрипторних систем керування, що описуються співвідношеннями, не розв'язаними відносно похідної стану, здійснюються їх розклади в низки простіших систем. У термінах інваріантних пар підпросторів характеристичного та збуреного операторних жмутків системи встановлюються умови, що дозволяють зобразити систему як послідовне з'єднання систем менших вимірностей. Результати ілюструються на прикладах дескрипторних систем, що описують перехідні режими у радіотехнічних фільтрах.

*L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, V.V. Semenets*

### SEQUENTIAL COMPOSITION AND DECOMPOSITION OF DESCRIPTOR CONTROLLED SYSTEMS

To analyze complicated linear descriptor control systems, which are described by relations not solved with respect to the derivative of the state, their decompositions into chains of more simple systems is given. In terms of invariant pairs of subspaces of characteristic and perturbed operator pencils of the system, we establish the conditions to represent the system as a series connection of systems of smaller dimensions. The results are illustrated on examples of descriptor systems that describe transient modes in radiotechnical filters.

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
2. Bender D.J., Laub A. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1987. — АС-32, N 8. — P. 672–688.
3. Duan G.R. Analysis and design of descriptor linear systems. — New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010. — 494 p.
4. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2016. — 293 (Suppl. 1). — P. 254–269.
5. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of undamped Sobolev-type retarded systems // Mathematical Notes. — 2017. — 102, N 3. — P. 297–309.
6. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969. — 476 с.

7. *Anderson J., Teixeira A., Sandberg H., Papachristodoulou A.* Dynamical system decomposition using dissipation inequalities // Proc. of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. — 2011. — Orlando, FL, ISSN 0743-1546. — P. 211–216.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1966. — 576 с.
9. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения  $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$  // Дифференц. уравнения. — 1975. — **11**, N 11. — С. 1996–2010.
10. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. — Днепрпетровск : Системные технологии, 2006. — 273 с.
11. *Livshits M.S.* Operators, oscillations, waves (open systems). — American Mathematical Society : Providence, R.I., 1973. — 274 p.
12. *Ефимов А.В., Потапов В.П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей // Успехи математических наук. — 1973. — **28**, выпуск 1 (169). — С. 65–130.
13. *Гиллемин Е.А.* Синтез пассивных цепей. — М. : Связь, 1970. — 720 с.
14. *Semenets V.V., Stytcenko T.E.* Analysis of electromagnetic environment and modeling of spurious radiation sources // Telecommunications and Radio Engineering. — 2016. — **75**, N 15. — P. 1385–1396.

*Получено 18.06.2018*

Статья представлена к публикации членом редколлегии акад. НАН Украины Чикрием А.А.