УДК 62-502

В.Б. Ларин

О ПОСТРОЕНИИ ЦЕНТРОСИММЕТРИЧНЫХ И АНТИЦЕНТРОСИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ СИЛЬВЕСТРА

Введение

Процедуры построения решений Сильвестра привлекали и продолжают привлекать внимание исследователей (например, [1–4], где есть дальнейшие ссылки). Так, в [4] рассматривается задача нахождения центросимметричных и антицентросимметричных решений системы обобщенных уравнений Сильвестра

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j B_{ij} = E_i, \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

где $A_{ij} \in R^{s_i \times r_j}$, $B_{ij} \in R^{r_j \times t_i}$, $E_i \in R^{m_i \times n_i}$, $X_j \in R^{r_j \times r_j}$.

По определению [4] центросимметричной матрицей X называется матрица, удовлетворяющая соотношению

$$SXS = X, \; S = [e_n, \;\; e_{n-1}, \;\; \ldots, \;\; e_1], \tag{2}$$

где e_i — единичные векторы, у которых на i-м месте стоят единицы. Антицентросимметричная матрица X определяется аналогично

$$SXS = -X. \tag{3}$$

Ниже приводятся алгоритмы нахождения решений системы (1), принадлежащие множеству центросимметричных или антицентросимметричных матриц.

Показано, что для нахождения таких решений (1) можно использовать процедуры линейных матричных неравенств (ЛМН) [5, 6]. Рассмотрены вопросы уточнения полученных решений.

1. Общие соотношения

Как отмечено в [5] (соотношения (2.3), (2.4)), матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^{\mathrm{T}}(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0, \tag{4}$$

где матрицы $Q(x) = Q^{\mathrm{T}}(x)$, $R(x) = R^{\mathrm{T}}(x)$, $S(x)$ линейно зависят от x, эквивалентно следующим матричным неравенствам:

$$R(x) > 0, \; Q(x) - S(x) R^{-1}(x) S^{\mathrm{T}}(x) > 0. \tag{5}$$

Здесь и далее верхний индекс «Т» означает транспонирование.

Рассмотрим следующее ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z & T \\ T^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} > 0, \;\; Z = Z^{\mathrm{T}}, \tag{6}$$

которое согласно (4), (5) можно записать в виде

$$Z > TT^{\mathrm{T}}.$$

Здесь и далее I — единичная матричная матрица соответствующего размера.

Соотношения (4)–(6) позволяют рассмотреть следующую стандартную задачу ЛМН на собственные значения соотношения (2.9) [5, п. 2.2.2]. А именно, задачу минимизации линейной функции cx (например, $cx = tr(Z)$, где $tr(Z)$ — след матрицы Z) при выполнении условий (6).

Соотношения (4) можно обобщить в виде следующей системы ЛМН:

$$\begin{bmatrix} Z_i & T_i \\ T_i^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix} > 0, \;\; i = 1, 2, \ldots, k \;\; Z_i = Z_i^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

которые можно представить в виде, аналогичном (5):

$$Z_i > T_i T_i^{\mathrm{T}}, \;\; i = 1, 2, \ldots, k. \tag{8}$$

Применительно к (8) также можно рассматривать стандартную задачу ЛМН на собственные значения. А именно, задачу минимизации

$$cx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i tr(Z_i) \tag{9}$$

при выполнении условий (8). В (9) α_i — весовые коэффициенты. Для решения этой задачи можно использовать процедуру mincx.m пакета MATLAB [6].

Отметим, что в ряде задач (см. разд. 4) можно упростить алгоритм, приняв, что в неравенстве (7) $Z_i = Z$ и, соответственно, в (8)

$$Z > T_i T_i^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

2. Алгоритмы нахождения решений (1)

Покажем возможность использования соотношений, приведенных в разд. 2 для нахождения центросимметричного решения уравнения (1). Итак, обозначим φ_1 левые части уравнения (1):

$$\varphi_1 = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j B_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

В качестве матриц T_i можно принять следующие матрицы:

$$T_i = E_i - \varphi_i. \tag{12}$$

Далее, приняв во внимание, что отыскивается центросимметричное решение уравнения (1), необходимо, следуя (2), ввести еще n матриц T_j:

$$T_j = SX_j S - X_j. \tag{13}$$

Когда отыскивается антицентросимметричное решение уравнения (1), соотношение (13) заменяем соотношением (3):

$$T_j = SX_j S + X_j. \tag{14}$$

3. Уточнение полученного решения

Покажем, что описанный выше алгоритм позволяет использовать метод Ньютона для повышения точности полученных результатов. Итак, пусть $\overline{X}_j$ — начальное приближение исходного решения (1). Точное решение $\tilde{X}_j$ будем искать в виде

$$\tilde{X}_j = \overline{X}_j + \Delta X_j, \tag{15}$$

где ΔX_j — малая поправка.

Подставив (15) в (1), получим

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \Delta X_j B_{ij} = \overline{E}_i, \quad \overline{E}_i = E_i - \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \overline{X}_j B_{ij}. \tag{16}$$

Для нахождения поправок ΔX_j можно использовать с соответствующими изменениями описанный выше алгоритм. Так, в рассматриваемом случае

$$T_i = \overline{E}_i - \overline{\varphi}_i, \quad \overline{\varphi}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \Delta X_j B_{ij}. \tag{17}$$

При отыскании центросимметричного решения уравнения (1) соотношение (13) принимает вид

$$T_j = S(\overline{X}_j + \Delta X_j)S - (\overline{X}_j + \Delta X_j). \tag{18}$$

В случае антицентросимметричных решений аналогом соотношения (14) будет следующее:

$$T_j = S(\overline{X}_j + \Delta X_j) + (\overline{X}_j + \Delta X_j). \tag{19}$$

Проиллюстрируем описанные алгоритмы на примерах.

4. Примеры

Пример 1. [4, example 4.4]. Необходимо найти антицентросимметричное решение следующей системы:

$$A_1 X B_1 + C_1 Y D_1 + E_1 Z F_1 = G_1, \quad A_2 X B_2 + C_2 Y D_2 + E_2 Z F_2 = G_2, \tag{20}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \; C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \; D_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \; F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -12 & -5 \\ -48 & -53 \end{bmatrix}, \; G_2 = \begin{bmatrix} 99 & -37 \\ 21 & -17 \end{bmatrix}, \; S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Точное антицентросимметричное решение системы (20) имеет следующий вид:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \; Y_0 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \; Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения (10)–(12), (14) и процедуру mincx.m пакета MATLAB, найдем значения $X, Y, Z,$ отличие которых от точных значений характеризуется следующими величинами:

$$n_x = \|X_0 - X\| = 5{,}4 \cdot 10^{-15},$$

$$n_y = \|Y_0 - Y\| = 9{,}93 \cdot 10^{-16},$$

$$n_z = \|Z_0 - Z\| = 8{,}34 \cdot 10^{-15}.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает спектральную норму матрицы.

Пример 2. Продолжим рассмотрение системы (20), изменив значения матриц G_1, G_2:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 51 & 64 \\ 53 & 78 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 49 & 5 \\ 31 & 9 \end{bmatrix}.$$

В этом случае система (20) будет иметь следующее центросимметричное решение:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad Z_0 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения (10)–(13) и процедуру mincx.m пакета MATLAB, найдем значения $X, Y, Z,$ отличие которых от точных значений, определяемых (21), характеризуют следующие величины:

$$n_x = \|X_0 - X\| = 2{,}33 \cdot 10^{-14},$$

$$n_y = \|Y_0 - Y\| = 9{,}65 \cdot 10^{-15},$$

$$n_z = \|Z_0 - Z\| = 3{,}91 \cdot 10^{-14}.$$

Пример 3. Проиллюстрируем описанный в разд. 3 алгоритм следующим примером. Пусть в (1) $m = n = 1,$ т.е. имеем следующее уравнение:

$$AXB = G_0, \tag{21}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -3 \cdot 10^6 \end{bmatrix}, \quad G_0 = \begin{bmatrix} -21 & 12000005 \\ -39 & 21000008 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (21) имеет следующее антицентросимметричное решение:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Используя алгоритм, описанный в разд. 2, получим значение $X_1,$ отличие которого от точного значения (X_0) характеризуется следующим образом:

$$X_0 - X_1 = \begin{bmatrix} -0{,}0867 & 0 \\ 0{,}4978 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-10}, \quad n_x = \|X_0 - X_1\| = 5{,}05 \cdot 10^{-11}.$$

Для уточнения полученного значения X_1 (нахождение поправки ΔX) используем соотношения (16), (17), (19). Имеем

$$G_1 = (AX_1B - G_0) = \begin{bmatrix} 0{,}2727 & 0 \\ 0{,}3960 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9},$$

$$X_0 - X_1 - \Delta X = \begin{bmatrix} -{,}2233 & 0{,}0029 \\ -0{,}1194 & -0{,}0166 \end{bmatrix} \cdot 10^{-15},$$

$$n_{x1} = \| X_0 - X_1 - \Delta X \| = 2{,}53 \cdot 10^{-16}.$$

Сравнивая n_x и n_{x1}, можно констатировать, что в данном примере использование алгоритма из разд. 3 позволило существенно повысить точность полученного решения.

Заключение

Предложен алгоритм построения центросимметричного и антицентросимметричного решения систем обобщенных матричных уравнений Сильвестра. Для построения этих решений предложено использовать алгоритм линейных матричных неравенств.

Рассмотрены вопросы уточнения полученных решений. Эффективность предложенных алгоритмов демонстрируется на примерах.

В.Б. Ларін

ПРО ПОБУДОВУ ЦЕНТРОСИМЕТРИЧНИХ ТА АНТИЦЕНТРОСИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ СИЛЬВЕСТРА

Запропоновано алгоритм побудови центросиметричного та антицентросиметричного розв'язку систем узагальнених матричних рівнянь Сильвестра. Для побудови цих розв'язків запропоновано використовувати алгоритм лінійних матричних нерівностей. Розглянуто питання уточнення отриманих розв'язків. Ефективність запропонованих алгоритмів демонструється на прикладах.

V.B. Larin

ON CONSTRUCTION OF THE CENTROSYMMETRIC AND ANTICENTROSYMMETRIC SOLUTIONS OF THE MATRIX SYLVESTER EQUATIONS

The methods for solving the generalized coupled Sylvester matrix equations over centrosymmetric or anticentrosymmetric matrices is offered. For construction of these solutions it is proposed to use the procedures of linear matrix inequalities. The problems of increase of the accuracy of finding solutions are considered. Efficiency of the offered algorithms is shown on the examples.

1. *Ларин В.Б.* О решении уравнения Сильвестра // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 1. — С. 29–34.
2. *Aliev F.A., Larin V.B.* On the construction of general solution of the generalized Sylvester equation // TWMS J. Appl. Eng. Math. — 2017. — **7,** N 1. — P. 1–6.
3. *Ke Y., Ma C.* The alternating direction methods for solving the Sylvester-type matrix equation $AXB + CX^{\mathrm{T}}D = E$ // Journal of Computational Mathematics. — 2017. — **35**, N 5. — P. 620–641.
4. *Lv C.-Q., Ma C.-F.* BCR method for solving generalized coupled Sylvester equations over centrosymmetric or anti- centrosymmetric matrix // Computational Mathematics with Applications. — 2018. — **75**. — P. 70–88.
5. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 193 p.
6. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI control toolbox users guide. — The MathWorks Inc., 1995. — 315 p.

Получено 08.05.2018