УДК 519.216

Т.А. Алиев, Н.Ф. Мусаева, Б.И. Газызаде

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПОМЕХИ ЗАШУМЛЕННЫХ СИГНАЛОВ

Введение

Известно, что при мониторинге, контроле, диагностике и т.д. состояния технических объектов необходимо, в первую очередь, обнаружить повреждения, дефекты, износы, коррозии, трещины, поломки на начальной стадии; определить и устранить вызвавшие их причины. После этого следует принять решение о возможности и целесообразности дальнейшей эксплуатации оборудования с учетом его технического состояния при выявленных дефектах. Затем необходимо определить динамику развития неисправности и вынести решение об организации ремонта оборудования по техническому состоянию [1].

Для решения этих проблем существует множество различных методов и средств поиска и обнаружения дефектов технических объектов [2]. Наиболее простые методы могут быть реализованы в виде таблиц, графиков, номограмм, динамограмм, осциллограмм, позволяющих оценить текущее техническое состояние объекта, идентифицировать возникновение или развитие дефектов на основании сравнения диагностических признаков [1]. Наиболее сложные методы диагностирования требуют выполнения большого количества расчетов, математического моделирования объекта, обработки большого объема информации, использования различных детерминированных, статистических, вероятностных подходов и т.д. [2].

Но при всем многообразии существующих методов следует принимать во внимание, что информация о диагностируемых процессах $X(t)$, полученная в рабочих режимах функционирования оборудования, во-первых, носит случайный характер. Во-вторых, в момент зарождения дефекта в результате появления дестабилизирующих факторов на полезный сигнал $X(t)$ накладывается случайная помеха $\mathrm{E}(t)$ [3]. Это означает, что от датчиков, установленных в информативных местах исследуемого объекта, вместо полезного случайного сигнала $X(t)$ поступает сигнал $G(t)$, зашумленный помехой $\mathrm{E}(t)$ [4–11] $G(t) = X(t) + \mathrm{E}(t)$.

При этом известно, что помехи носят случайный характер и представляют собой более высокочастотную по сравнению с полезным сигналом случайную функцию со случайной амплитудой и фазой. Кроме того, традиционно предполагают, что помеха является белым шумом и описывается нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием [12, 13].

Появление помехи создает определенные трудности для технического мониторинга, оперативного контроля и диагностики. Поэтому возникает проблема адекватного оценивания технического состояния объекта в условиях зашумленности исходной случайной информации. Для решения этой проблемы разработаны методы [4–11], которые занимают особое место среди множества других методов. Совокупность этих методов составляет принципиально новый подход решения перечисленных задач, основанный на оценке текущего технического состояния производственных объектов с использованием характеристик помехи [4–11]. В данных работах отмечено, что характеристики помехи содержат в себе полезную диагностическую информацию о возникшей анормальной ситуации. В [4–11] разработаны методы вычисления таких характеристик помехи, как дисперсия, среднеквадратическое отклонение, функция плотности распределения. Однако только этой информации недостаточно, чтобы решать перечисленные задачи, так как моменты высоких порядков помехи, которые занимают особое место среди характеристик случайных процессов, не определены.

Для вычисления характеристик помехи в теории анализа случайных процессов существуют соответствующие формулы [4]. Но для их практического применения необходимо знать дискретные значения аддитивной случайной помехи $\mathrm{E}(t)$, которую невозможно выделить из зашумленного сигнала $G(t)$. Поэтому на практике ограничиваются вычислением характеристик самого зашумленного случайного процесса $G(t)$. В рассматриваемой работе предлагается технология, которая позволяет, используя характеристики зашумленного процесса $G(t)$, вычислить моменты высоких порядков случайной помехи $\mathrm{E}(t)$.

1. Постановка задачи

На временном интервале $0 \le t \le T$ наблюдается непрерывный случайный стационарный эргодический зашумленный процесс $G(t)$, состоящий из суммы случайной полезной составляющей $X(t)$ и случайной помехи $\mathrm{E}(t)$, которые также являются стационарными эргодическими и их невозможно выделить из $G(t)$. Случайный процесс $G(t)$ несет в себе информацию об одном исследуемом технологическом параметре, например температуре, давлении, расходе и т.д. и может подчиняться различным законам распределения.

Для случайного процесса $G(t)$ можно вычислить выборочные оценки таких характеристик, как математическое ожидание m_g, дисперсия D_g, среднее квадратическое отклонение σ_g, корреляционная функция $R_{gg}(\tau)$ по формулам:

$$m_g = \frac{1}{T}\int_0^T G(t)\,dt, \tag{1}$$

$$D_g = \frac{1}{T}\int_0^T (G(t) - m_g)^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{G}{}^2(t)\,dt, \tag{2}$$

$$\sigma_g = \sqrt{D_g}, \tag{3}$$

$$R_{gg}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+\tau)\,dt, \tag{4}$$

где $\overset{\circ}{G}(t) = G(t) - m_g$, m_g — математическое ожидание $G(t)$, $\tau = 0,\ \Delta t,\ 2\Delta t,\ 3\Delta t,\ \ldots$ — временно́й сдвиг.

При этом полезная составляющая $X(t)$ оценивает текущее состояние исследуемого процесса. В то же время априори известно, что в системе мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, управления, идентификации и т.д. помеха появилась в результате возникновения дефектов, неисправностей, неполадок и т.д. При этом начальные $\nu_{\varepsilon q}$ и центральные $\mu_{\varepsilon q}$ моменты q-го порядка стационарной эргодической помехи можно вычислить соответственно по выражениям [12–14]

$$\nu_{\varepsilon q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q f(\varepsilon)\,d\varepsilon, \tag{5}$$

$$\mu_{\varepsilon q} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon - m_\varepsilon)^q f(\varepsilon)\,d\varepsilon, \tag{6}$$

$f(\varepsilon)$ — функция плотности распределения помехи.

При этом известно, что начальный момент первого порядка — математическое ожидание m_ε, центральный момент второго порядка — дисперсия D_ε помехи $\mathrm{E}(t)$, среднеквадратическое отклонение помехи [14]:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon}. \tag{7}$$

Среди моментов высоких порядков особое значение имеют центральные моменты третьего и четвертого порядков $\mu_{\varepsilon 3}$, $\mu_{\varepsilon 4}$. Это связано с тем, что нормированный центральный момент третьего порядка используется для характеристики скошенности или асимметрии распределения (коэффициент асимметрии A_ε). Нормированный центральный момент четвертого порядка используется для характеристики островершинности или плосковершинности распределения (эксцесс E_ε) [2, 14].

Однако формулы (5)–(7) непригодны для практического применения, так как аналитическое выражение функции плотности распределения помехи неизвестно. В то же время известно, что среди всех случайных помех особое место занимает шум с нормальным распределением. Поэтому традиционно предполагают, что помеха подчинена нормальному закону распределения $N(\varepsilon; m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ и имеет нулевое среднее $m_\varepsilon = 0$ [12–14]. У таких помех вероятность того, что амплитуда выброса превысит значение утроенной величины среднеквадратического отклонения, мала. Так как стационарная случайная помеха $\mathrm{E}(t)$ является эргодической, ее математическое ожидание m_ε и среднеквадратическое отклонение σ_ε имеют одно и то же значение для любой из случайных функций, входящих в совокупность. Поэтому функцию плотности нормального распределения $N(\varepsilon; m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) = \, = N(\varepsilon)$ помехи представим в виде

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon - m_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}. \tag{8}$$

С учетом условия $m_\varepsilon = 0$ получаем

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}. \tag{9}$$

Тогда очевидно, что начальные и центральные моменты высоких порядков помехи будут совпадать и их можно вычислить по выражению

$$\nu_{\varepsilon q} = \mu_{\varepsilon q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q N(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{10}$$

При этом известно, что коэффициенты асимметрии A_ε и эксцесса E_ε, а также нечетные центральные моменты нормального распределения равны нулю [14]. Однако четные моменты помехи — достаточно чувствительные индикаторы изменения технического состояния промышленного объекта, особенно на начальном этапе зарождения дефекта. Поэтому ниже предлагаются алгоритмы вычисления моментов высоких порядков помехи $\mathrm{E}(t)$. Из формулы (10) очевидно, что для вычисления моментов высоких порядков помехи, в первую очередь, необходимо определить функцию плотности распределения $N(\varepsilon)$ помехи $\mathrm{E}(t)$.

2. Технология вычисления функции плотности распределения помехи зашумленного сигнала

Известно, что нормальное распределение $N(\varepsilon)$ помехи $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$ характеризуется двумя параметрами: математическим ожида-

 ISSN 0572-2691

нием m_ε и среднеквадратическим отклонением $\sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon}$ (или корнем квадратным из дисперсии). Так как помеха $\mathrm{E}(t)$ распределена по нормальному закону с нулевым средним $m_\varepsilon = 0$, задача сводится к вычислению только параметра σ_ε. Вычислим сначала момент второго порядка — дисперсию D_ε. Для этого воспользуемся выражением (4) для вычисления корреляционной функции $R_{gg}(\tau)$ зашумленного сигнала $G(t)$.

Учитывая, что полезный сигнал $X(t)$ и помеха $\mathrm{E}(t)$ некоррелированы, т.е.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{X}(t)\,\mathrm{E}(t+\tau)\,dt = 0,\ \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{E}(t)\,\overset{\circ}{X}(t+\tau)\,dt = 0, \tag{11}$$

можно написать:

$$R_{gg}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+\tau)\,dt = R_{xx}(\tau) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau). \tag{12}$$

Таким образом, корреляционная функция $R_{gg}(\tau)$ зашумленного сигнала $G(t)$ состоит из суммы корреляционных функций $R_{xx}(\tau)$ и $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$ соответственно полезного сигнала $X(t)$ и помехи $\mathrm{E}(t)$.

При этом на практике для таких инфранизкочастотных медленно протекающих технологических процессов, как нефтепереработка, нефтехимия, когда $\tau = \Delta t$ значительно (многократно) мало по сравнению с временем наблюдения T, помеха $\mathrm{E}(t)$ формируется из высокочастотных спектров в результате возникновения таких неисправностей, как износ, коррозия, нагарообразование и т.д. и имеет более высокий спектр, чем сама полезная составляющая $X(t)$. Значение же полезной составляющей за промежуток времени Δt не успевает измениться, и $X(t+\Delta t)$ совпадает со значением $X(t)$, т.е.

$$X(t+\Delta t) = X(t). \tag{13}$$

Это равенство выполняется для случаев, когда T составляет, например, 10–20 ч, а Δt — секунды или минуты (в зависимости от специфики исследуемого процесса). В этом случае шаг дискретизации Δt выбирается, исходя из спектра помехи $\mathrm{E}(t)$, а не полезной составляющей $X(t)$, т.е. $\Delta t = 1/(2f_\varepsilon)$, где f_ε — частота среза помехи.

Очевидно, что такое строгое равенство справедливо не для всех реальных процессов, а для таких как нефтепереработка, нефтехимия. Для остальных технологических процессов допустимо приближенное равенство. Тогда для указанных производственных объектов при выполнении условия (13) отношение $\dfrac{R_{xx}(\Delta t)}{R_{xx}(0)}$ равно единице, т.е. $R_{xx}(\Delta t) = R_{xx}(0)$.

В то же время в силу того, что для случайного процесса $G(t)$ шаг дискретизации Δt выбран, исходя из спектра помехи, корреляционную функцию $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$ можно представить в виде [4–11]

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) = \begin{cases} R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau) & \text{при } \tau = 0, \\ 0 & \text{при } \tau \geq \Delta t. \end{cases} \tag{14}$$

Поэтому если по формуле (4) вычислить оценки корреляционной функции $R_{gg}(\tau)$ зашумленного сигнала при $\tau = 0$ и достаточно малом по сравнению с временем наблюдения T временном интервале $\tau = \Delta t$ и найти их разницу, то получим

$$R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t) = R_{\varepsilon\varepsilon}(0). \tag{15}$$

Тогда оценку момента второго порядка — дисперсии D_{ε}^{*} помехи $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$ можно вычислить:

$$D_{\varepsilon}^{*} = R_{\varepsilon\varepsilon}(0) = R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t) \tag{16}$$

или

$$D_{\varepsilon}^{*} = R_{\varepsilon\varepsilon}^{*}(\tau = 0) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t)\,dt - \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+\Delta t)\,dt. \tag{17}$$

Таким образом, момент второго порядка (дисперсию) D_{ε}^{*} помехи $\mathrm{E}(t)$ можно вычислить, определив разность оценок автокорреляционной функции $R_{gg}(\tau)$ зашумленного сигнала при нулевом $\tau = 0$ и достаточно малом $\tau = \Delta t$ временном сдвиге, выбранном, исходя из частотной полосы спектра помехи. Однако в ранних работах [4–11] была выведена более общая формула вычисления момента второго порядка (дисперсии) помехи для реальных технологических процессов:

$$D_{\varepsilon}^{*} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t)\,dt - 2\frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+\Delta t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+2\Delta t)\,dt. \tag{18}$$

Отсюда следует, что дисперсию D_{ε}^{*} помехи $\mathrm{E}(t)$ можно вычислить для идеального и реального случаев соответственно по выражениям [4–11]:

$$D_{\varepsilon}^{*} = \begin{cases} D1_{\varepsilon}^{*} & \text{для идеального случая,} \\ D2_{\varepsilon}^{*} & \text{для реального случая,} \end{cases} \tag{19}$$

где

$$D1_{\varepsilon}^{*} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t)\,dt - \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+\Delta t)\,dt,$$

$$D2_{\varepsilon}^{*} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t)\,dt - 2\frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+\Delta t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \overset{\circ}{G}(t)\overset{\circ}{G}(t+2\Delta t)\,dt.$$

Естественно, что тогда среднеквадратическое отклонение σ_{ε}^{*} помехи $\mathrm{E}(t)$ будет определяться по выражению [4–11]:

$$\sigma_{\varepsilon}^{*} = \begin{cases} \sqrt{D1_{\varepsilon}^{*}} & \text{для идеального случая,} \\ \sqrt{D2_{\varepsilon}^{*}} & \text{для реального случая.} \end{cases} \tag{20}$$

ISSN 0572-2691

В этом случае функцию плотности нормального распределения $N(\varepsilon, m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ помехи $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$ с математическим ожиданием $m_\varepsilon = 0$ с учетом формулы (9) можно найти по выражению [8–11]:

$$N^*(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D_\varepsilon^*}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D_\varepsilon^*}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D1_\varepsilon^*}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D1_\varepsilon^*}} & \text{для идеального случая,} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D2_\varepsilon^*}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D2_\varepsilon^*}} & \text{для реального случая.} \end{cases} \quad (21)$$

3. Алгоритм вычисления моментов высоких порядков помехи зашумленного сигнала

Ниже покажем, как, используя выражение (21) функции плотности распределения $N^*(\varepsilon)$, вычислить моменты высоких порядков помехи $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$. Однако следует отметить, что согласно постановке задачи начальный момент первого порядка, т.е. математическое ожидание m_ε помехи $\mathrm{E}(t)$ равно нулю $m_\varepsilon = 0$. Следовательно, начальные и центральные моменты помехи $\mathrm{E}(t)$ совпадают. Второй момент, т.е. дисперсия помехи D_ε^* вычисляется по выражению (19).

С учетом формулы (10) в общем виде получаем следующее выражение для вычисления моментов помехи $\mathrm{E}(t)$:

$$\nu_{\varepsilon q}^* = \mu_{\varepsilon q}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q N^*(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

или согласно формуле (21) вычисления функции плотности распределения помехи имеем

$$\nu_{\varepsilon q}^* = \mu_{\varepsilon q}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D_\varepsilon^*}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D_\varepsilon^*}} d\varepsilon. \quad (22)$$

Подставляя в это выражение значения момента второго порядка D_ε^* и среднеквадратического отклонения σ_ε^* из формул (19), (20), получаем:

$$\nu_{\varepsilon q}^* = \mu_{\varepsilon q}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D_\varepsilon^*}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D_\varepsilon^*}} d\varepsilon =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D1_\varepsilon^*}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D1_\varepsilon^*}} & \text{для идеального случая,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D2_\varepsilon^*}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D2_\varepsilon^*}} & \text{для реального случая.} \end{cases} \quad (23)$$

4. Технология вычисления моментов высокого порядка помехи зашумленного сигнала

Пусть от датчика, размещенного в зоне действия влияющих на объект факторов и воспринимающего цифровую информацию от этого объекта, поступает зашумленный цифровой сигнал $G(t)$, состоящий из полезного сигнала $X(\Delta t)$ и аддитивной помехи $\mathrm{E}(\Delta t)$. Сигнал $G(\Delta t)$ дискретизирован шагом Δt, выбранным в соответствии с условием $\Delta t = 1/(2f_\varepsilon)$, где f_ε — частота среза помехи. Тогда интервал времени T состоит из N весьма малых интервалов Δt, т.е. $T = N \cdot \Delta t$, и сигнал $X(t)$ мало изменяется на протяжении интервала $t + \Delta t$. Если придать t и τ дискретные значения, кратные Δt , т.е. $t = \nu \cdot \Delta t$, ν = 1, 2, ...; $\tau = \mu \cdot \Delta t$, μ = 0, 1, ..., и для оценок корреляционных функций ввести обозначения $R_{gg}(\mu\Delta t) = R_{gg}(\mu)$; $R_{xx}(\mu\Delta t) = R_{xx}(\mu)$, $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu\Delta t) = R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$, то алгоритм вычисления моментов высоких порядков $\mu^*_{\varepsilon q}$ помехи $\mathrm{E}(t)$ представляется следующим образом.

1. Вычисляются оценки автокорреляционной функции зашумленного сигнала при $\mu = 0$, Δt , $2\Delta t$:

$$R_{gg}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{G}(i\Delta t)\overset{\circ}{G}(i\Delta t),$$

$$R_{gg}(\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{G}(i\Delta t)\overset{\circ}{G}((i+1)\Delta t),$$

$$R_{gg}(2\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{G}(i\Delta t)\overset{\circ}{G}((i+2)\Delta t),$$

$\overset{\circ}{G}(t) = G(t) - m_g$; $m_g = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(i\Delta t)$ — математическое ожидание $G(t)$.

2. Вычисляется дисперсия помехи $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$:

$$D^*_\varepsilon = \begin{cases} R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t) & \text{для идеального случая,} \\ R_{gg}(0) - 2R_{gg}(\Delta t) + R_{gg}(2\Delta t) & \text{для реального случая.} \end{cases} \tag{24}$$

3. Вычисляется среднеквадратическое отклонение помехи $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$:

$$\sigma^*_\varepsilon = \sqrt{D^*_\varepsilon} = \begin{cases} \sqrt{R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t)} & \text{для идеального случая,} \\ \sqrt{R_{gg}(0) - 2R_{gg}(\Delta t) + R_{gg}(2\Delta t)} & \text{для реального случая.} \end{cases}$$

4. Учитывая, что $m_\varepsilon = 0$ и для нормально распределенного случайного параметра отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не превышает утроенного среднеквадратического отклонения, дискретные значения функции плотности распределения $N^*(\varepsilon)$ помехи $\mathrm{E}(t)$ вычисляются в интервале $\pm 3\sigma^*_\varepsilon$, т.е. при $-3\sigma^*_\varepsilon \le \mathrm{E}(t) \le +3\sigma^*_\varepsilon$. Для этого:

— вычисляются минимальное и максимальное значения $\mathrm{E}(t)$: $\varepsilon_{\min} = -3\sigma^*_\varepsilon$; $\varepsilon_{\max} = +3\sigma^*_\varepsilon$;

— задается с определенным шагом $\Delta\varepsilon$ последовательность возможных значений $\mathrm{E}(t)$ в порядке возрастания от $\varepsilon_{\min}$ до $\varepsilon_{\max}$: $\varepsilon(1) = \varepsilon_{\min}$, $\varepsilon(i+1) = \varepsilon(i) + \Delta\varepsilon$, …, $\varepsilon_{\max}$;

— формируется последовательность возможных значений помехи $\varepsilon(1)$, $\varepsilon(2)$, $\varepsilon(3)$, $\varepsilon(4)$, …, $\varepsilon_{\max}$, для которой выполняется условие $\varepsilon(i-1) < \varepsilon(i)$.

Затем в точках $\varepsilon(1)$, $\varepsilon(2)$, $\varepsilon(3)$, $\varepsilon(4)$, …, $\varepsilon_{\max}$ вычисляется функция плотности нормального распределения:

$$N^*(\varepsilon(i)) = \frac{1}{\sigma^*_\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon(i))^2}{2(\sigma^*_\varepsilon)^2}}.$$

5. Выбирается значение порядка q = 4, 6, 8, …, и с учетом формулы (23) вычисляются моменты высоких порядков по выражениям:

$$\nu^*_{\varepsilon 4} = \mu^*_{\varepsilon 4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D^*_\varepsilon}} d\varepsilon =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D1^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D1^*_\varepsilon}} & \text{для идеального случая,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D2^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D2^*_\varepsilon}} & \text{для реального случая;} \end{cases} \quad (25)$$

$$\nu^*_{\varepsilon 6} = \mu^*_{\varepsilon 6} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^6 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D^*_\varepsilon}} d\varepsilon =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^6 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D1^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D1^*_\varepsilon}} & \text{для идеального случая,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^6 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D2^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D2^*_\varepsilon}} & \text{для реального случая;} \end{cases} \quad (26)$$

$$\nu^*_{\varepsilon 8} = \mu^*_{\varepsilon 8} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^8 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D^*_\varepsilon}} d\varepsilon =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^8 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D1^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D1^*_\varepsilon}} & \text{для идеального случая,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^8 \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D2^*_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D2^*_\varepsilon}} & \text{для реального случая} \end{cases} \quad (27)$$

и т.д.

5. Технология проведения вычислительных экспериментов

Для проверки достоверности алгоритма вычисления моментов высоких порядков $\mu^*_{\varepsilon q}$, $\nu^*_{\varepsilon q}$ помехи $\mathrm{E}(t)$ зашумленного сигнала $G(t)$ проведены вычислительные эксперименты с использованием средств компьютерной математики MATLAB и MATCAD.

Сначала формировался полезный сигнал $X(t)$. Известно, что любой стационарный случайный процесс $X(t)$ на бесконечном интервале T можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией гармонических колебаний со случайной амплитудой и фазой [15]. В общем виде совокупность функций [15]

$$X_k(t) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(a_{\nu k}\cos\left(\frac{2\pi\nu}{T}t + \varphi_{1\nu k}\right) + b_{\nu k}\sin\left(\frac{2\pi\nu}{T}t + \varphi_{2\nu k}\right)\right)$$

характеризует случайный процесс, если известны распределения вероятности коэффициентов $a_{\nu k}$, $b_{\nu k}$ и фаз $\varphi_{\nu k}$, $\varphi_{1\nu k}$, $\varphi_{2\nu k}$. Поэтому при проведении вычислительных экспериментов формировались полезные сигналы $X(t)$ в виде суммы гармонических колебаний с различными законами распределения [15]. Допускалось, что полезный сигнал — стационарный эргодический процесс и $X(t)$ — одна из его реализаций.

С помощью генератора случайных чисел формировалась нормально распределенная помеха $\mathrm{E}(i\Delta t)$ с различными заданными значениями параметров распределения $m_\varepsilon = 0$, $\sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon}$. Предполагалось, что это — истинная помеха. Формировались зашумленные сигналы $G(i\Delta t) = X(i\Delta t) + \mathrm{E}(i\Delta t)$. Суть экспериментов сводилась к тому, что вычислялись моменты высоких порядков помехи по разработанным алгоритмам (24)–(27) с использованием значений сформированного зашумленного сигнала $G(i\Delta t)$. Полученные значения моментов высоких порядков сравнивались со значениями моментов, которые были вычислены с помощью сгенерированных дискретных значений помехи $\mathrm{E}(i\Delta t)$. Затем проводился сравнительный анализ. Для этого были определены величины относительных погрешностей моментов высоких порядков по выражению $\Delta\mu_{\varepsilon q} = \left|\mu_{\varepsilon q} - \mu^*_{\varepsilon q}\right| / \left|\mu_{\varepsilon q}\right| \cdot 100\,\%$.

6. Результаты вычислительных экспериментов и сравнительного анализа

Ниже приводятся результаты одного из множества проведенных вычислительных экспериментов. Смоделирован полезный случайный сигнал

$$X(t) = 22\cdot\cos\left(2\pi\frac{(k\cdot 0{,}52)^{n1}}{T} + \varphi_1\right) + 27\cdot\sin\left(2\pi\frac{(k\cdot 1{,}51)^{n2}}{T} + \varphi_2\right) + 100$$

в виде возмущенной гармонической дискретной функции с амплитудами и начальными фазами φ_1, φ_2, которые имеют равномерное распределение вероятностей (или с равномерной плотностью вероятности); где $k \in [0, K]$, K = 2400, — показатели степеней $n1$ = 0,54, $n2$ = 1,54; период сигнала $T = 800$; амплитуды задаются в виде asi1 = rand(size(k)); asi2 = rand(size(k)); начальные фазы φ_1, φ_2 — в виде ksi1 = rand(size(k)) * pi / 3; ksi2 = rand(size(k))*pi/3 [15].

Помеха $\mathrm{E}(t)$ подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $m_\varepsilon \approx 0{,}3735$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma_\varepsilon \approx 28{,}0545$.

 ISSN 0572-2691

Результаты вычислений представлены в таблице.

Таблица

№ п/п		Заданные характеристики	Вычисленные характеристики	Относительные погрешности, %
1	Математическое ожидание (начальный момент первого порядка)	$\nu_{\varepsilon 1} = m_{\varepsilon} \approx 0{,}3735$	$m_{\varepsilon}^{*} = 0$ (по предположению)	
2	Среднеквадратическое отклонение	$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{D_{\varepsilon}} = 28{,}0545$	$\sigma_{\varepsilon}^{*} = \sqrt{D_{\varepsilon}^{*}} = 28{,}1247$	$\Delta\sigma_{\varepsilon} = 0{,}25$
3	Дисперсия	$D_{\varepsilon} = \mu_{\varepsilon 2} = 787{,}055$	$D_{\varepsilon}^{*} = \mu_{\varepsilon 2}^{*} = 790{,}1$	$\Delta D_{\varepsilon} =$ $= 0{,}50108$
4	Момент 4-го порядка	$\mu_{\varepsilon 4} = 1858366{,}58$	$\mu_{\varepsilon 4}^{*} = 1877037{,}07$	$\Delta\mu_{\varepsilon 4} =$ $=1{,}00467$
5	Момент 6-го порядка	$\mu_{\varepsilon 6} = 7313183261{,}11$	$\mu_{\varepsilon 6}^{*} = 7423669873{,}03$	$\Delta\mu_{\varepsilon 6} =$ $= 1{,}51079$
6	Момент 8-го порядка	$\mu_{\varepsilon 8} =$ $= 40291140638048{,}47$	$\mu_{\varepsilon 8}^{*} =$ $41104795134549{,}99$	$\Delta\mu_{\varepsilon 8} =$ $=2{,}01944$

В результате анализа полученных результатов сделаны следующие выводы.

1. Во всех экспериментах заданные σ_{ε} и вычисленные σ_{ε}^{*} оценки среднеквадратических отклонений помех практически совпадают (см. таблицу, стр. 2): $\sigma_{\varepsilon} \approx \sigma_{\varepsilon}^{*}$ или $\sqrt{D_{\varepsilon}} \approx \sqrt{D_{\varepsilon}^{*}}$ и величина относительной погрешности $\Delta\sigma_{\varepsilon}$ составляет 0,25 %.

2. Во всех экспериментах заданные D_{ε} и вычисленные D_{ε}^{*} по формуле (16), (17), оценки дисперсий (центральных моментов второго порядка) помех практически совпадают (см. таблицу, стр. 3): $D_{\varepsilon} \approx D_{\varepsilon}^{*}$ и величина относительной погрешности ΔD_{ε} составляет 0,5 %.

3. Во всех экспериментах момент четвертого порядка $\mu_{\varepsilon 4}$, вычисленный по традиционной формуле (6), и момент четвертого порядка $\mu_{\varepsilon 4}^{*}$, вычисленный по формуле (25), практически совпадают (см. таблицу, стр. 4): $\mu_{\varepsilon 4} \approx \mu_{\varepsilon 4}^{*}$ и величина относительной погрешности $\Delta\mu_{\varepsilon 4}$ составляет 1,00467 %.

4. Во всех экспериментах момент шестого порядка $\mu_{\varepsilon 6}$, вычисленный по традиционной формуле (6), и момент четвертого порядка $\mu_{\varepsilon 6}^{*}$, вычисленный по формуле (26), практически совпадают (см. таблицу, стр. 5): $\mu_{\varepsilon 6} \approx \mu_{\varepsilon 6}^{*}$ и величина относительной погрешности $\Delta\mu_{\varepsilon 6}$ составляет 1,51079 %.

5. Во всех экспериментах момент восьмого порядка $\mu_{\varepsilon 8}$, вычисленный по традиционной формуле (6), и момент восьмого порядка $\mu_{\varepsilon 8}^{*}$, вычисленный по формуле (27), практически совпадают (см. таблицу, стр. 6): $\mu_{\varepsilon 8} \approx \mu_{\varepsilon 8}^{*}$ и величина относительной погрешности $\Delta\mu_{\varepsilon 8}$ составляет 2,01944 %.

Таким образом, вычислительные эксперименты показали, что моменты высоких порядков помехи, вычисленные с использованием разработанной технологии, практически совпадают.

Заключение

Экспериментально установлено, что моменты высоких порядков помехи очень чувствительны к развивающимся неисправностям технических объектов. Поэтому они могут успешно использоваться в системах мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, управления, идентификации и т.д. В целом же совокупность таких статистических характеристик, как функция плотности распределения, начальные и центральные моменты помехи дают достаточно информации о начальном этапе возникновения и динамике развития дефектов и, таким образом, о состоянии исследуемой системы в целом [4–11, 16].

Т.А. Алієв, Н.Ф. Мусаєва, Б.І. Газизаде

АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ МОМЕНТІВ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ЗАВАДИ ЗАШУМЛЕНИХ СИГНАЛІВ

Розроблено алгоритми, що дозволяють за дискретними значеннями сигналу, спотвореного адитивною випадковою завадою, обчислити оцінки високих порядків статистичних характеристик завади. Проведено обчислювальні експерименти. Показано, що ці характеристики завади можна використовувати в системах моніторингу, контролю, діагностики, прогнозу, ідентифікації і т.п. для виявлення початкового періоду зародження дефекту і визначення динаміки його розвитку.

T.A. Aliev, N.F. Musaeva, B.I. Gazizade

ALGORITHMS FOR CALCULATING HIGH-ORDER MOMENTS OF THE NOISE OF NOISY SIGNALS

Algorithms have been developed that allow one to calculate estimates of high orders of statistical characteristics of the noise from the discrete values of the signal distorted by an additive random noise. Computational experiments have been conducted. It has been shown that these noise characteristics can be used in systems of monitoring, control, diagnostics, forecasting, identification, etc. to identify the initial period of the defect generation and determine its development dynamics.

1. *Проблемы* создания систем технической диагностики турбоагрегатов. — www.turbinist.ru/28 problemy sozdanija sistem tekhnicheskojj.html.
2. *Биргер И.А.* Техническая диагностика. — М. : Машиностроение, 1972. — 238 с.
3. *Золин А.Г.* Разработка алгоритмов решения обратных задач промышленной диагностики аппроксимационным методом: Автореф. дис. … канд. техн. наук. — Самара, 2010. — 104 с.
4. *Musaeva N.F.* Robust correlation coefficients as the initial data for the solution of problems of confluent analysis // Automatic Control and Computer Sciences. — 2007. — **41**, N 2. — P. 76–87.
5. *Musaeva N.F.* Robust method of estimation with «contaminated» coarse errors // Ibid. — 2003. — **37**, N 6. — P. 50–63.
6. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Suleymanova M.T., Gazizade B.I.* Analytic representation of the density function of normal distribution of noise // Journal of Automation and Information Sciences. — 2015. — **47**(8), N 4. — P. 24–40.
7. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Suleymanova M.T., Gazizade B.I.* Technology for calculating the parameters of the density function of normal distribution of the useful component in a noisy process // Ibid. — 2016. — **48**, N 4. — P. 35–55.
8. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Suleymanova M.T., Gazizade B.I.* Digital algorithms for calculating the differential function of normal distribution of noise // National Academy of Sciences of Azerbaijan. Reports. — 2016. — **72**, N 1. — P. 18–22.
9. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Suleymanova M.T., Gazizade B.I.* Sensitive algorithms for identifying the degree of fault growth in sucker rod pumping units // Mechatronics, Automation, Control. — 2017. — **18**, N 2. — P. 94–102.
10. *Aliev T.A., Musaeva N.F.* An algorithm for eliminating microerrors of noise in the solution of statistical dynamics problems // Automation and Remote Control. — 1998. — **59**(2), N 5. — P. 679–688.
11. *Aliev T.A., Musaeva N.F., Sattarova U.E.* Robust technologies for calculating normalized correlation functions // Cybernetics and Systems Analysis. — 2010. — **46**, N 1. — P. 153–166.
12. *Техническая* кибернетика. Кн. 2 / Под ред. В.В. Солодовникова. — М. : Машиностроение, 1967. — 682 с.
13. *Солодовников В.В., Матвеев П.С., Вальденберг Ю.С., Бабурин В.М.* Вычислительная техника в применении для статистических исследований и расчетов систем автоматического управления. — М. : Машиностроение, 1963. — 167 с.
14. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — 5-е изд. — М. : КНОРУС, 2013. — 448 с.
15. *Сулейманова М.Т.* Разработка алгоритмов вычисления дискретных значений функции плотности распределения помехи и проведения вычислительных экспериментов // Transaction of Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences: Informatics and Control Problems. — 2017. — **37**, N 3. — P. 736–754.
16. *Abbasov A.M., Mamedova M.H., Orujov G.H.Aliyev H.B.* Synthesis of the methods of subjective knowledge representations in problems of fuzzy pattern recognition // Mechatronics. — 2001. — N 11. — P. 439–449.

Получено 26.12.2017