https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.018
УДК 517.53

В.В. Савчук [1], https://orcid.org/0000-0002-6713-4471
М.В. Савчук [2]

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] НТУ України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського"
E-mail: savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

Екстремальна задача для інваріантних диференціальних операторів на класі інтегралів типу Коші

Представлено членом-кореспондентом НАН України О.А. Бойчуком

Диференціальні оператори $D_1(f)(z)=(1-|z|^2)\partial f(z)/\partial z$ і $D_2(f)=D_1^2(f)$ на просторі голоморфних функцій в одиничному крузі $\mathbb{D}$ є інваріантними відносно композицій голоморфних функцій з дробово-лінійними функціями. Вони природним чином виникають у дослідженнях голоморфних функцій із класу Блоха $\mathcal{B}$, який відіграє важливу роль в геометричній теорії функцій комплексної змінної. Відомо, що образи операторів $|D_j(f)|$, $j=1,2$, є ліпшицевими функціями відносно псевдогіперболічної метрики $\rho(z,w)$ в одиничному крузі, а саме $\sup\limits_{f\in\mathcal{B}}\big||D_1(f)(z)|-|D_1(f)(w)|\big|/\rho(z,w)=3\sqrt{3}/2$. У даній роботі розв'язано екстремальну задачу про точне значення величини $\sup_f|D_1(f)(z)-D_2(f)(w)|/\rho(z,w)$, коли f пробігає клас інтегралів типу Коші, який, як добре відомо, є підкласом функцій Блоха.

Ключові слова: *голоморфна функція, псевдогіперболічна метрика, клас Блоха, інтеграл типу Коші, BMOA, екстремальна задача.*

Нехай f — функція, голоморфна в одиничному крузі $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. Розглянемо диференціальні оператори D_1 і D_2, які діють на функцію f за правилом

$$D_1(f)(z)=(1-|z|^2)f'(z),$$

$$D_2(f)(z)=(1-|z|^2)^2 f''(z)-2\overline{z}(1-|z|^2)f'(z).$$

Якщо $z\in\mathbb{D}$ і

$$\mu_z(t):=\frac{t-z}{1-t\overline{z}}$$

Ц и т у в а н н я: Савчук В.В., Савчук М.В. Екстремальна задача для інваріантних диференціальних операторів на класі інтегралів типу Коші. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 4. С. 18—23. https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.018

— перетворення Мебіуса, то $D_j(f)(z) = (f \circ \mu_{-z})^{(j)}(0)$ для $j = 1, 2$. До того ж ці диференціальні оператори є інваріантними в такому сенсі:

$$\left|D_j(S \circ f \circ \mu_z)\right| = \left|D_j(f)\right| \circ \mu_z, \quad j = 1, 2,$$

де $S(z) = a + bz$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|b| = 1$. Зрозуміло також, що образи $\left|D_j(f)\right|$ — це субгармонічні функції в крузі $\mathbb{D}$.

Оператори D_1 і D_2 вивчалися в [1, 2] на предмет їх застосувань до голоморфних функцій із класу Блоха $\mathcal{B}$. Нагадаємо, що так називається клас голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left|D_1(f)(z)\right| \leqslant 1.$$

Зокрема, в [2] доведено, що для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$\max_{f \in \mathcal{B}} \left|D_2(f)(z)\right| = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

а максимум при даному z досягається тільки для функцій вигляду $f = \lambda\mu_z^2 + c$ де $\lambda = \mathrm{const}$, $|\lambda| = 3\sqrt{3}/2$ і $c \in \mathbb{C}$.

У [3] показано, що звуження оператора $|D_1|$ на клас $\mathcal{B}$ породжують ліпшицеві функції відносно псевдогіперболічної метрики

$$\rho(z, w) := \left|\frac{z - w}{1 - z\overline{w}}\right|,$$

тобто якщо $f \in \mathcal{B}$, то для будь-яких $z, w \in \mathbb{D}$

$$\left|\left|D_1(f)(z)\right| - \left|D_1(f)(w)\right|\right| \leqslant C\rho(z, w),$$

де C – абсолютна константа (ліпшицева). Зокрема, в [3] показано, що $C \leqslant 3{,}31$. Точне значення C (найменша константа серед усіх таких можливих) знайдене в [4]: $C = 3\sqrt{3}/2$.

Оскільки

$$\left|\left|D_1(f)(z)\right| - \left|D_1(f)(w)\right|\right| \leqslant \left|D_1(f)(z) - D_1(f)(w)\right|,$$

то природно виникає питання: чи будуть значення оператора D_1 на класі $\mathcal{B}$ або на якихось його підкласах ліпшицевими функціями відносно псевдогіперболічної метрики та з якою ліпшицевою константою?

У даній роботі ми частково відповідаємо на це питання, даючи розв'язки екстремальних задач про точні значення та екстремальні функції для величин

$$A(z, w) := \begin{cases} \sup\limits_{f \in \mathcal{K}} \dfrac{\left|D_1(f)(z) - D_1(f)(w)\right|}{\rho(z, w)}, & z \neq w, \\ \sup\limits_{f \in \mathcal{K}} \left|D_2(f)(z)\right|, & z = w, \end{cases}$$

і

$$B(z,w):=\sup_{f\in\mathcal{K}}\frac{\left\|D_1(f)(z)\right|-\left|D_1(f)(w)\right\|}{\rho(z,w)},\ \ z\neq w.$$

Функції f, для яких досягаються відповідні точні межі в $A(z,w)$ і $B(z,w)$, називаються екстремальними.

Зауважимо, що для будь-якого $z\in\mathbb{D}$

$$|D_2(f)(z)|=(1-|z|^2)\left|\frac{\partial}{\partial z}D_1(f)(z)\right|=\lim_{w\to z}\frac{|D_1(f)(z)-D_1(f)(w)|}{\rho(z,w)}.$$

Тому $A(z,w)\to A(z,z)$ при $w\to z$, що підтверджує коректність означення величини $A(z,w)$.

У ролі $\mathcal{K}$ розглянемо клас голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f, що зображуються інтегралами типу Коші

$$f(z)=C(\varphi)(z):=\int_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(t)}{1-\overline{t}z}dm(t),$$

зі щільностями $\varphi:\mathbb{T}\to\hat{\mathbb{C}}$, для яких

$$\operatorname{dist}(\varphi,\overline{H^\infty(\mathbb{T})}):=\inf_{h\in H^\infty(\mathbb{T})}\left\|\varphi+\overline{h}_\infty\right\|\leqslant 1,$$

де $\mathrm{H}^\infty(T)$ — простір вимірних на $\mathbb{T}$, істотно обмежених функцій $h:\mathbb{T}\to\hat{\mathbb{C}}$, що задовольняють умови

$$\int_{\mathbb{T}}h(t)t^k dm(t)=0,\ k=1,2,\ldots,$$

наділений нормою $\varphi_\infty=\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{T}}|\varphi(t)|$ і dm — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}:=\{t\in\mathbb{C}:|t|=1\}$.

Зауважимо, що $\mathcal{K}$ — це клас функцій з простору BMOA (див., наприклад, [5], теорема 7.2), що складається з голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,\ \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<\infty$, які задовольняють умову

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\int_T\left|f\circ\mu_z(t)-f(z)\right|^2dm(t)<\infty.$$

Легко бачити, що для будь-якої функції $f\in\mathcal{K}, f=C(\varphi)$, і $z\in\mathbb{D}$ справджуються співвідношення

$$|f'(z)|=\left|\int_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(t)\overline{t}}{(1-\overline{t}z)^2}dm\,(t)\right|\leqslant\operatorname{dist}(\varphi,\overline{H^\infty(\mathbb{T})})\int_{\mathbb{T}}\frac{1}{|1-\overline{t}z|^2}dm(t)\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}.$$

Отже, $\mathcal{K}\subset\mathcal{B}$. З іншого боку, як це показано в [6] (див. також [5], теорема 9.13), у класі $\mathcal{B}$ існують функції, які належать просторам Гарді H^p при усіх $p>0$, але які не належать до простору BMOA, а отже, не можуть бути зображені інтегралами типу Коші. Тому розв'язки наших задач, взагалі кажучи, не можуть міститися у вищенаведених твердженнях.

Основними результатами роботи є такі теореми.

Теорема 1. *Нехай* $(z, w) \in \mathbb{D}^2 := \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ *і* $\arg z = \arg w$. *Тоді* $A(z, w) = 2$, *а екстремальними є виключно функції вигляду* $f = \lambda \mu_z \mu_w$, *де* $\lambda = \mathrm{const}$, $|\lambda| = 1$.

Теорема 2. *Виконується рівність*

$$\sup_{(z, w) \in \mathbb{D}^2, \ z \neq w} B(z, w) = 2.$$

Екстремальними є функції $f(t) = \lambda t^2$, *де* $\lambda = \mathrm{const}$, $|\lambda| = 1$, *а точна верхня межа відносно* $(z, w) \in \mathbb{D}^2$, $z \neq w$, *досягається на будь-якій послідовності точок* $(z_n, 0) \in \mathbb{D}^2$, *такій, що* $z_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Наведемо схему доведення цих тверджень.

Вихідною точкою є така лема, не позбавлена й самостійного інтересу.

Лема 1. *Нехай* $f \in \mathcal{K}$ *і* $f = C(\varphi)$. *Тоді для будь-яких* $(z, w) \in \mathbb{D}^2$

$$D_1(f)(z)(1 - z\overline{w}) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}(1 - |z|^2)(1 - |w|^2) + (z - w)\int_T \varphi \overline{\mu_z \mu_w} |\mu_z'| dm.$$

З леми 1 випливає така формула: *для будь-яких* $(z, w) \in \mathbb{D}^2$

$$\frac{D_1(f)(z)(1 - z\overline{w}) - D_1(f)(w)(1 - \overline{z}w)}{z - w} = \int_{\mathbb{T}} \varphi \overline{\mu_z \mu_w} \left(|\mu_z'| + |\mu_w'|\right) dm.$$

Звідси при $\arg z = \arg w$ одержуємо

$$\frac{D_1(f)(z) - D_1(f)(w)}{\dfrac{z - w}{1 - zw}} = \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi \mu_z \mu_w} (|\mu_z'| + |\mu_w'|) dm,$$

якщо $z \neq w$, і

$$D_2(f)(z) = 2\int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi \mu_z^2} \, | \mu_z' \, | \, dm,$$

якщо $z = w$.

Безпосередньо з останніх двох формул випливає доводжувана рівність у теоремі 1 та екстремальність функцій $\lambda \mu_z \mu_w$, $|\lambda| = 1$. Доведення того факту, що тільки ці функції є екстремальними ґрунтується на такому твердженні.

Лема 2. *Нехай функція* $I: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *є внутрішньою, тобто голоморфною в* $\mathbb{D}$ *і такою, що* $\left|\lim_{\rho \to 1-} I(\rho t)\right| = 1$ *для майже усіх* $t \in \mathbb{T}$, *а функція* $p: \mathbb{T} \to \mathbb{R}_+$ *сумовна і невід'ємна на* $\mathbb{T}$. *Якщо для деякої вимірної на* $\mathbb{T}$ *функції* φ, *яка є істотно обмеженою і такою, що* $\mathrm{dist}(\varphi, \overline{H^\infty(\mathbb{T})}) \leqslant 1$ *виконується рівність*

$$\left|\int_{\mathbb{T}} \varphi \overline{I} p dm\right| = \int_{\mathbb{T}} p dm,$$

то $\varphi = \lambda I$, *де* $\lambda = \text{const}$, $|\lambda| = 1$.

Стосовно леми 2 зауважимо такий важливий факт. У [7] і [8, лема 2] показано, що

$$\int_{\mathbb{T}} p\,dm = \inf_{h \in H_0^1(\mathbb{T})} \int_{\mathbb{T}} \left| \overline{I} p + h \right| dm,$$

де $H_0^1(\mathbb{T})$ — простір сумовних на $\mathbb{T}$ функцій, які задовольняють умови

$$\int_{\mathbb{T}} h(t) t^k dm(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

З іншого боку, нескладно помітити, що

$$\max_{\varphi} \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi \overline{I} p\,dm \right| = \int_{\mathbb{T}} p\,dm,$$

де максимум береться відносно усіх функцій φ, які описано вище. Тому лема 2 є двоїстою до леми 2 у [8], а рівність

$$\max_{\varphi} \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi \overline{I} p\,dm \right| = \inf_{h \in H_0^1(\mathbb{T})} \int_{\mathbb{T}} \left| \overline{I} p + h \right| dm$$

є співвідношенням двоїстості.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Bonk M., Minda D., Yanagihara H. Distortion theorems for locally univalent Bloch functions. *J. Anal. Math.* 1996. **69**. P. 73—95. https://doi.org/10.1007/BF02787103
2. Bonk M., Minda D., Yanagihara H. Distortion theorems for Bloch functions. *Pac. J. Math.* 1997. **179**. P. 241—261. https://doi.org/10.2140/pjm.1997.179.241
3. Ghatage P., Yan J., Zheng D. Composition operators with closed range on the Bloch space. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2000. **129.** P. 2039—2044. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05771-3
4. Xiong C. On the Lipschitz continuity of the dilation of Bloch functions. *Period. Math. Hung.* 2003. **47**, № 1—2. P. 233—238. https://doi.org/10.1023/B:MAHU.0000010824.30026.cd
5. Girela D. Analytic functions of bounded mean oscillation. *Complex function spaces: Proceedings of the Summer School Held* (Mekrijärvi, 30 August — 3 September, 1999). Joensuun: Joensuun yliopistopaino, 2001. P. 61—170.
6. Holland F., Twomey J.B. Explicit examples of Bloch functions in every H^p space, but not in BMOA. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1985. **95**, № 2. P. 227—229. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1985-0801328-5
7. Савчук В.В. Найкращі наближення голоморфними функціями. Застосування до найкращих многочленних наближень класів голоморфних функцій. *Укр. мат. журн.* 2007. **59**, № 8. С. 1047—1067.
8. Савчук В.В., Чайченко С.О., Савчук М.В. Наближення обмежених голоморфних і гармонічних функцій середніми Фейєра. *Укр. мат. журн.* 2019. **71**, № 4. С. 516—542.

Надійшло до редакції 15.06.2021

REFERENCES

1. Bonk, M., Minda, D. & Yanagihara, H. (1996). Distortion theorems for locally univalent Bloch functions. J. Anal. Math., 69, pp. 73-95. https://doi.org/10.1007/BF02787103
2. Bonk, M., Minda, D. & Yanagihara, H. (1997). Distortion theorems for Bloch functions. Pac. J. Math, 179, pp. 241-261. https://doi.org/10.2140/pjm.1997.179.241
3. Ghatage, P., Yan, J. & Zheng, D. (2000). Composition operators with closed range on the Bloch space. Proc. Amer. Math. Soc., 129, pp. 2039-2044. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05771-3

4. Xiong, C. (2003). On the Lipschitz continuity of the dilation of Bloch functions. *Period. Math. Hung.*, 47, No. 1-2, pp. 233-238. https://doi.org/10.1023/B:MAHU.0000010824.30026.cd
5. Girela, D. (2001). Analytic functions of bounded mean oscillation. Proceedings of the Summer School Held Complex function spaces, Mekrijärvi, 1999 (pp. 61-170). Joensuun: Joensuun yliopistopaino.
6. Holland, F. & Twomey J. B. (1985). Explicit examples of Bloch functions in every H^p space, but not in BMOA. Proc. Amer. Math. Soc., 95, No. 2. pp. 227-229. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1985-0801328-5
7. Savchuk, V. V. (2007). Best approximation by holomorphic functions. Application to the best polynomial approximation of classes of holomorphic functions. Ukr. Math. J., 59, No. 8, pp. 1163-1183. https://doi.org/10.1007/s11253-007-0078-0
8. Savchuk, V. V., Chaichenko, S. O. & Savchuk, M. V. (2019). Approximation of bounded holomorphic functions by Fejér means. Ukr. Math. J., 71, No. 4, pp. 589-618. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01665-0

Received 15.06.2021

V.V. Savchuk [1], https://orcid.org/0000-0002-6713-4471
M.V. Savchuk [2]

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] NTU of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnical Institute"
E-mail: savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

AN EXTREMAL PROBLEM FOR THE INVARIANT DIFFERENTIAL OPERATORS ON A CLASS OF CAUCHY-TYPE INTEGRALS

The differential operators $D_1(f)(z)=(1-|z|^2)\partial f(z)/\partial z$ and $D_2(f)=D_1^2(f)$, defined on the space of holomorphic functions in a unit disk, are invariant with respect to compositions with fractionally linear functions. They arise naturally in studies of holomorphic functions from the Bloch class $\mathcal{B}$, which plays an important role in the geometric theory of functions. It is known that the images of the operators $|D_j(f)|$, $j=1,2$, are Lipschitz functions with respect to the pseudo-hyperbolic metric $\rho(z,w)$ in a unit disk. Namely, we have that $\sup\limits_{f\in\mathcal{B}}\big||D_1(f)(z)|-|D_1(f)(w)|\big|/\rho(z,w)=3\sqrt{3}/2$. In this paper, we solve the extremal problem about the exact value of the quantity $\sup_f|D_1(f)(z)-D_2(f)(w)|/\rho(z,w)$, where f runs a class of Cauchy-type integrals, which, as is well known, is a subclass of Bloch functions.

Keywords: *holomorphic function, pseudo-hyperbolic metric, Bloch class, integral of the Cauchy type, BMOA, extremal problem.*