ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.003
УДК 517.927

В.А. Михайлець [1], https://orcid.org/0000-0002-1332-1562
Т.Б. Скоробогач [2], https://orcid.org/0000-0002-0119-8966

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] НТУ України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, tetianaskorobohach@gmail.com

Фредгольмові крайові задачі з параметром у просторах Соболєва—Слободецького

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

Вивчаються розв’язки лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, що належать до заданого простору Соболєва—Слободецького W_p^s, $1 \leqslant p < \infty$, $s > 1$. *Знайдено необхідні і достатні умови їх неперервності за параметром. Отримано застосування до багатоточкових крайових задач.*

Ключові слова: *неоднорідна крайова задача, неперервність розв’язку за параметром, простір Соболєва—Слободецького.*

Питання обґрунтування граничного переходу для розв’язків задач Коші та крайових задач виникають у багатьох задачах аналізу. Так, у роботах І. І. Гіхмана [1], М.О. Красносельського і С.Г. Крейна [2], Я. Курцвейля і З. Ворела [3] наведено фундаментальні результати про неперервну залежність за параметром розв’язків задач Коші для нелінійних систем. Аналогічне питання для розв’язків крайових задач значно складніше.

Широкий клас лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку досліджував І.Т. Кігурадзе [4, 5] та його учні. Розв’язки цих задач є абсолютно неперервними вектор-функціями на відрізку $[a,b]$, а неоднорідні крайові умови задані у вигляді $By = q$, де лінійний неперервний оператор $B : C([a,b],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$, а m — кількість рівнянь системи. Суттєве узагальнення цих результатів для комплекснозначних вектор-функцій і систем диференціальних рівнянь довільних порядків отримано в роботах [6, 7].

Максимально широкі класи крайових умов для систем диференціальних рівнянь у просторах Соболєва довільної гладкості були введені і досліджені В.А. Михайлецем та його учнями в роботах [8—12]. Показником гладкості функцій у цих просторах є цілі додатні числа.

Цитування: Михайлець В.А., Скоробогач Т.Б. Фредгольмові крайові задачі з параметром у просторах Соболєва—Слободецького. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 4. С. 3—8. https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.003

Випадок просторів Соболєва–Слободецького дробової гладкості досліджений менш повно [13—15]. Мета цієї роботи — доповнити і розвинути результати зазначених робіт на довільні простори Соболєва—Слободецького та дати їх застосування до багатоточкових крайових задач.

1. Результати. Нехай задано скінченний інтервал $(a,b)\subset\mathbb{R}$ та числа

$$m\in\mathbb{N},\quad s\in(1,\infty)\setminus\mathbb{N},\quad \varepsilon_0>0,\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Розглянемо параметризовану числом $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ сім'ю неоднорідних крайових задач вигляду

$$L(\varepsilon)y(t;\varepsilon):=y'(t;\varepsilon)+A(t;\varepsilon)y(t;\varepsilon)=f(t;\varepsilon),\quad t\in(a,b), \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon)=c(\varepsilon), \tag{2}$$

де при кожному фіксованому значенні параметра ε матриця-функція $A(\cdot;\varepsilon)\in W_p^{s-1}([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})=:(W_p^{s-1})^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot;\varepsilon)\in W_p^{s-1}([a,b];\mathbb{C}^m)=:(W_p^{s-1})^m$, вектор $c(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$, а $B(\varepsilon)$ — лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon):(W_p^s)^m\to\mathbb{C}^m.$$

Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot;\varepsilon)\in(W_p^s)^m$, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь (при $s>1+1/p$ скрізь) на (a,b) та рівність (2). Крайова умова (2) є найбільш загальною для системи (1). Із крайовою задачею (1), (2) можна пов'язати лінійний оператор

$$(L(\varepsilon),B(\varepsilon)):(W_p^s)^m\to(W_p^{s-1})^m\times\mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Як встановлено в [13, 15], при кожному фіксованому значенні параметра ε оператор (3) є неперервним фредгольмовим з індексом 0.

Будемо надалі вважати, що виконується

Умова (0). *Гранична однорідна крайова задача вигляду* (1), (2)

$$L(0)y(t;0)=0,\quad t\in(a,b),\quad B(0)y(\cdot;0)=0$$

має лише тривіальний розв'язок.

У цьому випадку відповідна гранична неоднорідна крайова задача має єдиний розв'язок. Тому має сенс

Означення 1. *Говоримо, що розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon=0$*, якщо виконуються такі умови:*

• *існує таке додатне число* $\varepsilon_1<\varepsilon_0$*, що для кожного* $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$*, довільних правих частин* $f(\cdot;\varepsilon)\in(W_p^s)^m$ *і* $c(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$ *ця задача має єдиний розв'язок* $y(\cdot;\varepsilon)$*, який належить простору* $(W_p^s)^m$*;*

• *зі збіжності правих частин* $f(\cdot;\varepsilon)\to f(\cdot;0)$ *в* $(W_p^s)^m$ *та* $c(\varepsilon)\to c(0)$ *в* $\mathbb{C}^m$ *при* $\varepsilon\to 0+$ *випливає збіжність розв'язків*

$$y(\cdot;\varepsilon)\to y(\cdot;0)\quad \text{у}\quad (W_p^s)^m\quad \text{при}\quad \varepsilon\to 0+.$$

Розглянемо тепер такі *граничні умови* при $\varepsilon\to 0+$:

(I) $A(\cdot;\varepsilon)\to A(\cdot;0)$ у просторі $(W_p^{s-1})^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y\to B(0)y$ у $\mathbb{C}^m$ для кожного $y\in(W_p^s)^m$.

Сформулюємо критерій неперервності розв'язку $y(\cdot,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) за параметром ε при $\varepsilon\to 0+$ у просторі W_p^s.

Теорема 1. *Розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon=0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I), (II).

Покладемо

$$\widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon):=\|L(0)y(\varepsilon;0)-f(\cdot;0)\|_{s-1,p}+\|B(0)y(\cdot;\varepsilon)-c(0)\|_{\mathbb{C}^m},$$

де $\|\cdot\|_{s-1,p}$ — норма у просторі W_p^{s-1}, а $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$ — норма у просторі $\mathbb{C}^m$.

Величини $\|y(\cdot;0)-y(\cdot;\varepsilon)\|_{s,p}$ та $\widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon)$ є відповідно похибкою і нев'язкою розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), якщо $y(\cdot;0)$ розглядати як її точний розв'язок, а $y(\cdot;\varepsilon)$ — як наближений.

Теорема 2. *Нехай крайова задача* (1), (2) *задовольняє умови* (0), (I) *і* (II). *Тоді існують такі додатні числа* $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ *і* γ_1, γ_2, *що для кожного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$ *має місце двобічна оцінка*

$$\gamma_1\widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon)\leqslant\|y(\cdot;0)-y(\cdot;\varepsilon)\|_{s,p}\leqslant\gamma_2\widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon), \tag{4}$$

де числа ε_2, γ_1 *і* γ_2 *не залежать від* $y(\cdot;0)$ *і* $y(\cdot;\varepsilon)$.

Згідно з теоремою, похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) мають однаковий порядок малості.

2. Застосування. Для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$ розглянемо багатоточкову крайову задачу для системи

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon):=y'(t,\varepsilon)+A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon)=f(t,\varepsilon),\quad t\in(a,b). \tag{5}$$

Тут при кожному фіксованому значенні параметра ε матриці-функції $A(\cdot,\varepsilon)$ належать простору $(W_p^{s-1})^{m\times m}$ та вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon)$ — простору $(W_p^{s-1})^m$.

Пов'яжемо із системою (5) багатоточкову фредгольмову крайову умову

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)}\sum_{l=0}^{s}\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)y^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon)=q(\varepsilon), \tag{6}$$

де вектори $q(\varepsilon)$ належать простору $\mathbb{C}^m$ і матриці $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ — простору $\mathbb{C}^{m\times m}$.

Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. Використання у крайовій умові (6) повторної суми за індексами j і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{j,k}(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0+$ залежно від значень параметра j.

У граничному випадку при $\varepsilon=0$ розглядаємо крайову задачу

$$L(0)y(t,0)=f(t,0),\quad t\in(a,b), \tag{7}$$

$$B(0)y(\cdot,0)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=0}^{s}\beta_j^{(l)}y^{(l)}(t_j,0)=q(0), \tag{8}$$

де матриці $\beta_j^{(l)}\in\mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_j\in[a,b]$ та вектор $q(0)\in\mathbb{C}^m$ є заданими.

З огляду на неперервне вкладення

$$(W_p^s)^m \subset (\mathbb{C}^{s-1})^m \tag{9}$$

ліва частина крайової умови (6) має сенс для всіх розв'язків рівняння (5). Для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ лінійне відображення $y \mapsto B(\varepsilon)y$, де $y \in (W_p^s)^m$, є лінійним неперервним оператором

$$B(\varepsilon):(W_p^s)^m \to \mathbb{C}^m. \tag{10}$$

Крайовій задачі (5), (6) для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ відповідає лінійний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)):\left(W_p^s\right)^m \to \left(W_p^{s-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m. \tag{11}$$

Це обмежений фредгольмовий оператор з індексом нуль.

Розглянемо такі *припущення* при $\varepsilon \to 0+$:

(α) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ та $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$;

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ та $l \in \{0, \ldots, s\}$;

(γ) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \cdot \left| t_{j,k}(\varepsilon) - t_j \right| \to 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$ та $l \in \{0, \ldots, s\}$;

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_0(\varepsilon)} \left\| \beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \to 0$ для всіх $k \in \{1, \ldots, \omega_0(\varepsilon)\}$ та $l \in \{0, \ldots, s\}$.

Зауважимо, що для крайової задачі (5), (6) не припускається, що коефіцієнти $A(\cdot, \varepsilon)$, $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають певну регулярність за параметром ε при $\varepsilon > 0$. Будемо вимагати, щоб для кожного фіксованого $j \in \{1, \ldots, r\}$ всі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, проте для точок нульової серії $t_{0,k}(\varepsilon)$ така вимога не висуватиметься.

В умовах (γ) та (δ) вираз $\|\cdot\|$ є нормою комплексної числової матриці; ця норма дорівнює сумі модулів усіх елементів матриці. Припущення (β) і (γ) допускають, що коефіцієнти $\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)$ можуть необмежено зростати при $\varepsilon \to 0+$, але не надто швидко. З умови (δ) випливає, що не потрібно вимагати збіжність точок $t_{0,j}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ на відміну від умови (α).

Сформулюємо граничні теореми для розв'язків багатоточкової крайової задачі (5), (6) у випадку $1 \leqslant p < \infty$.

Розглянемо такі *припущення* при $\varepsilon \to 0+$:

(γ_p) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(s)}(\varepsilon) \right\| \cdot \left| t_{j,k}(\varepsilon) - t_j \right|^{1/q} = O(1)$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$ та $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$, де $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$;

(γ') $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j(\varepsilon)} \left\| \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \right\| \cdot \left| t_{j,k}(\varepsilon) - t_j \right| \to 0$ для всіх $j \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in \{1, \ldots, \omega_j(\varepsilon)\}$ та $l \in \{0, \ldots, s-1\}$.

Якщо в припущенні (γ_p) $p=1$, то $q=\infty$.

Зазначимо, що системи умов (α), (β), (γ), (δ) та (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ) не гарантують рівномірну збіжність неперервних операторів $B(\varepsilon)$ до $B(0)$ в $\mathbb{C}^m$ при $\varepsilon\to 0+$.

Теорема 3. *Нехай крайова задача* (5), (6) *при* $1\leqslant p<\infty$ *задовольняє припущення* (α), (β), (γ_p), (γ'), (δ). *Тоді вона задовольняє граничну умову* (II).

Якщо, крім того, виконані умови (0) *і* (I), *то для достатньо малих* ε *її розв'язок існує, єдиний та задовольняє граничне співвідношення*

$$\| y(\cdot,\varepsilon)-y(\cdot,0)\|_{s,p}\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+.$$

Швидкість збіжності визначається нерівностями (4).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гихман И.И. По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова. *Укр. мат. журн.* 1952. **4**, № 2. С. 215—219.
2. Красносельский М.А., Крейн С.Г. О принципе усреднения в нелинейной механике. *Успехи мат. наук.* 1955. **10**, вып. 3. С. 147—153.
3. Курцвейль Я., Ворель З. О непрерывной зависимости решений линейных уравнений от параметра. *Чехослов. мат. журн.* 1957. **7**, № 4. С. 568—583.
4. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. 352 с.
5. Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.* Т. 30. Москва: ВИНИТИ, 1987. С. 3—103.
6. Михайлец В.А., Пелехата О.Б., Рева Н.В. О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 12. С. 8—13. https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.12.008
7. Mikhailets V.A., Pelekhata O.B., Reva N.V. Limit theorems for the solutions of boundary-value problems. *Ukr. Math. J.* 2018. **70**, № 2. P. 243—251. https://doi.org/10.1007/s11253-018-1498-8
8. Hnyp E., Mikhailets V., Murach A. Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces. *Electron. J. Diff. Equat.* 2017. **2017**, № 81. P. 1—13.
9. Gnyp E.V., Kodlyuk T.I., Mikhailets V.A. Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. *Ukr. Math. J.* 2015. **67**, № 5. P. 658—667. https://doi.org/10.1007/s11253-015-1105-1
10. Kodlyuk T., Mikhailets V. Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces. *J. Math. Sci.* 2013. **190**, № 4. P. 589–599. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1272-2
11. Atlasiuk O.M., Mikhailets V.A. Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces. *Ukr. Math. J.* 2019. **70**, № 10. P. 1526—1537. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01588-w
12. Atlasiuk O.M., Mikhailets V.A. Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. *Ukr. Math. J.* 2019. **70**, № 11. P. 1677—1687. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01599-7
13. Hnyp E.V. Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems with respect to the parameter in the Slobodetskii spaces. *Ukr. Math. J.* 2016. **68**, № 6. P. 849—861. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1261-y
14. Maslyuk H.O., Mikhailets V.A. Continuity in the parameter for the solutions of one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces. *Ukr. Math. J.* 2018. **70**, № 3. P. 467—476. https://doi.org/10.1007/s11253-018-1510-3
15. Mikhailets V.A., Skorobohach T.B. On solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev—Slobodetskiy spaces. *Допов. Нац. акад. наук. Укр.* 2020. № 4. С. 10—14. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.04.010

Надійшло до редакції 05.05.2021

REFERENCES

1. Gihman, I. (1952). On one Bogolyubov's theorem. Ukr. Mat. Zh., 4, No. 2, pp. 215-219 (in Russian)
2. Krasnosel'skii, M. L. & Krein, S. G. (1955). On the averaging principle in nonlinear mechanics. Usp. Mat. Nauk, 10, Iss. 3, pp. 147-153 (in Russian).

3. Kurzweil, J. & Vorel, Z. (1957). Continuous dependence of solutions of differential equations on a parameter. Czechosl. Math. J., 7, No. 4, pp. 568-583.
4. Kiguradze, I. T. (1975). Some singular boundary value problems for ordinary differential equations. Tbilisi: Izdat. Tbilis. Univ. (in Russian).
5. Kiguradze, I. T. (1988). Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. J. Soviet Math., 43, No. 2, pp. 2259-2339.
6. Mikhailets, V. A., Pelekhata, O. B. & Reva, N. V. (2017). On the Kiguradze theorem for linear boundary-value problems. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 12, pp. 8-13 (in Russian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.12.008
7. Mikhailets, V. A., Pelekhata, O. B. & Reva, N. V. (2018). Limit theorems for the solutions of boundary-value problems. Ukr. Math. J., 70, No. 2, pp. 243-251. https://doi.org/10.1007/s11253-018-1498-8
8. Hnyp, E., Mikhailets, V. & Murach, A. (2017). Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces. Electron. J. Diff. Equat., 2017, No. 81, pp. 1-13.
9. Gnyp, E. V., Kodliuk, T. I. & Mikhailets, V. A. (2015). Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. Ukr. Math. J., 67, No. 5, pp. 658-667. https://doi.org/10.1007/s11253-015-1105-1
10. Kodlyuk, T. & Mikhailets, V. (2013). Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces. J. Math. Sci., 190, No. 4, pp. 589-599. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1272-2
11. Atlasiuk, O. M. & Mikhailets, V. A. (2019). Fredholm one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces. Ukr. Math. J., 70, No. 10, pp. 1526-1537. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01588-w
12. Atlasiuk, O. M. & Mikhailets, V. A. (2019). Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces. Ukr. Math. J., 70, No. 11, pp. 1677-1687. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01599-7
13. Hnyp, E. V. (2016). Continuity of the solutions of one-dimensional boundary-value problems with respect to the parameter in the Slobodetskii spaces. Ukr. Math. J., 68, No. 6, pp. 849-861. https://doi.org/10.1007/s11253-016-1261-y
14. Maslyuk, H. O. & Mikhailets, V. A. (2018). Continuity in the parameter for the solutions of one-dimensional boundary-value problems for differential systems of higher orders in Slobodetskii spaces. Ukr. Math. J., 70, No. 3, pp. 467-476. https://doi.org/10.1007/s11253-018-1510-3
15. Mikhailets, V. A. & Skorobohach, T. B. (2020). On solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev—Slobodetskiy spaces. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 4, pp. 10-14. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.04.010

Received 05.05.2021

V.A. Mikhailets[1], https://orcid.org/0000-0002-1332-1562
T.B. Skorobohach[2], https://orcid.org/0000-0002-0119-8966

[1] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
[2] NTU of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"
E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua, tetianaskorobohach@gmail.com

FREDHOLM BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH PARAMETER IN SOBOLEV—SLOBODETSKY SPACES

The solutions of linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations, which belong to a given Sobolev—Slobodetsky space W_p^s, $1 \leqslant p < \infty$, $s > 1$, are studied. Necessary and sufficient conditions for their continuity in a parameter are found. The applications to multipoint boundary-value problems are obtained.

Keywords: *inhomogeneous boundary-value problem, continuity of a solution in a parameter, Sobolev—Slobodetskiy space.*