

О ПОИСКЕ ДЕФЕКТОВ В РЕГУЛЯРНЫХ 3D-СТРУКТУРАХ*

Введение

Регулярные изображения с дефектами (рис. 1, нарушение регулярности в центре) характерны при неразрушающем контроле качества (НКК) тонкостенных многослойных композиционных материалов с помощью методов лазерной интерферометрии, таких как метод голографической интерферометрии, метод спекл-интерферометрии и метод ширографии [1].

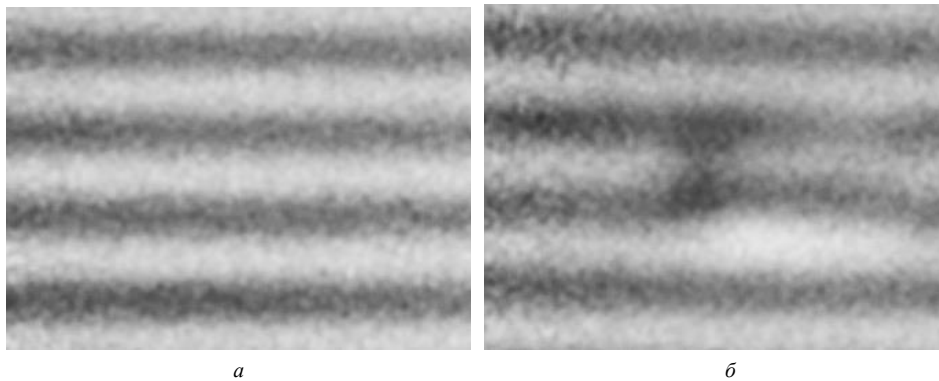


Рис. 1

Методы лазерной интерферометрии для НКК предполагают измерение перемещений или деформаций точек поверхности исследуемых объектов, которые возникают в результате термической или механической нагрузки. При НКК элементов конструкций, которые имеют периодическую (регулярную) 3D-структуру, поле измеряемых методами лазерной интерферометрии величин (перемещения, деформации) должно также иметь периодическую структуру. Если при изготовлении или эксплуатации таких элементов конструкций возникают дефекты (например, отсутствие соединения, наличие трещин, пор, вмятин и т.п.), то в таких местах нарушается регулярность поля измеряемых величин, и область дефекта определяется оператором (наблюдателем) как место, в котором это нарушение очевидно. Требуется автоматизировать процесс определения местоположения дефектов в ответственных элементах конструкций, чтобы снизить влияние человеческого фактора при неразрушающем контроле качества с помощью указанных выше методов. Рассмотрим оптимизационные задачи для регулярных 3D-структур, которые введены авторами в работе [2] и имеют место при анализе регулярных изображений с дефектами, и методы их решения на основе метода Ньютона и алгоритмов негладкой оптимизации.

Материал статьи изложен в таком порядке. В разд. 1 определены регулярная 3D-структура и связанные с ней дефекты. В разд. 2 сформулированы оптимизационные задачи для нахождения наилучших в L_p -норме параметров регулярных

*Работа выполнена при поддержке НАН Украины (проект № 0116U004558) и Volkswagen Foundation (грант № 90 306).

3D-структур и исследованы их свойства. В разд. 3 описаны методы наименьших квадратов и наименьших модулей для нахождения параметров регулярных структур. Показано, что метод наименьших квадратов не способен восстановить их параметры при наличии хотя бы одного дефекта, а метод наименьших модулей устойчив к нахождению параметров регулярных 3D-структур с одной и несколькими областями с дефектами. В разд. 4 описаны два общих неравенства для суммы квадратов двух наборов чисел, первое из которых неявно использовалось в разд. 1 при определении базисной регулярной 3D-структуры.

1. Регулярные 3D-структуры, их параметры и дефекты

3D-структурой будем называть тройку $\{A, u, v\}$, где A — $m \times n$ -матрица, такая что $A = \{a_{ij}\}_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n} \in R^{m \times n}$, $u \in R^m$ и $v \in R^n$. Параметрами 3D-структуры $\{A, u, v\}$ будем называть m -мерный вектор u и n -мерный вектор v , их компоненты будут определять значения элементов матрицы $A \in R^{m \times n}$.

Определение 1. 3D-структура $\{A, u, v\}$ называется регулярной, если матрица $A \in R^{m \times n}$ и векторы $u \in R^m$ и $v \in R^n$ такие, что $a_{ij} = u_i + v_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Одно из свойств регулярной 3D-структуры определяет следующее утверждение.

Лемма 1. Если $\{A, u, v\}$ — регулярная 3D-структура, то регулярной будет и 3D-структура $\{A, \tilde{u}, \tilde{v}\}$, где $\tilde{u}_i = u_i + t$, $i = 1, \dots, m$, $\tilde{v}_j = v_j - t$, $j = 1, \dots, n$, $\forall t \in R, t \neq 0$.

Лемма 1 означает, что для регулярной 3D-структуры параметры u и v определены неоднозначно. Так, на рис. 2 приведены три различных набора параметров для

одной и той же 3×5 -матрицы $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, которая определяет регулярную

3D-структуру. Первой регулярной 3D-структуре $\{A, u, v\}$ соответствуют параметры $u = u_1$, $v = v_1$, второй — $u = u_2$, $v = v_2$, третьей — $u = u_3$, $v = v_3$. Неоднозначные регулярные 3D-структуры имеют следующий вид: $(a) u_1 = (0, -1, 1)^T$, $v_1 = (2, 1, 2, 1, 2)^T$; $(b) u_2 = (2, 1, 3)^T$, $v_2 = (0, -1, 0, -1, 0)^T$; $(c) u_3 = (1, 0, 2)^T$, $v_3 = (1, 0, 1, 0, 1)^T$.

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">2</td><td style="background-color: #cccccc;">1</td><td style="background-color: #cccccc;">2</td><td style="background-color: #cccccc;">1</td><td style="background-color: #cccccc;">2</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	2	1	2	1	2	0	2	1	2	1	2	-1	1	0	1	0	1	1	3	2	3	2	3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">0</td><td style="background-color: #cccccc;">-1</td><td style="background-color: #cccccc;">0</td><td style="background-color: #cccccc;">-1</td><td style="background-color: #cccccc;">0</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	0	-1	0	-1	0	2	2	1	2	1	2	1	1	0	1	0	1	3	3	2	3	2	3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">1</td><td style="background-color: #cccccc;">0</td><td style="background-color: #cccccc;">1</td><td style="background-color: #cccccc;">0</td><td style="background-color: #cccccc;">1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	1	0	1	0	1	1	2	1	2	1	2	0	1	0	1	0	1	2	3	2	3	2	3
2	1	2	1	2																																																																			
0	2	1	2	1	2																																																																		
-1	1	0	1	0	1																																																																		
1	3	2	3	2	3																																																																		
0	-1	0	-1	0																																																																			
2	2	1	2	1	2																																																																		
1	1	0	1	0	1																																																																		
3	3	2	3	2	3																																																																		
1	0	1	0	1																																																																			
1	2	1	2	1	2																																																																		
0	1	0	1	0	1																																																																		
2	3	2	3	2	3																																																																		
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>																																																																					

Рис. 2

Для того чтобы параметры регулярной 3D-структуры были определены однозначно, достаточно зафиксировать величину t из тех или иных соображений. Так, ее значение можно выбрать таким, чтобы выражение $\|u + te_m\|^2 + \|v - te_n\|^2$ было минимальным. Здесь e_m и e_n — m - и n -мерные векторы, все компоненты которых равны единице. Это приводит к минимизации одномерной функции

$$f(t) = \|u + te_m\|^2 + \|v - te_n\|^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2 + \sum_{j=1}^n v_j^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^m u_i - \sum_{j=1}^n v_j \right) t + (m+n)t^2. \quad (1)$$

Она достигает минимального значения f^* при $t = t^*$, которые определяются по формулам

$$f^* = f(t^*) = \sum_{i=1}^m u_i^2 + \sum_{j=1}^n v_j^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^m u_i - \sum_{j=1}^n v_j \right)^2}{m+n}, \quad t^* = \frac{\sum_{j=1}^n v_j - \sum_{i=1}^m u_i}{m+n}. \quad (2)$$

С помощью формул (1) и (2) можно однозначно определить параметры регулярной 3D-структуры. Из выражения для f^* в (2) следует, что уменьшить сумму квадратов компонент векторов u и v нельзя, если для них выполнено условие $\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^n v_j$. Именно его поставим в основу однозначной (по параметрам) регулярной 3D-структуры.

Определение 2. Регулярную 3D-структуру $\{A, u^*, v^*\}$ будем называть базисной, если ее параметры $u^* \in R^m$ и $v^* \in R^n$ такие, что $\sum_{j=1}^m u_j^* = \sum_{i=1}^n v_i^*$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Если $\{A, u, v\}$ — регулярная 3D-структура, то регулярная 3D-структура $\{A, u^*, v^*\}$ будет базисной, если

$$u^* = u + t^* e_m; \quad v^* = v - t^* e_n, \quad \text{ããã } t^* = \frac{\sum_{j=1}^n v_j - \sum_{i=1}^m u_i}{m+n}. \quad (3)$$

Если $\{A, u^*, v^*\}$ — базисная регулярная 3D-структура, то 3D-структура $\{A, u, v\}$ будет регулярной, если

$$u = u^* + te_m, \quad v = v^* - te_n \quad (4)$$

для произвольного $t \in R$.

Лемма 2 дает нам формулы (3) и (4), которые связывают между собой параметры базисной и обычной регулярных 3D-структур. Так, базисной регулярной

3D-структурой для 3×5 -матрицы $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ является третья регулярная

3D-структура из рис. 2, параметры которой $u = u_3 = (1, 0, 2)^T$ и $v = v_3 = (1, 0, 1, 0, 1)^T$. Для нее $\sum_{i=1}^3 u_i = \sum_{j=1}^5 v_j = 3$, и, следовательно, $u^* = (1, 0, 2)^T$ и

$v^* = (1, 0, 1, 0, 1)^T$. Чтобы от первой и второй регулярных 3D-структур из рис. 2 перейти к третьей, достаточно в формулах (3) использовать $u = u_1$, $v = v_1$, $t^* = t_1^* = -1$ либо $u = u_2$, $v = v_2$, $t^* = t_2^* = 1$. С помощью формулы (4) и параметров

базисной регулярной 3D-структуры для 3×5 -матрицы A можно построить не только первую и вторую регулярные 3D-структуры (им в формуле (4) соответствуют значения $t=t_1=1$ и $t=t_2=-1$), а и ряд других, удовлетворяющих тем или иным свойствам. Например, при $t=t_4=0,5$ получаем регулярную 3D-структуру с параметрами $u=u_4=(0,5; -0,5; 1,5)^T$ и $v=v_4=(1,5; 0,1; 5,0; 1,5)^T$, т.е. такую, что последние компоненты векторов u и v одинаковы.

Определение 3. Элементарным дефектом в регулярной 3D-структуре $\{A, u, v\}$ будем называть такую пару индексов i, j , $i \in 1, \dots, m$, $j \in 1, \dots, n$, для которых $a_{ij} \neq u_i + v_j$.

Для регулярных 3D-структур с дефектами будем придерживаться таких названий. Если регулярная 3D-структура имеет один элементарный дефект, то ее будем называть регулярной с одним дефектом. Если регулярная 3D-структура имеет k элементарных дефектов ($k > 1$), то ее будем называть регулярной с k дефектами. Примеры регулярных 3D-структур без дефекта (*a*), с одним $\tilde{a}_{23} = a_{23} + 1$ (*б*) и тремя дефектами $\tilde{a}_{14} = a_{14} + 1$, $\tilde{a}_{23} = a_{23} + 1$, $\tilde{a}_{32} = a_{32} + 1$ (*в*) 3×5 -матрицы \tilde{A} , приведены на рис. 3, где в «рамки» взяты те элементы матрицы \tilde{A} с индексами i, j , где имеет место элементарный дефект $\tilde{a}_{ij} \neq u_i + v_j$. Это сделано на примере той же 3×5 -матрицы A , как и на рис. 1.

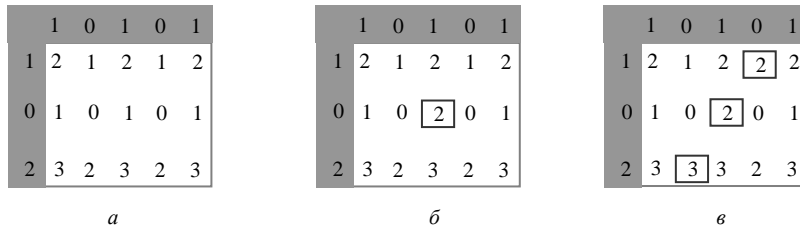


Рис. 3

В этой статье достаточно определения 3, но следует отметить, что для реальных задач понятие «дефект» может потребовать более точного определения. В них для регулярных изображений под «дефектными» понимаются некоторые множества пар индексов i, j , в которых нарушено «условие $a_{ij} \neq u_i + v_j$ ». Как правило, эти множества задают связные области, но в принципе они могут задавать и несвязные области.

2. Задачи для поиска наилучших параметров

Рассмотрим формулировки оптимизационных задач для нахождения наилучших параметров регулярной 3D-структуры и базисной регулярной 3D-структуры, где под «наилучшими параметрами» будем понимать такие значения векторов x^* и y^* , что коэффициенты $a_{ij}^* = x_i^* + y_j^*$ минимально (в том числе в евклидовой и манхеттенговской нормах) отклоняются от коэффициентов некоторой заданной матрицы A .

Задача 1. Имеется $m \times n$ -матрица A . Для регулярной 3D-структуры $\{A^*, x^*, y^*\}$ требуется найти такие векторы $x^* \in R^m$ и $y^* \in R^n$, чтобы коэффициенты $m \times n$ -матрицы A^* минимально отклонялись от коэффициентов $m \times n$ -матрицы A .

Поиск наилучших параметров для регулярной 3D-структуры можно обеспечить с помощью безусловной задачи минимизации негладкой выпуклой функции: найти

$$f_p^* = f_p(x_p^*, y_p^*) = \min_{x \in R^m, y \in R^n} \left\{ f_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij} - x_i - y_j|^p \right)^{1/p} \right\}, \quad (5)$$

где $|\circ|$ — модуль числа, а скалярная величина p такая, что $1 \leq p \leq 2$. Решение задачи (5) дает регулярную 3D-структуру $\{A^*, x_p^*, y_p^*\}$, а коэффициенты матриц A и A^* будут минимально различаться в так называемой L_p -норме, т. е. когда норма вектора

$$z = (z_1, \dots, z_N)^T \text{ определена следующим образом: } \|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^p \right)^{1/p}, \text{ где } p \geq 1.$$

Если $p = 2$, то коэффициенты матриц A и A^* будут минимально отклоняться в евклидовой норме, если $p = 1$ — то в манхэттенской норме. Кроме того, можно рассматривать и другие значения величины $p: 1 < p < 2$. Ее выбор определяет тот или иной метод для восстановления параметров регулярных 3D-структур, например метод наименьших квадратов ($p = 2$) и метод наименьших модулей ($p = 1$).

Задача (5) имеет много решений, так как значения параметров регулярной 3D-структуры $\{A^*, x_p^*, y_p^*\}$ определены неоднозначно (см. лемму 1). Однозначно они будут определены тогда, когда регулярная 3D-структура $\{A^*, x_p^*, y_p^*\}$ будет еще и базисной. Для того чтобы найти параметры базисной регулярной 3D-структуры, можно поступить следующим образом: вначале решить задачу (5), а затем для нахождения u^* и v^* использовать формулы (3), где $u = x_p^*$ и $v = y_p^*$. Но это же можно сделать, сформулировав оптимизационную задачу, которая будет рассчитана на поиск наилучших параметров базисной регулярной 3D-структуры.

Задача 2. Имеется $m \times n$ -матрица A . Для базисной регулярной 3D-структуры $\{A^{**}, x^{**}, y^{**}\}$ требуется найти такие векторы $x^{**} \in R^m$ и $y^{**} \in R^n$, чтобы коэффициенты $m \times n$ -матрицы A^{**} минимально отклонялись от коэффициентов $m \times n$ -матрицы A .

Поиск наилучших параметров для базисной регулярной 3D-структуры $\{A^{**}, x^{**}, y^{**}\}$ можно обеспечить, если задачу (5) дополнить единственным ограничением

$$\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j = 0, \quad (6)$$

которое задает условие на параметры базисной 3D-структуры из леммы 2. Задача (5)–(6) является задачей выпуклого нелинейного программирования. Ей будет соответствовать такое же, как и задаче (5), оптимальное значение f_p^* , а ее оптимальное решение x_p^{**} и y_p^{**} будет определять наилучшие в L_p -норме параметры базисной регулярной структуры $\{A^{**}, x^{**}, y^{**}\}$. Если $p = 2$, то для нахождения параметров базисной регулярной 3D-структуры получим метод наименьших квадратов, а если $p = 1$, то — метод наименьших модулей.

Оптимизационные задачи (5) и (5)–(6) можно решать с помощью стандартного программного обеспечения для решения задач нелинейного программирования.

Однако здесь имеются некоторые особенности, связанные с представлением задач (5) и (5)–(6) в форме задач выпуклого программирования. Так, задачу (5) можно свести к такой задаче выпуклого программирования: найти

$$(f_p^*)^p = (f_p(z_p^*, x_p^*, y_p^*))^p = \min_{z \in R^{m \times n}, x \in R^m, y \in R^n} \left\{ (f_p(z, x, y))^p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij}^p \right\} \quad (7)$$

при ограничениях

$$-z_{ij} - x_i - y_j \leq -a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$-z_{ij} + x_i + y_j \leq a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

которая при $p = 1$ превращается в задачу линейного программирования, а при $p = 2$ — в задачу квадратичного программирования. Чтобы задачу (5)–(6) свести к задаче выпуклого программирования, достаточно к задаче (7)–(9) добавить еще линейное ограничение (6). Особенностью задач (7)–(9) и (7)–(9), (6) есть то, что целевая функция (7) определена только для неотрицательных значений переменных $z_{ij} \geq 0$, которые удовлетворяют ограничениям (8), (9). Действительно, если для некоторой пары индексов i и j сложить неравенства (8) и (9), то получим неравенство $-2z_{ij} \leq 0$, которое равносильно $z_{ij} \geq 0$. Поэтому при значениях p таких, что $1 < p < 2$, для решения задач (7)–(9) и (7)–(9), (6) применимы только те итерационные методы, которые работают с допустимыми точками для системы ограничений (8)–(9). Кроме того, даже при сравнительно небольших значениях m и n задача (7)–(9) будет иметь большое количество переменных $N = m \times n + m + n$ и ограничений $M = 2 \times m \times n$.

Более перспективным является решение задачи (5) с помощью субградиентных методов для минимизации негладких выпуклых функций [3, 4]. При этом количество переменных $N = m + n$, а субградиент выпуклой функции $f_p(x, y)$ вычисляется по формуле

$$g_{f_p}(x, y) = (f_p(x, y))^{1-p} \begin{cases} -\sum_{j=1}^n \operatorname{sgn}(a_{ij} - x_i - y_j) |a_{ij} - x_i - y_j|^{p-1}, & i = 1, \dots, m, \\ -\sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(a_{ij} - x_i - y_j) |a_{ij} - x_i - y_j|^{p-1}, & j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (10)$$

которую легко реализовать для матлаб-подобных языков программирования. Этот путь также подходит и для задачи (5)–(6), так как она сводится к задаче минимизации негладкой выпуклой функции: найти

$$F_p^* = F_p(x_p^{**}, y_p^{**}) = \min_{x \in R^m, y \in R^n} \left\{ F_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij} - x_i - y_j|^p \right)^{1/p} + M \left| \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right|^q \right\}, \quad (11)$$

где скалярные величины p и q такие, что $1 \leq p, q \leq 2$, а скалярная величина $M > 0$. Следует отметить, что для решения задачи (5)–(6) можно использовать и субградиентные методы с проекцией на линейное равенство (6). Так, при применении r -алгоритмов это приводит к определенному способу установки начальной матрицы B_0 и последующей ее коррекции таким образом, чтобы для каждой точки итерационного процесса выполнялось равенство (6).

Итак, с помощью решения задачи (5) можно находить параметры регулярных 3D-структур, а с помощью решения задачи (5)–(6) восстанавливать параметры базисных регулярных 3D-структур. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если 3D-структура $\{A, u, v\}$ регулярная, то в задаче (5) решение x_p^* и y_p^* такое, что $f_p^* = f(x_p^*, y_p^*) = 0$, а 3D-структура $\{A, x_p^*, y_p^*\}$ является регулярной. Если регулярная 3D-структура $\{A, u^*, v^*\}$ базисная, то в задаче (5)–(6) решение x_p^{**} и y_p^{**} такое, что $f_p^* = f(x_p^{**}, y_p^{**}) = 0$, а $u^* = x_p^{**}$ и $v^* = y_p^{**}$.

Если к регулярной 3D-структуре прибавить один или несколько элементарных дефектов, то $f_p^* \neq 0$ как для задачи (5), так и для задачи (5)–(6). При этом выбор параметра p существенно влияет на то, сможем ли мы найти параметры регулярных 3D-структур. Это иллюстрируют вычислительные эксперименты по восстановлению параметров $u^* = (1, 0, 2)^T$ и $v^* = (1, 0, 1, 0, 1)^T$ для базисной

регулярной 3D-структуры $\{A^*, u^*, v^*\}$ по 3×5 -матрицам $A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1+1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

и $A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1+1 & 0 & 1 \\ 3 & 2+1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, которые содержат один и три элементарных дефек-

та (см. рис. 3). Их результаты для десяти значений $p \in [1, 2]$ отражены в табл. 1, где приведены значения p (первый столбец), оптимальные значения целевых функций (столбцы $f_p(x_p^{**}, y_p^{**})$) и отклонения найденных параметров x_p^{**} и y_p^{**} от точных $u^* = (1, 0, 2)^T$ и $v^* = (1, 0, 1, 0, 1)^T$ (столбцы $\|u^* - x_p^{**}\|$ и $\|v^* - y_p^{**}\|$). Здесь с помощью r -алгоритма (программа galgb5 [5]) решалась оптимизационная задача (11) при $M = 1$ и $q = 1$.

Таблица 1

p	Один дефект ($A = A_1$)			Три дефекта ($A = A_2$)		
	$f_p(x_p^{**}, y_p^{**})$	$\ u^* - x_p^{**}\ $	$\ v^* - y_p^{**}\ $	$f_p(x_p^{**}, y_p^{**})$	$\ u^* - x_p^{**}\ $	$\ v^* - y_p^{**}\ $
1,00	1,00000	0,00000	0,00000	3,00000	0,00000	0,00000
1,05	1,00000	0,00000	0,00000	2,84709	0,00000	0,00000
1,06	1,00000	0,00000	0,00001	2,81912	0,00001	0,00001
1,08	0,99999	0,00004	0,00016	2,76550	0,00011	0,00021
1,10	0,99991	0,00021	0,00089	2,71461	0,00063	0,00118
1,20	0,99472	0,00693	0,02762	2,48527	0,01968	0,03653
1,40	0,94620	0,04579	0,13764	2,09220	0,09757	0,18108
1,60	0,87096	0,09568	0,21940	1,79311	0,15558	0,28875
1,80	0,79586	0,14130	0,27027	1,57515	0,19226	0,35681
2,00	0,73030	0,17854	0,30334	1,41421	0,21651	0,40182

Из табл. 1 видно, что при $p = 1$ (соответствует методу наименьших модулей) параметры $u^* = (1, 0, 2)^T$ и $v^* = (1, 0, 1, 0, 1)^T$ восстанавливаются точно и при одном и при трех элементарных дефектах. Об этом свидетельствуют оптимальные значения функций, которые для одного и трех дефектов должны равняться $\|A_1 - A^*\| = 1$ и $\|A_2 - A^*\| = 3$ соответственно. Похожее поведение наблюдается и

для значений p , которые близки к единице. Но совсем другая картина имеет место при $p = 2$ (соответствует методу наименьших квадратов) и значениях p , которые близки к двойке. Здесь говорить о достаточно точном восстановлении параметров не приходится, так как отклонения найденных параметров x_2^{**} и y_2^{**} от точных значений параметров u^* и v^* уже достаточно большие как при наличии одного, так и при наличии трех элементарных дефектов.

3. Методы наименьших квадратов и наименьших модулей

Метод наименьших квадратов (МНК) и метод наименьших модулей (МНМ) являются важными частными случаями методов решения оптимизационных задач (5) и (5)–(6). Так, МНК получается, если выбрать $p = 2$, а МНМ — если выбрать $p = 1$. Если методы связаны с решением задачи (5), то они позволяют находить наилучшие параметры регулярных 3D-структур, а если с решением задачи (5)–(6), то — наилучшие параметры базисных регулярных 3D-структур. Для обоих методов справедлива теорема 1, а значит, МНМ и МНК позволяют восстанавливать параметры базисных регулярных 3D-структур. Это можно сделать двумя способами: первый — найти одно из решений задачи (5) и применить формулу (3) из леммы 2, второй — найти единственное решение задачи (5)–(6). Для регулярных 3D-структур с одним или несколькими дефектами поведения МНК и МНМ существенно различаются. Так, если у МНК нет шансов восстановить параметры регулярных 3D-структур с дефектами, то у МНМ такие шансы очень большие, что подтверждают результаты вычислительных экспериментов из табл. 1.

Соответствующие методам МНК и МНМ оптимизационные задачи можно упростить. Так, для МНМ задача выпуклого программирования (7)–(9) переходит в следующую задачу линейного программирования:

$$f_1^* = f_1(z^*, x^*, y^*) = \min_{z \in R^{m \times n}, x \in R^m, y \in R^n} \left\{ f_1(z, x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} \right\} \quad (12)$$

при ограничениях (8)–(9) (для регулярных структур), либо (8)–(9), (6) для (базисных регулярных структур). Для МНМ задача выпуклого программирования (7)–(9) переходит в задачу квадратического программирования

$$(f_2^*)^2 = (f_2(z^*, x^*, y^*))^2 = \min_{z \in R^{m \times n}, x \in R^m, y \in R^n} \left\{ (f_2(z, x, y))^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 \right\} \quad (13)$$

при ограничениях (8)–(9) (для регулярных структур), либо (8)–(9), (6) для (базисных регулярных структур). Для задач линейного и квадратического программирования нет никаких трудностей, связанных с областью определения целевой функции, которые обсуждались для задачи (7)–(9). Кроме того, их легко дополнять линейными ограничениями, которые могут задавать дополнительные условия на искомые параметры регулярных 3D-структур.

Несмотря на то, что указанные задачи могут иметь достаточно большие размеры, для их решения можно успешно применять стандартное программное обеспечение, используемое для решения задач линейного и квадратического программирования. Так, задачи линейного программирования с сотнями тысяч переменных решаются за минуты на современных персональных компьютерах. Следовательно, нахождение параметров 3D-структур при $m \approx 500$ и $n \approx 500$ представляется достаточно реалистичным с помощью современных программ для решения задач линейного программирования. Для задачи квадратического про-

граммирования размеры m и n будут несколько меньше. Менее чувствительными к размерам 3D-структур будут методы МНК и МНМ, которые используют оптимизационные задачи, полученные непосредственным упрощением задач (5) и (5)–(6).

МНК для нахождения параметров регулярной 3D-структуры связан с решением такой задачи: найти

$$(f_2^*)^2 = (f_2(x^*, y^*))^2 = \min_{x \in R^m, y \in R^n} \left\{ (f_2(x, y))^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - x_i - y_j)^2 \right\}, \quad (14)$$

а для нахождения параметров базисной регулярной 3D-структуры — с решением задачи: найти

$$(f_2^*)^2 = (f_2(x^{**}, y^{**}))^2 = \min_{x \in R^n, y \in R^n} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_{ij} - x_i - y_j)^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^m y_j \right)^2 \right\}. \quad (15)$$

Задачи (14) и (15) являются задачами минимизации выпуклой квадратичной функции от $N = m + n$ переменных, с тем отличием, что первая задача имеет много решений, а вторая — единственное.

Задачи (14) и (15) отличаются от тех негладких задач, которые непосредственно следуют из формулировок (5) и (5)–(6). В них из L_2 -нормы опущена операция извлечения корня квадратного, и сделано это для того, чтобы иметь дело с минимизацией квадратичных функций. Кроме того, для задачи (15) штраф за нарушение равенства (6) выбран равным единице, поскольку в этом случае нахождение минимума квадратической функции связано с решением «блочной-диагональной» системы линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} nI_m + e_m e_m^T & 0 \\ 0 & mI_n + e_n e_n^T \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^{**} \\ y^{**} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{ij}, i=1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}, j=1, \dots, n \end{vmatrix}, \quad (16)$$

где I_n — единичная $n \times n$ -матрица, I_m — единичная $m \times m$ -матрица. Из (16) получаем аналитическое решение задачи (15):

$$\begin{aligned} x_i^{**} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} - \frac{1}{n(n+m)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad i=1, \dots, m, \\ y_j^{**} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_{ij} - \frac{1}{m(n+m)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad j=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (17)$$

Формулы (17) объясняют, почему МНК не может восстановить регулярную 3D-структуру с одним элементарным дефектом. Действительно, если для какой-то пары индексов i, j имеем $a_{ij} = u_i^* + v_j^* + \Delta$, где $\Delta \neq 0$, то из формул (17) следует, что $x_i^{**} \neq u_i^*$ для всех $i=1, \dots, n$ и $y_j^{**} \neq v_j^*$ для всех $j=1, \dots, m$. Кроме того, для единственного элементарного дефекта $a_{ij} = u_i^* + v_j^* + \Delta$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} \|x^{**} - u^*\| &= \sqrt{\frac{n+m-2}{n^2(n+m)} + \frac{m}{n^2(n+m)^2}} |\Delta| \neq 0, \\ \|y^{**} - v^*\| &= \sqrt{\frac{n+m-2}{m^2(n+m)} + \frac{n}{m^2(n+m)^2}} |\Delta| \neq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Если формулы (18) применить для $\Delta = 1$, $m = 3$ и $n = 5$, то получим отклонения $\|u^* - x_p^{**}\| = 0,17854$ и $\|v^* - y_p^{**}\| = 0,30334$ из последней строки табл. 1, которые при $p = 2$ получены с помощью r -алгоритма для регулярной 3D-структуры с одним дефектом: $a_{23} = a_{23}^* + 1$.

Задачи (14) и (15) могут служить тестовыми примерами для проверки сходимости алгоритмов минимизации гладких выпуклых функций. Аналитическое решение (18) в сочетании с формулами леммы 2 позволяет оценить отклонение найденного решения от точного. При этом если для задачи (15) применимы алгоритмы ньютоновского типа, то для задачи (14) они неприменимы, так как матрица квадратичной формы вырождена, ее ранг равен $m + n - 1$ и он на единицу меньше, чем количество переменных $N = m + n$. Но задача (14) удобна для градиентных методов, в том числе и предельных вариантов r -алгоритмов, которые сходятся за не более чем за N итераций (см. теорему 1 в [6]). Для нее, учитывая, что множество решений неоднозначно, легче найти одну точку из множества оптимальных точек, чем найти единственную оптимальную точку в задаче (15). Поэтому алгоритмы, решающие обе задачи с подобными затратами для одной и той же точности, будут более предпочтительными, чем алгоритмы, которые хорошо решают одну задачу и плохо — другую. Более того, задачу (15) можно усложнить, умножив последний член суммы на некоторый штраф $M > 0$, управление которым позволяет изменять степень вытянутости квадратичных функций.

В отличие от МНК, оптимизационные задачи для МНМ следуют из (5) и (5)–(6) без всяких ухищрений. Так, МНМ для нахождения параметров регулярной 3D-структуры используется для решения такой задачи: найти

$$f_1^* = f_1(x^*, y^*) = \min_{x \in R^m, y \in R^n} \left\{ f_1(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij} - x_i - y_j| \right\}, \quad (19)$$

а для нахождения параметров базисной регулярной 3D-структуры — для решения задачи: найти

$$f_1^* = f_1(x^*, y^*) = \min_{x \in R^m, y \in R^n} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij} - x_i - y_j| + \left| \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j \right| \right\}. \quad (20)$$

Задачи (19) и (20) — задачи минимизации выпуклой кусочно-линейной функции от $N = m + n$ переменных, где первая имеет много решений, а вторая — одно. Для решения негладких задач (19) и (20) можно использовать как субградиентные методы минимизации негладких выпуклых функций [3,4], так и специальные итеративные методы, например метод вариационно-взвешенных квадратичных приближений [7].

Робастность МНМ для 3D-структур с дефектами подтверждена вычислительными экспериментами в предыдущем разделе. Это означает, что если 3D-структура регулярна и к ней добавлены одна или несколько областей с дефектами, то параметры регулярной 3D-структуры более точно определяются с помощью МНМ, чем с помощью МНК. Это подтверждается рис. 4, где проиллюстрированы результаты работы обоих методов для автоматического определения нерегулярности в 3D-структурах. Это сделано для двух изображений, которые аналогичны получаемым методами лазерной интерферометрии (рис. 4, в центре). Верхнее изображение содержит одну область с дефектами, а нижнее — две области с дефектами. Первая дефектная область с центром в точке с координатами $(i, j) = (55, 74)$ со значительным отклонением от регулярной структуры легко идентифицируется оператором неразрушающего контроля качества. Вторая

дефектная область с центром в точке с координатами $(i, j) = (37, 37)$ может быть пропущена оператором из-за низкой контрастности изображений. На рис. 4 (слева и справа) приведены абсолютные разности между коэффициентами матрицы для 3D-структур с дефектами и коэффициентами матриц регулярных 3D-структур, найденных с помощью МНК и МНМ. Из рис. 4 видно, что МНМ однозначно определяет координаты дефектов, в отличие от МНК, который ошибочно выделяет участки вдоль столбцов и строк каждого дефекта.

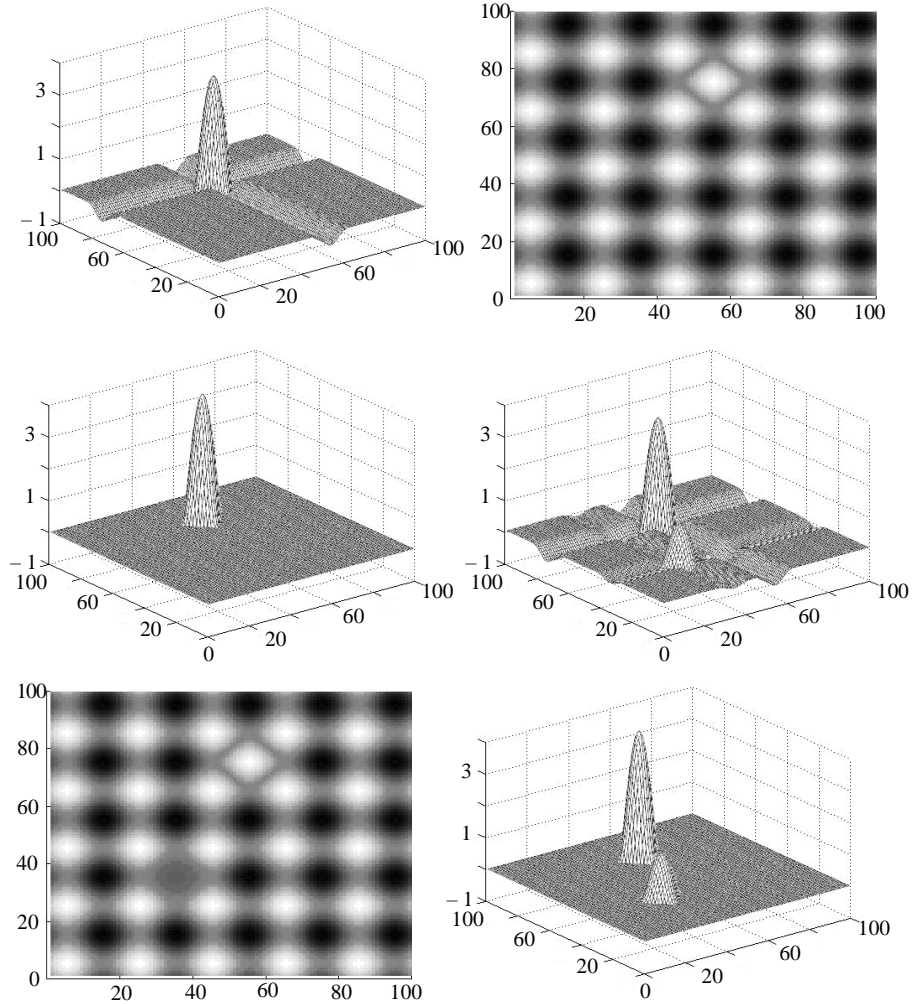


Рис. 4

На основе Octave-функции `galgb5` [5], одной из современных реализаций r -алгоритма Шора, разработаны программы на языке Octave для МНМ, где решается задача (14), и для МНК, где решается задача (19). Для регулярной 3D-структуры, где $n = 600$ и $m = 400$, временные и другие затраты обеих программ приведены в табл. 2. Вычисления проводились на компьютере Pentium 3GHz в системе Windows7/32, используя GNU Octave версии 3.6.4.

Таблица 2

№ п/п	МНК			МНМ		
	itn	nfg	time	Itn	nfg	time
1	457	700	10,58	411	502	11,76
2	494	785	11,59	413	505	11,79
3	426	647	9,77	412	503	11,77
4	453	702	10,50	412	502	11,77
5	488	764	11,34	410	499	11,69

В таблице для пяти тестовых примеров $a_{ij} = u_i + v_j$, где компоненты векторов $u \in R^{400}$ и $v \in R^{600}$ генерировались датчиком случайных чисел в диапазоне от 0 до 10, приведены: `itn` — количество итераций, `png` — количество вычислений значения функции и ее субградиента, `time` — время выполнения программы в секундах. Из таблицы видно, что для решения задач с помощью МНК и МНМ достаточно около 10 с, это означает, что разработанные программы можно использовать в диалоговом режиме для нахождения параметров регулярных изображений.

4. О неравенствах для суммы квадратов двух наборов чисел

В разд. 1 при описании базисных регулярных 3D-структур (определение 2) неявно использовалось неравенство, которое связано с формулами (1) и (2) для минимизации одномерной квадратичной функции $f(t)$. Поскольку это неравенство может представлять и самостоятельный интерес, ниже изложим его в расчете на самый общий случай.

Теорема 2. Для n чисел a_1, \dots, a_n и m чисел b_1, \dots, b_m всегда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^m b_j^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)^2}{n+m}, \quad (21)$$

которое как равенство выполняется, если и только если $a_1 = \dots = a_n = c$ и $b_1 = \dots = b_m = -c$, где c — произвольная константа.

Доказательство. Покажем справедливость неравенства

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^m b_j^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)^2}{n+m} \geq 0, \quad (22)$$

которое равносильно неравенству (21). Левую часть неравенства (22) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^m b_j^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)^2}{n+m} = \\ & = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^m b_j^2 - \frac{2 \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)^2}{n+m} + \frac{(m+n) \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)^2}{(n+m)^2} = \\ & = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)}{n+m} + \frac{n \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)^2}{(n+m)^2} + \\ & + \sum_{j=1}^m b_j^2 + 2 \sum_{j=1}^m b_j \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)}{n+m} + \frac{m \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)^2}{(n+m)^2} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)}{n+m} \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(b_j + \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)}{n+m} \right)^2.$$

Следовательно, неравенство (22) можно переписать в эквивалентной форме

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)}{n+m} \right)^2 + \sum_{j=1}^m \left(b_j + \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)}{n+m} \right)^2 \geq 0, \quad (23)$$

для которой очевидно, что оно будет выполняться для произвольных последовательностей чисел a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_m . Более того, из неравенства (23) видно, что оно превращается в равенство, если

$$a_1 = \dots = a_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)}{n+m}, \quad b_1 = \dots = b_m = -\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{j=1}^m b_j \right)}{n+m},$$

что возможно, если и только если $a_1 = \dots = a_n = c$ и $b_1 = \dots = b_m = -c$, где c — произвольная константа.

Доказательство теоремы завершено.

Если в теореме 2 взамен последовательности чисел b_1, \dots, b_m использовать последовательность чисел $-b_1, \dots, -b_m$, то получим справедливость еще одного неравенства, которое более простое, чем неравенство (21).

Теорема 3. Для n чисел a_1, \dots, a_n и m чисел b_1, \dots, b_m всегда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{j=1}^m b_j^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^m b_j \right)^2}{n+m}, \quad (24)$$

которое как равенство выполняется, если и только если $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_m$.

Теорему 3 легко доказать по той же схеме, по которой доказана теорема 2.

Из теорем 2 и 3 следует ряд известных неравенств. Так если $m = n = 1$, то получаем хорошо известные «школьные» неравенства

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a-b)^2}{2} \quad \text{и} \quad a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Если выбрать $n = m$ и одинаковые последовательности чисел, т.е. $b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n$, то из неравенства (24) теоремы 3 получим неравенство

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{n}, \quad (25)$$

которое выполняется как равенство, если и только если $a_1 = \dots = a_n$. Это же неравенство можно получить и из теоремы 2, если выбрать $n = m$ и $b_1 = -a_1, \dots, b_n = -a_n$.

Задача «Докажите неравенство (25)» включена в [8] (№ 8.10, с. 97). В книге дано такое решение задачи 8.10: «Неравенство (25) является частным случаем неравенства Коши

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right), \quad (26)$$

в котором достаточно положить $b_1 = \dots = b_n = 1$ ».

Однако более элегантно будет доказательство, которое легко провести по той же схеме, что и доказательство теоремы 2. Для этого достаточно неравенство (25) заменить на эквивалентное неравенство

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 - \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{n} \geq 0, \quad (27)$$

для которого левую часть можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1^2 + \dots + a_n^2 - \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{n} &= a_1^2 + \dots + a_n^2 - \frac{2(a_1 + \dots + a_n)^2}{n} + \frac{n(a_1 + \dots + a_n)^2}{n^2} = \\ &= a_1^2 - 2a_1 \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n} + \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{n^2} + \dots + a_n^2 - 2a_n \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n} + \\ &+ \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{n^2} = \left(a_1 - \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n}\right)^2 + \dots + \left(a_n - \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (17) можно переписать в эквивалентной форме

$$\left(a_1 - \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n}\right)^2 + \dots + \left(a_n - \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n}\right)^2 \geq 0, \quad (28)$$

откуда очевидно, что неравенство (28) выполняется для произвольных n чисел a_1, \dots, a_n .

Аналогичное доказательство можно провести и для неравенства (16) — неравенства Коши–Буняковского–Шварца. Для этого достаточно неравенство (16) заменить на эквивалентное неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2 - \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 / \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^2\right) \geq 0 \quad (29)$$

в предположении $\sum_{i=1}^n b_i^2 > 0$. Левую часть неравенства (29) можно записать таким

образом:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^2} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2 - \frac{2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^4} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(a_i^2 - \frac{2a_i b_i \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^2} + \frac{b_i^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^4} \right) = \sum_{i=1}^n \left(a_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^2} b_i \right)^2.$$

Следовательно, неравенство (29) можно переписать в эквивалентной форме

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^2} b_i \right)^2 \geq 0, \quad (30)$$

откуда очевидно, что неравенство (30) будет выполняться для произвольных n чисел a_1, \dots, a_n и n чисел b_1, \dots, b_n .

Заключение

В статье рассмотрены регулярные и базисные регулярные 3D-структуры, для них сформулированы оптимизационные задачи нахождения наилучших в L_p -норме параметров и исследованы методы решения рассмотренных задач. Особое внимание уделено частным случаям методов — методу наименьших квадратов и методу наименьших модулей. Показано, что при восстановлении параметров 3D-структур с дефектами метод наименьших модулей более устойчив, чем метод наименьших квадратов. Приведены результаты вычислительных экспериментов для программных реализаций методов на основе r -алгоритма, которые позволяют оценить их временные затраты при нахождении параметров регулярных 3D-структур больших размеров (400 строк и 600 столбцов).

Регулярные изображения с областями дефектов характерны при неразрушающем контроле качества тонкостенных многослойных композиционных материалов с помощью методов лазерной интерферометрии, таких как метод голографической интерферометрии, метод спекл-интерферометрии и метод широкографии [1]. Описанные в статье методы для поиска дефектных участков позволяют автоматизировать процесс определения местоположения дефектов в ответственных элементах конструкций и снизить влияние человеческого фактора при неразрушающем контроле качества. Оптимизационные задачи для изображений с 400 пикселями по вертикали и 600 по горизонтали можно решать в диалоговом режиме, так как для этого требуется около 10 с на современных персональных ЭВМ с использованием GNU Octave версии 3.6.4.

Разработанные Octave-программы легко переписать на языки Фортран и Си, используя библиотеку базовых подпрограмм линейной алгебры BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) или библиотеку математических прикладных программ IntelR Math Kernel Library (IntelR MKL), которые оптимизированы под современные вычислительные машины. Это может позволить значительно ускорить методы для решения больших задач (тысяча и более переменных), например, за счет использования вычислительных мощностей графического процессора, которые в разы превышают вычислительные мощности классических процессоров. Так, существенное ускорение можно получить, используя для расчетов технологию CUDA на графических ускорителях. Это подтверждает гибридная реализация r -алгоритма [9], где сокращение времени, которое достигается при решении задач с 1000 — 8000 переменными, варьируется от 14 до 18 раз.

Авторы благодарны И.И. Ткачеву и М.И. Шлезингеру за обсуждение задач и ценные советы, Т.А. Бардадым и А.В. Фесюку за помощь при подготовке рукописи статьи.

П.І. Стецюк, В.В. Савицький

ПРО ПОШУК ДЕФЕКТІВ В РЕГУЛЯРНИХ 3D-СТРУКТУРАХ

Розглянуто оптимізаційні задачі для знаходження найкращих в L_p -нормі параметрів регулярних 3D-структур і методи їх розв'язання. Показано, що при відновленні параметрів 3D-структур з дефектами метод найменших модулів більш стійкий, ніж метод найменших квадратів. Наведено результати обчислювальних експериментів для програмних реалізацій методів на основі r -алгоритму Шора.

P.I. Stetsyuk, V.V. Savitsky

ON DEFECTS SEARCH IN REGULAR 3D-STRUCTURES

Optimization problems for finding the best in L_p -norm parameters of regular 3D-structures and methods for their solution are considered. It is shown that when restoring the parameters of 3D structures with defects, the least moduli method is more stable than the least squares method. The results of computational experiments for software implementations of methods based on Shor's r -algorithm are reported.

1. *Lobanov L.M., Pivtorak V.A., Kyjanets I.V., Savitsky V.V., Tkachuk G.I.* Express control of quality and stressed state of welded structures using method of electron shearography and speckle-interferometry. — The Paton Welding Journal. — August, 2005. — P. 35–40.
2. *Стецюк П.І., Савицький В.В.* О робастности метода наименьших модулей для поиска дефектов в регулярных 3D-структурах // Матеріали Дев'ятого Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», присвяченого пам'яті д.ф.-м.н., професора А.Я. Петренюка (Кропивницький, 7–8 квітня 2017 року). — 2017. — С. 127–132.
3. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1979. — 200 с.
4. *Стецюк П.І.* Методы эллипсоидов и r -алгоритмы. — Кишинэу : Эврика, 2014. — 488 с.
5. *Стецюк П.І.* Субградиентные методы ralgb5 и ralgb4 для минимизации овражных выпуклых функций // Вычислительные технологии. — 2017. — 22, № 2. — С. 127–149.
6. *Стецюк П.І.* Теория и программные реализации r -алгоритмов Шора // Кибернетика и системный анализ. — 2017. — № 5. — С. 43–57.
7. *Мудров В.И., Кушко В.Л.* Метод наименьших модулей. — М. : Знание, 1971. — 64 с.
8. *Прасолов В.В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М. : МЦНМО, 2007. — 608 с.
9. *Стецюк П.І., Хімич О.М., Сидорук В.А.* Реалізація r -алгоритму на графічних процесорах // Комп'ютерна математика. — 2016. — № 2. — С. 100–109.

Получено 15.08.2017