

# МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

---

УДК 517.9:62.50

*Ю.П. Ладиков-Роев, В.Е. Набивач*

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕННОМ ЦИЛИНДРЕ С ОДНОРОДНЫМИ ТОКАМИ И ЗАВИХРЕННОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ РАДИАЛЬНОГО ПОТОКА ТЕПЛА

### Введение

Исследование вихревых структур в сплошных средах имеет значение в силу большого спектра возможных приложений [1]. Модели вихревых структур хорошо описывают движение подводных аппаратов, крупномасштабную динамику атмосферы и океана, используются для анализа движений различных вихревых образований, таких как циклоны, торнадо, океанические ринги (ocean rings), динамики примесей, загрязнений, некоторых аспектов прогнозов погоды, включая космическую погоду, позволяют объяснить явления астрофизики, при описании движений вихрей в сверхтекучих жидкостях [2–6].

В нижней части солнечной атмосферы хромосфера пронизана струями, известными как спиккулы [7, 8]. В них плазма движется со скоростью 50–150 км в секунду. Происхождение спиккул недостаточно изучено, хотя предполагается, что они играют роль в нагревании короны Солнца в миллионы раз и связаны с волнами Альфвена, которые управляют солнечным ветром [9, 10].

Известно, что в солнечной атмосфере встречаются более «холодные» замагниченные конфигурации в виде магнитных силовых трубок [11]: аркады, протуберанцы, волокна, коронарные выбросы, хромосферные вспышки и т.д. [2, 9]. Некоторые из них довольно продолжительное время сохраняют свою устойчивость [12].

В настоящей работе рассмотрен вопрос влияния тепловых потоков короны Солнца на магнитные конфигурации плазмы с более низкой температурой. В этом смысле рассматривается случай, альтернативный горячим спиккулам, нагревающим плазму короны Солнца. При построении исследовательской модели наряду с осевой скоростью магнитной силовой трубки учитывается ее вращение и завихренность, что оказывает существенное влияние на устойчивость.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим возмущенные течения плазмы в круглой цилиндрической магнитной трубке радиусом  $a$  с азимутальным вращением со скоростью  $V_{\phi}^0 = \Omega \cdot R$ , вертикальным однородным магнитным полем  $B_z^0$  и азимутальным магнитным полем  $B_{\phi}^0 = \frac{B_0}{a} R$ , возникающим в среде с однородной температурой  $T_0^e$ . Пред-

полагаем, что внутри трубки и около ее оси температура равна  $T_0^i$ , а также, что внутри температура трубки распределена следующим образом: на интервале от оси цилиндра до радиуса  $a_0$  она постоянна и равна  $T_0^i$ , а от  $a_0$  до  $a$  меняется линейно с градиентом  $\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{T^e T^i}{a \cdot a_0} = A$ .

## 2. Построение исследовательской модели

При такой постановке задачи необходимо рассматривать три области: внутреннюю до радиуса  $a_0$ , промежуточную в виде кольца с радиусами  $a_0$  и  $a$  и внешнюю с радиусом  $r > a$ . Решения на границе областей будем сшивать с помощью соответствующих граничных условий.

Для упрощения задачи примем следующее допущение. Будем считать, что радиус внутреннего цилиндра  $a_0$  очень мал, практически совпадает с осью цилиндра. Тогда температуру на оси цилиндра можно вычислить с помощью функции Дирака

$$T_R = \int_0^a aA\delta(r)d\xi.$$

Температура в трубке будет определяться линейной зависимостью  $T^i = A \cdot R$ . Градиент температуры в этом случае имеет вид  $\nabla T_0^i = A \cdot \vec{e}_r$ .

В равновесном состоянии из уравнений магнитной гидродинамики (МГД) [9, 12] в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  получаем

$$\vec{J} = \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi \vec{e}_z + \frac{\partial B_z}{\partial r} \vec{e}_\varphi, \quad \text{rot } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_\varphi.$$

В дальнейшем будем считать  $j_z = J = \text{const}$ ,  $j_\varphi = 0 = \frac{\partial B_z}{\partial r}$ ,  $\text{rot } \vec{V} = 2\Omega = \text{const}$ .

При этих предположениях получаем  $rJ = \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi$  и  $B_\varphi = \frac{Jr}{2}$ ,  $V_\varphi = \Omega r$ . При

$r = a$ ,  $B_\varphi = B_z$ ,  $V_\varphi = V_0$ ,  $J = \frac{2B_0}{a}$ ,  $\Omega = \frac{V_0^0}{a}$  получаем  $B_\varphi = B_0 \frac{r}{a}$ ,  $V_\varphi = V_0^0 \frac{r}{a}$ .

Далее ограничимся силовой частью задачи и будем считать, что сжимаемость среды не существенна. В этом случае уравнение состояния среды  $\rho = \rho(T, P)$  значительно упрощается. Соответствующие приближенные уравнения при сделанном предположении обычно называются уравнениями в приближении Буссинеска [1, 13]. При этом плотность среды определяется уравнением

$$\rho = \rho_0 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' = \rho_0 \left( 1 + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p T' \right) = \rho_0 (1 - \beta T'), \quad \beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}.$$

Здесь  $T'$  — возмущение температуры. Также будем считать, что магнитное поле, скорость и давление испытывают малые возмущения:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}', \quad P = P_0 + P', \quad T = T_0 + T', \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (1)$$

Уравнения магнитной гидродинамики [14] для возмущений в области  $r < a$  с учетом  $V_z^0 = 0$  имеют вид:

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial V'_r}{\partial t} + \frac{V_\phi^0}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{2V_\phi^0 V_\phi}{r} \right] + \rho_0 T' \frac{V_\phi^{0^2}}{r} = -\frac{\partial P'_1}{\partial r} + im \frac{B_0}{a} B'_r + ik_z B_z^0 B'_r - 2 \frac{B_0}{a} B'_\phi, \quad (2)$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial V'_\phi}{\partial t} + 2V_r \Omega + im \Omega V_\phi \right] = -\frac{im}{r} P'_1 + \frac{B_0}{a} im B'_\phi + B_z^0 ik_z B'_\phi + \frac{2B_0}{a} B'_z, \quad (3)$$

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial V'_z}{\partial t} \right] = -ik_z P'_1 + \left( \frac{B_0}{a} im + ik_z B_z^0 \right) B'_z, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V'_r) + \frac{im}{r} V'_\phi + ik_z V'_z = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + AV_r + \frac{im}{r} T' V_\phi^0 = \chi \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} T' - k_z^2 T' \right], \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \text{rot}[V \times \vec{B}_0] + \text{rot}[V^0 \times B]. \quad (7)$$

При получении (1)–(7) предполагалось, что любую из возмущенных величин можно представить в виде  $F(r, \phi, z, t) = F(r) \cdot e^{i(m\phi + kz - \omega t)}$ . Фигурирующая в (6) величина  $\chi$  — коэффициент температуропроводности размерности  $[\chi] = a \cdot [V]$ .

Перейдем к безразмерным переменным:

$$r = ax, \quad z = l\xi, \quad \vec{V}' = \frac{\chi}{a} \vec{V}, \quad t = \frac{a^2}{\chi} \tau, \quad \omega = \frac{\chi}{a^2} \lambda, \quad \xi' = a\xi, \quad \vec{B}' = B_0 \vec{b},$$

$$T' = T_0 \theta = Aa\theta, \quad \frac{\Omega a^2}{\chi} = q, \quad p'_1 = \frac{\rho_0 \chi^2}{a^2} \Pi_1, \quad \frac{B_0^2 a^2}{\rho_0 \chi^2} = N, \quad \frac{\beta A \Omega^2 a^5}{\chi^2} = Gr.$$

Тогда из (7) получим следующие равенства:

$$b_r = -\frac{i\lambda\sigma}{qm - \lambda} \xi_r, \quad b_\phi = -\frac{i\lambda\sigma}{qm - \lambda} \xi_\phi, \quad b_z = -\frac{i\lambda\sigma}{qm - \lambda} \xi_z, \quad (8)$$

$$\sigma = m + n \frac{a}{l} B_1, \quad k_z = \frac{n}{l} B_1, \quad B_1 = \frac{B_z^0}{B_0}.$$

Предполагая, что цилиндр является «тонким», т.е. имеет большую высоту по сравнению с радиусом  $\frac{a}{l} \ll 1$ , из уравнения (5) можно исключить  $k_z V'_z$ , а из (6) —  $k_z^2 T'$ . Это позволяет исключить из системы уравнений величины  $V_z$  и  $b_z$ .

Учитывая (8) и уравнения (2), (3), (5), получаем

$$x^2 \frac{d^2 \xi_r}{dx^2} + 3x \frac{d\xi_r}{dx} + (1 - m^2) \xi_r = T \theta x, \quad T = \frac{Gr(qm - \lambda)}{\lambda[(qm - \lambda)^2 - N\sigma^2]}, \quad (9)$$

или, что то же самое,

$$x^2 \frac{d^2 V_r}{dx^2} + 3x \frac{dV_r}{dx} + (1 - m^2) V_r = T^* \theta x, \quad T^* = \frac{Gr(s + imq)}{(s + imq)^2 - N\sigma^2}, \quad (10)$$

где  $s = -i\lambda$ .

Из уравнения (6) имеем

$$\xi_r(x) = \frac{i}{\lambda} \left\{ \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \left( \frac{m^2}{x^2} + i(mq - \lambda) \right) \theta \right\} \quad (11)$$

или

$$V_r(x) = \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} - \left( \frac{m^2}{x^2} + (s + imq) \right) \theta. \quad (12)$$

Будем полагать, что во внешней области ( $r \geq a$ ) в невозмущенном состоянии плазма покоится ( $\vec{V}^0 = 0$ ) и градиент температуры равен нулю, т.е. температура постоянная —  $T_0^{(e)}$ . Из условия равновесия в невозмущенном состоянии получим

$$T_0^{(e)} = Aa, \quad \Pi_0^{(e)} = \Pi_0^{(i)} = \frac{1}{2}(q^2 - N), \quad \vec{V}^0 = 0.$$

Во внутренней области давление определяется уравнением  $\frac{dP_1^0}{dr} = \rho \frac{V_\phi^2}{r} - \frac{B_\phi^2}{r} = \rho_0 \Omega^2 r - \frac{B_0^2}{a^2} r$  или в безразмерных переменных —  $\frac{d\Pi_0^{(i)}}{dx} = (q^2 - N)x$ .

На границе цилиндра при  $r = a$  должны выполняться условия тангенциально-го разрыва: равенство смещений  $\xi_r$ , равенство давлений и равенство температур.

Запишем уравнения магнитной гидродинамики для возмущенных величин во внешней области  $x \geq 1$ :

$$\rho_0 \frac{dV_r'}{dv} = -\frac{\partial p_1'}{\partial r}, \quad \rho_0 \frac{dV_\phi'}{dv} = -\frac{im}{r} p_1',$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} zV_r' + \frac{im}{r} V_\phi' = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial t} = \chi \left[ \frac{d^2 T'}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT'}{dr} - \frac{m^2}{r^2} T' \right].$$

Переходя к безразмерным переменным, получаем следующие решения:  $\xi_r =$

$$= Cx^{-(1+m)}, \quad \Pi^{(e)} = -\frac{\lambda^2}{m} Cx^{-m} \quad \text{или}$$

$$V_r = Dx^{-(1+m)}, \quad \Pi^{(e)} = -\frac{i\lambda D}{m} x^{-m}, \quad (13)$$

$$\theta^{(e)} = MK_m(\sqrt{-i\lambda}x) \quad \text{или}$$

$$\theta = MK_m(\sqrt{s}x), \quad M = \text{const.}$$

Здесь  $K_m$  — функция Бесселя от мнимого аргумента.

### 3. Приближенное решение задачи

Для решения уравнений (9), (11) или (10), (12) воспользуемся методом Галлеркина второго типа [15]. В соответствии с этим методом зададимся пробной функцией  $\theta(x)$ , а величины  $\xi_r(x)$  или  $V_r(x)$  найдем из решений уравнений (9) или (10). Поскольку пробная функция должна удовлетворять граничным условиям

при  $r = 1$ , положим  $\theta^{(e)} = \frac{\partial \theta_0^{(i)}}{\partial x} \xi_r^{(i)} + \theta^{(i)}$ ,  $\xi_r^{(i)} = \xi_r^{(e)} = C$ .

Отсюда следует  $\theta^{(i)}(1) = M \cdot K_m \sqrt{-i\lambda} - AC = U$ . Кроме того, потребуем  $\theta^{(i)}(0) = 0$ . Ввиду изложенного выбираем пробную функцию в виде

$$\theta^{(i)}(x) = [M \cdot K_m \sqrt{-i\lambda} - AC] \cdot x^m \quad (14)$$

или  $\theta^{(i)}(x) = U \cdot x^m$ ,  $U$  — const.

Подставляя (14) в уравнение (9), получаем

$$x^2 \frac{d^2 \xi_r}{dx^2} + 3x \frac{d \xi_r}{dx} + (1 - m^2) \xi_r = T \cdot x^{m+1} \cdot U. \quad (15)$$

Решение однородного уравнения (15) имеет вид  $\xi_r(x) = C_1 x^{m-1} + C_2 x^{-(m+1)}$ . Пользуясь общими правилами [16] нахождения частного решения неоднородного уравнения, находим

$$\xi_r(x) = \frac{T \cdot U \cdot x^{m+1}}{4 \cdot (m+1)} + \hat{C}_1 x^{m-1}. \quad (16)$$

При  $x = 1$  радиальные смещения  $\xi_r^{(i)}$  и  $\xi_r^{(e)}$  должны быть равны, поэтому из соотношений (8) получим  $\frac{T \cdot U}{4 \cdot (m+1)} + \hat{C}_1 = C$ . Отсюда  $\hat{C}_1 = C - \frac{T \cdot U}{4 \cdot (m+1)}$ . Подставляя  $\hat{C}_1$  в (16), находим

$$\xi_r(x) = \frac{T \cdot U}{4 \cdot (m+1)} (x^{m+1} - x^{m-1}) + C \cdot x^{m-1}. \quad (17)$$

Таким образом, имеем две пробные функции: (14) и (17). Учитывая (3) и (4), находим выражение для функции  $\Pi_1(x)$ :

$$\begin{aligned} \Pi_1(x) = & \frac{\lambda}{m^2(qm - \lambda)} \left\{ -[(mq - \lambda)^2 + N\sigma^2] \times \right. \\ & \times \left. \left\{ \frac{T \cdot U}{4 \cdot (m+1)} \cdot [(m+2) \cdot x^{m+2} - m \cdot x^m] + m \cdot C \cdot x^m \right\} \right\} + \\ & + 2 \cdot m \cdot [q \cdot (qm - \lambda) - N \cdot \sigma] \cdot \left\{ [x^{m+2} - x^m] \cdot \frac{T \cdot U}{4 \cdot (m+1)} + C \cdot x^m \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

На границе исследуемой области при  $(x = 1)$  из (18) получим

$$\begin{aligned} \Pi_1(1) = & \frac{\lambda}{m^2(qm - \lambda)} \left\{ -[(mq - \lambda)^2 - N\sigma^2] \times \right. \\ & \times \left. \left[ \frac{T \cdot U}{2 \cdot (m+1)} + m \cdot C \right] + 2m \cdot [q(qm - \lambda) - N\sigma] \cdot C \right\}. \end{aligned}$$

Граничное условие в виде равенства давлений (при  $x = 1$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda^2}{m} C = & (q^2 - N) \cdot C + \frac{\lambda}{m^2(qm - \lambda)} \left\{ -[(mq - \lambda)^2 - N\sigma^2] \times \right. \\ & \times \left. \left[ \frac{T \cdot U}{2 \cdot (m+1)} + m \cdot C \right] + 2m \cdot [q(qm - \lambda) - N\sigma] \cdot C \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Далее следуем методу Петрова–Галеркина [17]. Найденные пробные функции  $\theta^{(i)}(x)$  (14) и  $\xi_r(x)$  (17) подставим в (11) и умножим на  $x \cdot (1-x)$ . В результате получим

$$C = U \left\{ \frac{(mq-\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{m+1}{m+3} + \Gamma \cdot \frac{2m+5}{2 \cdot (m+1)(m+3)(m+4)} \right\}. \quad (20)$$

В случае  $m=1$  из (20) следует  $C = U \cdot \left\{ \frac{7 \cdot \Gamma}{80} + \frac{q-\lambda}{2 \cdot \lambda} \right\}$ .

#### 4. Дисперсионное уравнение

Из условия равенства давлений получена система уравнений (19), (20):

$$\begin{cases} U \cdot \left[ \frac{\Gamma \cdot (2m+5)}{2 \cdot (m+1)(m+3)(m+4)} + \frac{(mq-\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{m+1}{m+3} \right] - C = 0, \\ U \cdot \frac{\lambda \cdot \Gamma \cdot [(mq-\lambda)^2 - N\sigma^2]}{2 \cdot m^2 \cdot (m+1) \cdot (qm-\lambda)} - \frac{C}{m} \cdot \Phi(\lambda) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\Gamma = \frac{Gr \cdot m^2 \cdot (qm-\lambda)}{\lambda \cdot [(qm-\lambda)^2 - N\sigma^2]}$ ;

$$\Phi(\lambda) = [\lambda^2 + m(q^2 - N)] - \lambda \frac{[(qm-\lambda)^2 - N\sigma^2]}{(q \cdot m - \lambda)} + 2m^2[q(qm-\lambda) - N\sigma]. \quad (22)$$

Введем обозначения

$$\frac{m+1}{(m+3)} = M_1, \quad \frac{2m+5}{(m+1)(m+3)(m+4)} = M_2 \quad (23)$$

и перепишем систему (21) в виде

$$\begin{cases} U \cdot \left[ \frac{\Gamma}{2} \cdot M_2 + \frac{(mq-\lambda)}{\lambda} \cdot M_1 \right] - C = 0, \\ U \cdot \frac{\lambda \cdot \Gamma \cdot [(mq-\lambda)^2 - N\sigma^2]}{2 \cdot m^2 \cdot (m+1) \cdot (qm-\lambda)} - \frac{C}{m} \cdot \Phi(\lambda) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Из (24) следует

$$-\frac{\Gamma}{2} \cdot M_2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \Phi(\lambda) - \frac{(mq-\lambda)}{\lambda \cdot m} \cdot M_1 \cdot \Phi(\lambda) + \frac{\lambda \cdot \Gamma \cdot [(mq-\lambda)^2 - N\sigma^2]}{2 \cdot m^2 \cdot (m+1) \cdot (qm-\lambda)} = 0$$

или

$$\frac{Gr}{2(m+1)} = \left\{ \frac{M_2}{2} \cdot \frac{Gr \cdot m^2}{[(mq-\lambda)^2 - N\sigma^2]} + \frac{M_1}{m} \right\} \cdot \frac{qm-\lambda}{\lambda} \cdot \Phi(\lambda). \quad (25)$$

Оценим величины  $M_1$  и  $M_2$ :  $M_1 \cong \frac{1}{2}$  при  $m=1$ ;  $M_1 \rightarrow 1$  при  $m \rightarrow \infty$ ;

$$\frac{M_2 \cdot m}{2} = \frac{(2m+5) \cdot m}{2(m+1)(m+3)(m+4)} = \frac{7}{80} \text{ при } m=1; \quad \frac{M_2 \cdot m}{2} = \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{10} \text{ при } m=2.$$

При не очень больших значениях  $Gr$  и  $m$  величиной  $Gr \cdot m \cdot \frac{M_2}{2}$  в уравнении (25) можно пренебречь, отсюда получим упрощенное уравнение

$$\frac{Gr \cdot m}{2 \cdot M_1 \cdot (m+1)} = \frac{qm-\lambda}{\lambda} \cdot \Phi(\lambda).$$

Подставляя  $M_1$ , получаем

$$\frac{Gr \cdot m \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)^2} = \frac{qm - \lambda}{\lambda} \cdot \Phi(\lambda)$$

или с учетом (22) —

$$\begin{aligned} & \{(qm - \lambda)(\lambda^2 + m(q^2 - N) - \lambda \cdot [(qm - \lambda)^2 - N \cdot \sigma^2] + 2 \cdot m^2 \cdot (qm - \lambda) \times \\ & \times [q \cdot (qm - \lambda) - N \cdot \sigma] - \frac{Gr \cdot m \cdot (m+3)}{2 \cdot (m+1)^2} \cdot \lambda = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Введем обозначения  $\frac{m(m+3)}{2 \cdot (m+1)^2} = M_3$ , при  $m=1$  имеем  $M_3 = \frac{1}{2}$ . Тогда уравнение (26) запишем так:

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - \lambda^2 \cdot qm(m+1,5) + 0,5 \cdot \lambda \cdot \{m \cdot q^2(1+m+4m^2) + \\ & + 0,5 \cdot M_3 \cdot Gr - N(m + \sigma^2 + 2m^2\sigma)\} - 0,5 \cdot [m^2q^3(1+2m^2) - Nqm^2(1+2m\sigma)] = 0. \end{aligned}$$

Введем еще обозначения:  $\lambda = q\eta$ ;  $\frac{Gr}{q^2} = R_\lambda$ ;  $\frac{N}{q^2} = W$ . Таким образом, дисперсионное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & \eta^3 - \eta^2 \cdot m \cdot (m+1,5) + 0,5 \cdot \eta \cdot \{m \cdot (1+m+4m^2) + \\ & + 0,5 \cdot M_3 \cdot R_\lambda - W \cdot (m + \sigma^2 + 2m^2\sigma)\} - 0,5 \cdot [m^2(1+2m^2) - Wm^2(1+2m\sigma)] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

При  $m=1$  и  $M_3 = 0,5$  дисперсионное уравнение (27) принимает вид

$$\eta^3 - 2,5 \cdot \eta^2 + 0,5 \cdot [6 + 0,5 \cdot R_\lambda - W \cdot (1 + \sigma^2 + 2\sigma)] \cdot \eta - 0,5 \cdot [3 - W \cdot (1 + 2\sigma)] = 0.$$

## 5. Исследование устойчивости

Для исследования устойчивости будем изучать типы корней уравнения (27). Для полученного дисперсионного уравнения третьего порядка можно предложить несколько методов исследования типов корней: методы теории катастроф для определения типа корней уравнений третьего порядка [18–20], формулу Кардано для решения уравнений третьего порядка [16], метод Штурма [21] для отделения корней таких уравнений.

Представим уравнение (27):

$$\eta^3 + \alpha_1 \cdot \eta^2 + \alpha_2 \cdot \eta + \alpha_3 = 0, \quad (28)$$

где отображение параметров дисперсионного уравнения (27) в параметры уравнения (28) имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2,5, \\ \alpha_2 = 0,5 \cdot [6 + 0,5 \cdot M_3 \cdot R_\lambda - W \cdot (1 + \sigma)^2], \\ \alpha_3 = -0,5 \cdot [3 - W \cdot (1 + 2\sigma)]. \end{cases} \quad (29)$$

Теперь приведем уравнение (28), используя замену переменных

$$\eta = x - \frac{\alpha_1}{3}, \quad (30)$$

к каноническим параметрам каспоидных катастроф (cuspid catastrophes) теории особенностей дифференцируемых отображений [20] и получим уравнение (28) в каноническом виде:

$$x^3 + \beta_2 \cdot x + \beta_3 = 0. \quad (31)$$

Отображение параметров уравнения (28) в канонические параметры особенности коразмерности два, «сборка», имеет вид

$$\begin{cases} \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{3}, \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{3} + \frac{2 \cdot \alpha_1^3}{27}. \end{cases} \quad (32)$$

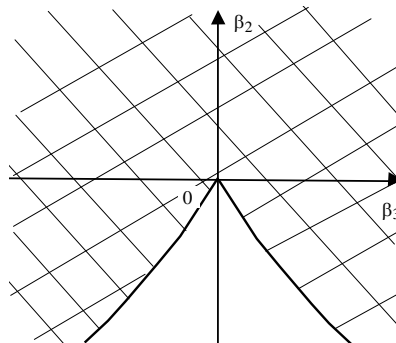
Замена переменных (30) не изменяет типов корней исходного уравнения (27).

Будем ассоциировать особое многообразие катастрофы коразмерности два теории особенностей дифференцируемых отображений, «сборка» в классификации Арнольда–Тома с полученным дисперсионным уравнением (28). Тогда особое многообразие катастрофы коразмерности два теории особенностей дифференцируемых отображений, катастрофы «сборка» в канонических параметрах (31) имеет вид  $4 \cdot \beta_2^3 + 27 \cdot \beta_3^2 = 0$ .

Это особое многообразие отделяет область действительных корней уравнения (31) и соответствует случаю, когда третья функция разложения в ряд Штурма равна нулю. Особое многообразие катастрофы «сборка» в канонических параметрах (31) представлено на рисунке, где  $\beta_2 = 0,25 \cdot [3,67 - 2 \cdot W(1 + \sigma)^2 + R_\lambda]$ ,  $\beta_3 = \frac{1}{3} \cdot [-0,47 + W \cdot (0,25 + 0,5 \cdot \sigma - 1,25 \cdot \sigma^2) + 0,625 \cdot R_\lambda]$ , а область неустойчивости плазменного цилиндра заштрихована. Из рисунка следует, что при  $\beta_2 > 0$  уравнение (31) имеет комплексные корни наряду с одним действительным, т.е. независимо от значений  $\beta_2$  канонического параметра уравнения (31) плазменный шнур рассматриваемой конфигурации неустойчив; при  $\beta_2 < 0$ , уравнение (31) имеет комплексные корни при выполнении неравенства  $4 \cdot \beta_2^3 + 27 \cdot \beta_3^2 > 0$ , т.е. при выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} \beta_2 < 0, \\ 4 \cdot \beta_2^3 + 27 \cdot \beta_3^2 > 0 \end{cases}$$

в параметрах уравнения (31) плазменный шнур рассматриваемой конфигурации также неустойчив.





Условия неустойчивости исследуемой конфигурации можно получить и другим более известным способом. Используя формулу Кардано для уравнения третьего порядка в каноническом виде, получим условие, когда это уравнение имеет комплексные корни:

$$\frac{\beta_3^2}{4} + \frac{\beta_2^3}{27} > 0. \quad (33)$$

Отсюда сразу получаем, что при  $\beta_2 > 0$  уравнение (31) всегда имеет комплексные корни, а при  $\beta_2 < 0$  уравнение (31) имеет комплексные корни только при выполнении неравенства (33).

Теперь для дисперсионного уравнения (27) в соответствии с (32) получим отображение исходных параметров исследуемой конфигурации в канонические параметры катастрофы «сборка»:

$$\begin{cases} \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{3} = 0,25 \cdot [3,67 - 2 \cdot W(1 + \sigma)^2 + R_\lambda], \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{3} + \frac{2 \cdot \alpha_1^3}{27} = \frac{1}{3} [-0,47 + W(0,25 + 0,5\sigma - 1,25\sigma^2) + 0,625R_\lambda]. \end{cases}$$

Будем искать приближенное решение поставленной задачи об устойчивости волновых процессов в магнитной плазменной трубке с учетом потока тепла. Предположим, что рассматриваемая система находится в устойчивом состоянии при  $R_\lambda = 0$ . При этом все корни (27) действительны и

$$\frac{\beta_3^2}{4} + \frac{\beta_2^3}{27} < 0. \quad (34)$$

Положим  $\frac{\beta_3^2}{4} + \frac{\beta_2^3}{27} = -\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — небольшая положительная величина.

Представим параметр  $R_\lambda$  в виде двух слагаемых:  $R_\lambda = R_\lambda^0 + \hat{R}_\lambda$ , где  $R_\lambda^0$  соответствует тепловому потоку, который приводит систему в критическое состояние, при котором добавочный поток  $\hat{R}_\lambda$  делает ее неустойчивой, т.е. при подстановке  $R_\lambda^0$  в (34) это неравенство становится равенством, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\beta_3^2}{4} + \frac{\beta_2^3}{27} = \frac{1}{9} \frac{[-0,47 + W(0,25 + 0,5\sigma - 1,25\sigma^2) + 0,625R_\lambda^0]^2}{4} + \\ + \frac{[3,67 - 2 \cdot W(1 + \sigma^2) + R_\lambda^0]^3}{64 \cdot 27} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

В результате получено кубическое уравнение относительно  $R_\lambda^0$ . Поскольку ранее предполагалась малость величин  $Gr$  и  $\varepsilon$ , то можно считать малой также величину  $R_\lambda^0 \ll 1$  и ограничиться решением уравнения (35) в линейном приближении:

$$R_\lambda^0 = \frac{-0,02 \cdot [3,67 - 2 \cdot W(1 + \sigma^2)]^3 - [-0,47 + W(0,25 + 0,5\sigma - 1,25\sigma^2)]^2}{2 \cdot [0,51 + W \cdot [-1,205 + 1,25 \cdot \sigma - 4,95 \cdot \sigma^2] + 0,5 \cdot W^2 \cdot (1 + \sigma^2)^2]}. \quad (36)$$

Переходя к физическим размерным величинам в уравнении (35) и учитывая, что

$$W = \frac{N}{q^2} = \frac{B_0^2}{\rho_0 \Omega^2 a^2}, \quad \frac{R_\lambda}{q^2} = \beta_0 A a = \beta_0 T_0,$$

получаем (35) в развернутом виде:

$$\frac{dT_0}{dr} = A = \frac{1}{\beta a} \times \frac{[3,67 \cdot \rho_0 \Omega^2 a^2 - 2 \cdot B_0^2 (1 + \sigma)^2]^3 + 48 \cdot q^2 \chi_0^2 \cdot [9,472 \cdot \rho_0 \Omega^2 a^2 + B_0^2 (1,75 + 3,5\sigma - 1,25\sigma^2)]^2}{3 \cdot [3,67 \cdot \rho_0 \Omega^2 a^2 - 2 \cdot B_0^2 (1 + \sigma)^2] + 32 \cdot q^2 \chi_0^2 \cdot [9,472 \cdot \rho_0 \Omega^2 a^2 + B_0^2 (1,75 + 3,5\sigma - 1,25\sigma^2)]}. \quad (37)$$

Теперь для определения границы области устойчивости рассмотрим случай, когда выражение  $(C_2 + \hat{R}_\lambda)^3 + 48 \cdot [C_3 + 0,625 \cdot \hat{R}_\lambda]^2$  изменяет знак. Здесь  $C_2 = 3,67 - 2 \cdot W(1 + \sigma)^2 + 2 \cdot R_\lambda^0$ ,  $C_3 = -0,47 + W(0,25 + 0,5\sigma - 1,25\sigma^2) + 1,25R_\lambda^0$ .

Учитывая (35), получаем для  $\hat{R}_\lambda$  уравнение  $\hat{R}_\lambda \cdot [3 \cdot C_2^2 + 60 \cdot C_3 + \hat{R}_\lambda \times (3 \cdot C_2 + 18,75) + \hat{R}_\lambda^2] = 0$ , которое локально определяет границу области устойчивости при  $R_\lambda^0 \ll 1$ .

Полученный квадратный трехчлен имеет комплексные корни и тогда он сохраняет положительное значение. Отсюда следует, что для потери устойчивости достаточно, чтобы существовал тепловой поток, направленный от периферии к оси цилиндра.

### Заключение

Рассмотрена задача о генерации неустойчивых мод в плазменном замагниченном цилиндре при наличии теплового потока с его границы. Предполагается, что плазменный цилиндр радиуса  $a$  вращается с угловой скоростью  $\Omega$  и подвержен влиянию осевого  $B_z^0$  и азимутального магнитного поля  $B_\phi = \frac{B_0}{a} r$ .

Показано, что тепловой поток с границы плазменного цилиндра, направленный от периферии цилиндра к центру, вызывает течение, а при условии, что система близка к критическому состоянию, вызывает возрастающие волны, которые могут приводить к распаду конфигурации. Получены выражения (36), (37), определяющие зависимость величины потока тепла, которая переводит систему из устойчивого состояния в критическое, при этом малейшее увеличение температуры вызывает возрастающие по амплитуде волны.

*Ю.П. Ладиков-Росв, В.С. Набівач*

### ЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПЛАЗМЕНОМУ ЦИЛІНДРІ З ОДНОРІДНИМИ СТРУМАМИ ТА ЗАВИХРЕНІСТЮ ЗА НАЯВНОСТІ РАДІАЛЬНОГО ПОТОКУ ТЕПЛА

Розглянуто вплив теплових потоків в короні Сонця на магнітні конфігурації плазми. Показано, що тепловий потік з границі цилиндра викликає нестійкі збурення, що можуть призводити до розпаду конфігурації. Отримано вирази для величини потоку тепла, при якому подальше збільшення температури може викликати зростаючі по амплітуді хвилі.

**EXCITATION OF WAVE PROCESSES  
IN PLASMA CYLINDER WITH HOMOGENEOUS  
CURRENTS AND VORTICITY  
IN THE PRESENCE OF RADIAL HEAT FLUX**

The influence of heat fluxes in the corona of the Sun on the magnetic configurations of the plasma is considered. It is shown that the heat flux from the boundary of the cylinder causes unstable perturbations, which can lead to the decay of the configuration. Expressions are obtained for the magnitude of the heat flux at which a further increase in temperature can cause waves that increase in amplitude.

1. *Ладиков-Роев Ю.П., Черемных О.К.* Математические модели сплошных сред. — Киев : Наук. думка, 2010. — 551 с.
2. *Кременецкий I.O., Черемных О.К.* Космічна погода: механізми і прояви. — Київ : Наук. думка, 2009. — 144 с.
3. *Ладиков-Роев Ю.П.* Существование и движение магнитно-вихревых колец в атмосфере // Современные математические проблемы механики и их приложения. — М. : Наука, 1989. — С. 64–69.
4. *Черемных О.К.* О движении вихревых колец в несжимаемой среде // Нелинейная динамика. — 2008. — 4, № 4. — С. 417–428.
5. *Акименко В.В., Черемных О.К.* Моделирование вихревых течений на фоне двумерного процесса конвективного теплообмена // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 2. — С. 64–80.
6. *Ладиков-Роев Ю.П., Линник А.А., Сальников Н.Н., Черемных О.К.* Магнитно-вихревая модель выбросов коронарной массы // Космическая наука и технология. — 2004. — 10, № 5/6. — С. 131–135.
7. *Ладиков-Роев Ю.П., Логинов А.А., Черемных О.К., Маслова Н.В.* Модель спикулы в солнечной короне // Там же. — 2004. — 10, № 5. — С. 128–130.
8. *Ладиков-Роев Ю.П., Логинов А.А., Черемных О.К.* Нестационарная модель солнечной спикулы // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — № 5. — С. 55–63.
9. *Прист Е.Р.* Солнечная магнитогидродинамика. — М. : Мир, 1985. — 591 с.
10. *On the generation of solar spicules and Alfvénic waves / J. Martínez-Sykora, V. De Pontieu, V.H. Hansteen, L. Rouppe van der Voort, M. Carlsson, T.M.D. Pereira // Science. — 2017. — 356. — P. 1269–1272.*
11. *Робертс Б.* Магнитогидродинамические волны на Солнце // Космическая магнитная гидродинамика. — М. : Мир, 1995. — С. 112–143.
12. *Филиппов Б.П.* Эруптивные процессы на Солнце. — М. : Физматлит, 2007. — 216 с.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Гидродинамика. — М. : Наука, 1986. — 733 с.
14. *Загородний А.Г., Черемных О.К.* Введение в физику плазмы. — Киев : Наук. думка, 2014. — 697 с.
15. *Герциуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М. : Наука, 1972. — 392 с.
16. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М. : Наука, 1977. — 822 с.
17. *Молчанов А.А., Сирик С.В., Сальников Н.Н.* Выбор весовых функций в методе Петрова–Галеркина для интегрирования двумерных нелинейных уравнений типа Бюргерса. — <https://cyberleninka.ru/article/n/vybor-vesovykh-funktsiy-v-metode-petrova-galerkina-dlya-integrirovaniya-dvumernykh-nelineynykh-uravneniy-tipa-byurgersa>.
18. *Набивач В.Е.* Теория катастроф и особенности корней характеристических уравнений // Материалы XX Международной конференции «Автоматика 2013». — Николаев, 2013. — С. 87–88.
19. *Nabivach V.Ye.* Root distribution of characteristic equations up to fourth order // Soviet journal of Automation and Information Sciences. — 1985. — 18, N 6. — P. 12–14.
20. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. — М. : Мир, 1980. — 607 с.
21. *Математическая энциклопедия.* — М. : Советская энциклопедия, 1984. — 1248 с.

*Получено 12.09.2017*