УДК 517.977

*И.С. Раппопорт*

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛАТЫ

## Введение

В настоящей работе, следуя методике [1], введены понятия верхней и нижней разрешающих функций двух типов и получены достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы в случае, когда условие Понтрягина не имеет места. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии управления и дано сравнение гарантированных времен.

Работа является развитием идей [2–7], примыкает к исследованиям [8–21] и указывает новые возможности приложения выпуклого анализа к теории конфликтно-управляемых процессов.

## Общая схема метода, разрешающие функции первого типа

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau)\, \varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \; t \ge 0. \tag{1}$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t)$, $g : R_+ \to R^n$, измерима по Лебегу [22] и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t, \tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, измерима по $t$, а также суммируема по $\tau$ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v)$, $\varphi : U \times V \to R^n$, которая считается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов $U$ и $V$, $m$, $l$, $n$ — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u : R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v : R_+ \to V$ — измеримые функции времени. Кроме процесса (1) задана собственная выпуклая замкнутая ограниченная снизу по $z$ функция $\sigma(z)$, $\sigma : R^n \to R^1$, значения которой на траекториях процесса (1) определяют момент окончания игры. Если $z(t)$, $t \ge 0$, — траектория системы (1), то игру будем считать законченной в момент $t_1 > 0$, если

$$\sigma(z(t_1)) \le 0. \tag{2}$$

Цели первого $(u)$ и второго $(v)$ игроков противоположны. Первый (будем называть его преследователем) пытается добиться выполнения неравенства (2) на соответствующей траектории процесса (1) за кратчайшее время, а другой — максимально оттянуть момент выполнения этого неравенства или вообще избежать его выполнения.

Примем сторону первого игрока и будем ориентироваться на выбор противником в качестве управления произвольной измеримой функции, которая принимает значения из $V$. В свою очередь, будем считать, что если игра (1), (2) продолжается на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент $t$ будем выбирать на основе информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока к моменту $t$, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(\cdot)), \ t \in [0, T], \ u(t) \in U. \tag{4}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а $e^{At}$ — матричная экспонента, то говорят, что управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [11], а контруправление [8] $u(t) = u(z_0, v(\cdot))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [12].

Согласно определению сопряженной функции и с учетом теоремы Фенхеля–Моро [23] имеем

$$\sigma(z) = \sup_{p \in R^n} [(p, z) - \sigma^*(p)],$$

где

$$\sigma^*(z) = \sup_{z \in R^n} [(p, z) - \sigma(z)]. \tag{5}$$

Функция $\sigma^*(p)$ собственная замкнутая и выпуклая [1]. Эффективное множество функции $\sigma^*(p)$ имеет вид $\operatorname{dom}\sigma^* = \{p \in R^n : \sigma^*(t, p) < +\infty\}$. В силу ограниченности снизу собственной функции $\sigma(z)$ и соотношения (5) получим $\sigma^*(0) = = -\inf_{z \in R^n} \sigma(z)$, а значит, $0 \in \operatorname{dom}\sigma^*$.

Будем считать, что $L$ — линейная оболочка множества $\operatorname{dom}\sigma^*$ (пересечение всех линейных подпространств, которые содержат множество $\operatorname{dom}\sigma^*$). Тогда она является линейным подпространством. Обозначим $\pi$ оператор ортогонального проектирования из $R^n$ на $L$. Справедливо соотношение $\sigma(z) = \sigma(\pi z)$, $z \in R^n$.

Пусть $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$, — некоторая почти везде ограниченная измеримая по $t$ и суммируемая по $\tau$, $\tau \in [0, T]$, для каждого $t > 0$ функция, которую, следуя [1], будем называть функцией сдвига.

*Условие 1.* Для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множестве $\Delta \times V$ имеет место неравенство $\min\limits_{u \in U} \max\limits_{p \in \operatorname{dom}\sigma^*} [(p, \pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(t, \tau))] \le 0.$

Зафиксируем некоторую функцию сдвига $\gamma(t, \tau)$ и положим

$$\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau)\, d\tau .$$

Рассмотрим множество $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \{t \ge 0 : \sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) \le 0\}$. Если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t \ge 0$, то положим $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

**Теорема 1.** Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по $z$ функцией, выполнено условие 1 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot, \cdot)$ множество $\mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $\mathrm{P} \in \mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент $\mathrm{P}$ с использованием управления вида (4).

*Доказательство.* Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта $V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим многозначное отображение для $\tau \in [0, \mathrm{P}]$, $v \in V$:

$$U_0(\tau, v) = \{u \in U : \sup_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(\mathrm{P}, \tau))] \le 0\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) и функции $\sigma(z)$ отображение $U_0(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо [5] при $v \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [22] многозначное отображение $U_0(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_0(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [5].

Положим управление первого игрока $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Принимая во внимание равенство $\sigma(z(\mathrm{P})) = \sigma(\pi z(\mathrm{P}))$, формулу (1) и определение сопряженной функции, получим

$$\sigma(z(\mathrm{P})) = \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \xi(\mathrm{P}, g(\mathrm{P}), \gamma(\mathrm{P}, \cdot))) +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{P}} (p, \pi\Omega(\mathrm{P}, \tau)\varphi(u_0(\tau), v(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}, \tau))\, d\tau - \sigma^*(p)]. \qquad (6)$$

Тогда с учетом закона выбора управления первым игроком соотношение (6) дает $\sigma(z(\mathrm{P})) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}, g(\mathrm{P}), \gamma(\mathrm{P}, \cdot))) \le 0$, откуда следует неравенство (2) в момент $\mathrm{P}$.

*Замечание 1.* Положив $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v),\ \ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v),\ \ \tau \in [0, t],\ \ v \in V,$$

на множествах $\Delta \times V$ и $\Delta$ соответственно. Будем предполагать, что многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ имеет замкнутые значения на множестве $\Delta \times V$.

*Условие Понтрягина*. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta$.

Из условия Понтрягина следует, что существует измеримый селектор $\gamma(t, \tau)$, $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$, для которого выполняется условие 1 и справедлива теорема 1.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \ge 0 : \inf_{u \in U} \sup_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(t, \tau)) +$$

$$+ \alpha[(p, \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))) - \sigma^*(p)]] \le 0\}. \qquad (7)$$

*Условие 2.* Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta \times V$.

Если это условие выполнено, то, следуя работе [1] , введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции первого типа:

$$\alpha^*(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\},\ \ \alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\},\ \ \tau \in [0, t],\ \ v \in V.$$

Можно показать [5], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ является замкнутозначным, $L \otimes B$-измеримым по совокупности $(\tau, v)$, $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а верхняя и нижняя разрешающие функции $L\otimes B$-измеримы по совокупности $(\tau, v)$, $\tau\in[0, t]$, $v\in V$. Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, а нижняя — полунепрерывна снизу по переменной $v$. Поэтому [7] функции $\inf\limits_{v\in V}\alpha^*(t,\tau,v)$ и $\sup\limits_{v\in V}\alpha_*(t,\tau,v)$ измеримы по $\tau$, $\tau\in[0, t]$. Пусть $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau\in[0,+\infty]$, со значениями из $V$. Поскольку при фиксированном $t$ функции $\alpha^*(t,\tau,v)$ и $\alpha_*(t,\tau,v)$ $L\otimes B$-измеримы по совокупности $(\tau, v)$, $\tau\in[0, t]$, $v\in V$, то они суперпозиционно измеримы [5], т.е. $\alpha^*(t,\tau,v(\tau))$ и $\alpha_*(t,\tau,v(\tau))$ измеримы по $\tau$, $\tau\in[0, t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot)\in V(\cdot)$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\ge 0:\sigma(\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)))\le 0,\ \int\limits_0^t\sup_{v\in V}\alpha_*(t,\tau,v)\,d\tau<1\right\}.$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t\ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

**Теорема 2.** Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по $z$ функцией, выполнено условие 2 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(t,\tau)$ множество $\mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^1\in\mathrm{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент $\mathrm{P}_*^1$ с использованием управления вида (4).

*Доказательство.* Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта $V$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^1]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим компактнозначное многозначное отображение

$$U_*^1(\tau,v)=\{u\in U:\sup_{p\in\mathrm{dom}\sigma^*}[(p,\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(\mathrm{P}_*^1,\tau))+$$

$$+\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v)[(p,\xi(\mathrm{P}_*^1,g(\mathrm{P}_*^1),\gamma(\mathrm{P}_*^1,\cdot)))-\sigma^*(p)]]\le 0\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1), функции $\sigma(z)$ и нижней разрешающей функции $\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v)$ копактнозначное отображение $U_*^1(\tau,v)$ $L\otimes B$-измеримо [5] при $v\in V$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^1]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [22] многозначное отображение $U_*^1(\tau,v)$ содержит $L\otimes B$-измеримый селектор $u_*^1(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [5].

Положим управление первого игрока $u_*^1(\tau)=u_*^1(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*^1]$. Прибавив и вычтя в квадратных скобках выражения (6) величину $[(p,\xi(\mathrm{P}_*^1))-\sigma^*(p)]\times$ $\times\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^1}\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v(\tau))\,d\tau$, получим

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^1))=\max_{p\in\mathrm{dom}\sigma^*}\left\{[(p,\xi(\mathrm{P}_*^1))-\sigma^*(p)]\left(1-\int\limits_0^{\mathrm{P}_*^1}\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v(\tau))\,d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\mathrm{P}_*}[(p,\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1,\tau)\varphi(u_*^1(\tau),v(\tau))-\gamma(\mathrm{P}_*^1,\tau))+\alpha_*(\mathrm{P}_*^1,\tau,v(\tau))[(p,\xi(\mathrm{P}_*^1))-\sigma^*(p)]]\,d\tau\right\}.$$

Отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент $P_*^1$ выполнение неравенства

$$\sigma(z(P_*^1)) \le \sigma(\xi(P_*^1, g(P_*^1), \gamma(P_*^1,\cdot)))\left(1 - \int_0^{P_*^1} \alpha_*(P_*^1, \tau, v(\tau))\,d\tau\right) \le 0,$$

поскольку по определению $P_*^1$ имеем $\sigma(\xi(P_*^1, g(P_*^1), \gamma(P_*^1,\cdot))) \le 0$, а

$$1 - \int_0^{P_*^1} \alpha_*(P_*^1, \tau, v(\tau))\,d\tau \ge 1 - \int_0^{P_*^1} \sup_{v\in V} \alpha_*(P_*^1, \tau, v)\,d\tau > 0,$$

что и завершает доказательство теоремы.

*Замечание 2.* Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множестве $\Delta \times V$ выполнено условие 1, то $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$, $\tau \in [0, P_*^1]$, $v \in V$. Поэтому справедливо условие 2 и $\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)\} = 0$ на множестве $\Delta \times V$.

Рассмотрим множество

$$T(g(t), \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \inf_{v\in V} \alpha^*(t, \tau, v)\,d\tau \ge 1, \int_0^t \sup_{v\in V} \alpha_*(t, \tau, v)\,d\tau < 1 \right\}. \tag{8}$$

Если при некотором $t > 0$ $\alpha^*(t, \tau, v) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (8) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T(g(t), \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого $t$ справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (8). В случае, когда неравенства в соотношении (8) не выполняются при всех $t > 0$, положим $T(g(t), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

**Теорема 3.** Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по $z$ функцией, выполнено условие 2 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто, а $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент $T$ с использованием управления вида (3).

*Доказательство.* Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта $V$, $\tau \in [0, T]$.

Рассмотрим сначала случай $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, v(\tau))\,d\tau - \int_t^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau))\,d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Функции $\alpha^*(T, \tau, v)$ и $\alpha_*(T, \tau, v)$ $L \otimes B$-измеримы по совокупности $(\tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, и поэтому они суперпозиционно измеримы, т.е. функции $\alpha^*(T, \tau, v(\tau))$ и $\alpha_*(T, \tau, v(\tau))$ измеримы по $\tau$, $\tau \in [0, T]$. По определению $T$ имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau))\,d\tau \ge 1 - \int_0^T \sup_{v\in V} \alpha_*(T, \tau, v)\,d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau))\,d\tau \le 1 - \int_0^T \inf_{v\in V} \alpha^*(t, \tau, v)\,d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени $t_*$, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения $t_*$ зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим компактнозначное многозначное отображение

$$U^1(\tau, v) = \left\{ u \in U : \sup_{p \in \mathrm{dom}\sigma^*} [(p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau)) + \right.$$

$$\left. + \alpha(T, \tau, v)[(p, \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) - \sigma^*(p)]] \le 0 \right\}, \tag{9}$$

где

$$\alpha(T, \tau, v) = \begin{cases} \alpha^*(T, \tau, v), & 0 \le \tau \le t_*, \\ \alpha_*(T, \tau, v), & t_* < \tau \le T. \end{cases}$$

В силу свойств параметров процесса (1), функции $\sigma(z)$ и верхней $\alpha^*(T, \tau, v)$ и нижней $\alpha_*(T, \tau, v)$ разрешающих функций копактнозначное отображение $U^1(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо [5] при $v \in V$, $\tau \in [0, T]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [22] многозначное отображение $U^1(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u^1(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [5].

Положим управление первого игрока $u^1(\tau) = u^1(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

Принимая во внимание равенство $\sigma(z(T)) = \sigma(\pi z(T))$, формулу (1) и определение сопряженной функции, получим

$$\sigma(z(T)) = \max_{p \in \mathrm{dom}\sigma^*} \left[ (p, \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) + \right.$$

$$\left. + \int_0^T (p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u^1(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau))\, d\tau - \sigma^*(p) \right]. \tag{10}$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (10) величину

$$[(p, \xi(T)) - \sigma^*(p)] \left[ \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, v(\tau))\, d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau)\, d\tau \right].$$

Тогда получим

$$\sigma(z(T)) = \max_{p \in \mathrm{dom}\sigma^*} \left\{ [(p, \xi(T)) - \sigma^*(p)] h(t_*) + \right.$$

$$+ \int_0^{t_*} [(p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u^1(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau)) + \alpha^*(T, \tau, v(\tau))[(p, \xi(T)) - \sigma^*(p)]]\, d\tau +$$

$$\left. + \int_{t_*}^T [(p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u^1(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau)) + \alpha_*(T, \tau, v(\tau))[(p, \xi(T)) - \sigma^*(p)]]\, d\tau \right\}.$$

С учетом соотношения (9) отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент $T$ выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)))\, h(t_*) = 0.$$

Для случая $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot))) \le 0$ управление первого игрока на всем промежутке $[0, T]$ выберем в виде измеримой функции $u_*^1(\tau) = u_*^1(\tau, v(\tau)),\quad \tau \in [0, T]$, где $u_*^1(\tau, v)$ — $L \otimes B$-измеримый селектор отображения $U^1(\tau, v)$ соотношения (9) с разрешающей функцией $\alpha(T, \tau, v) = \alpha_*(T, \tau, v)$ на всем промежутке $[0, T]$.

Прибавив и вычтя в квадратных скобках выражения (10) величину $[(p, \xi(T)) - \sigma^*(p)] \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau))\, d\tau$, получим

$$\sigma(z(T)) = \max_{p \in \mathrm{dom}\sigma^*} \left\{ [(p, \xi(T)) - \sigma^*(p)] \left( 1 - \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau))\, d\tau \right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^T [(p, \pi\Omega(T, \tau)\, \varphi(u_*^1(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau)) + \alpha_*(T, \tau, v(\tau))[(p, \xi(T)) - \sigma^*(p)]]\, d\tau \right\}.$$

Отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент $T$ выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot))) \left( 1 - \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau))\, d\tau \right) \le 0,$$

поскольку по предположению $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T,\cdot))) \le 0$, а

$$1 - \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau))\, d\tau \ge 1 - \int_0^T \sup_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v)\, d\tau > 0,$$

что и завершает доказательство теоремы.

## Модификация метода, разрешающие функции второго типа

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} \mathfrak{A}(t, \tau, v),\quad (t, \tau) \in \Delta.$$

*Условие 3.* Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta$.

Если это условие выполнено, то, следуя работе [1] , введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа:

$$\alpha^*(t, \tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\},\quad \alpha_*(t, \tau) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\},\quad \tau \in [0, T],\quad v \in V.$$

Можно показать [5], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ замкнутозначное, измеримо по $\tau$, а верхняя и нижняя разрешающие функции измеримы по переменной $\tau$ при фиксированном $t$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \sigma(\xi(t, g(t)\, \gamma(t,\cdot))) \le 0,\ \int_0^t \alpha_*(t, \tau)\, d\tau < 1 \right\}.$$

Если неравенства в фигурных скобках не выполняются ни для каких $t \ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.


ISSN 0572-2691

**Теорема 4.** Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по $z$ функцией, выполнено условие 3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(t,\tau)$ множество $\mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*^2 \in \mathrm{P}_*^2(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент $\mathrm{P}_*^2$ с использованием управления вида (4).

*Доказательство.* Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта $V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим компактнозначное многозначное отображение

$$U_*^2(\tau, v) = \Big\{ u \in U : \sup_{p \in \mathrm{dom}\sigma^*} [(p, \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau)) +$$

$$+ \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)[(p, \xi(\mathrm{P}_*^2, g(\mathrm{P}_*^2), \gamma(\mathrm{P}_*^2, \cdot))) - \sigma^*(p)]] \le 0 \Big\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1), функции $\sigma(z)$ и нижней разрешающей функции $\alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)$ копактнозначное отображение $U_*^2(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо [5] при $v \in V$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [22] многозначное отображение $U_*^2(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_*^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [5].

Положим управление первого игрока $u_*^2(\tau) = u_*^2(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*^2]$. Прибавив и вычтя в квадратных скобках выражения (6) величину $[(p, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(p)] \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)\, d\tau$, получим

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) = \max_{p \in \mathrm{dom}\sigma^*} \Bigg\{ [(p, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(p)] \left( 1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)\, d\tau \right) +$$

$$+ \int_0^{\mathrm{P}_*} [(p, \pi\Omega(\mathrm{P}_*^2, \tau)\varphi(u_*^2(\tau), v(\tau)) - \gamma(\mathrm{P}_*^2, \tau)) + \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)[(p, \xi(\mathrm{P}_*^2)) - \sigma^*(p)]] d\tau \Bigg\}.$$

Отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент $\mathrm{P}_*^2$ выполнение неравенства

$$\sigma(z(\mathrm{P}_*^2)) \le \sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, g(\mathrm{P}_*^2), \gamma(\mathrm{P}_*^2, \cdot))) \left( 1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)\, d\tau \right) \le 0,$$

поскольку по определению момента $\mathrm{P}_*^2$ имеем $\sigma(\xi(\mathrm{P}_*^2, g(\mathrm{P}_*^2), \gamma(\mathrm{P}_*^2, \cdot))) \le 0$, а $1 - \int_0^{\mathrm{P}_*^2} \alpha_*(\mathrm{P}_*^2, \tau)\, d\tau > 0$, что и завершает доказательство теоремы.

*Замечание 3.* Если для некоторой функции сдвига $\gamma(t,\tau)$, $\gamma : \Delta \to L$, на множестве $\Delta \times V$ выполнено условие 1, то $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau)$, $\tau \in [0, t]$. Поэтому справедливы условия 2 и 3, причем в силу леммы имеем $0 \le \sup\limits_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) \le \alpha_*(t, \tau) = 0, \quad \tau \in [0, t]$. С учетом замечаний 1 и 2 можно заключить, что если выполнено условие Понтрягина, то справедливо равенство

$$\sup_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*(t, \tau) = 0, \quad \tau \in [0, t].$$

Рассмотрим множество

$$\Theta(g(t), \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \alpha^*(t, \tau)\, d\tau \ge 1, \int_0^t \alpha_*(t, \tau)\, d\tau < 1 \right\}. \tag{11}$$

Если при некотором $t > 0$ $\alpha^*(t, \tau) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (11) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T(g(t), \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого $t$ справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (11) . В случае, когда неравенства в соотношении (11) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\Theta(g(t), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

**Теорема 5.** Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по $z$ функцией, выполнено условие 3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто, а $\Theta \in \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент $\Theta$ с использованием управления вида (4).

*Доказательство.* Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта $V$, $\tau \in [0, \Theta]$.

Рассмотрим сначала случай $\sigma(\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(\Theta, \tau)\, d\tau - \int_t^\Theta \alpha_*(\Theta, \tau)\, d\tau, \ t \in [0, \Theta].$$

Функции $\alpha^*(\Theta, \tau)$ и $\alpha_*(\Theta, \tau)$, $\tau \in [0, \Theta]$, измеримы по $\tau$, $\tau \in [0, \Theta]$. По определению момента $\Theta$ имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^\Theta \alpha_*(\Theta, \tau)\, d\tau > 0, \quad h(\Theta) = 1 - \int_0^\Theta \alpha^*(\Theta, \tau)\, d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени $t_*$, $t_* \in (0, \Theta]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения $t_*$ не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим компактнозначное многозначное отображение

$$U^2(\tau, v) = \Big\{ u \in U : \sup_{p \in \operatorname{dom}\sigma^*} [(p, \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(\Theta, \tau)) +$$

$$+ \alpha(\Theta, \tau)[(p, \xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot))) - \sigma^*(p)]] \le 0 \Big\}, \tag{12}$$

где

$$\alpha(\Theta,\tau)=\begin{cases}\alpha^*(\Theta,\tau), & 0\le\tau\le t_*,\\ \alpha_*(\Theta,\tau), & t_*<\tau\le\Theta.\end{cases}$$

В силу свойств параметров процесса (1), функции $\sigma(z)$, а также верхней $\alpha^*(\Theta,\tau)$ и нижней $\alpha_*(\Theta,\tau)$ разрешающих функций копактнозначное отображение $U^2(\tau,v)$ $L\otimes B$-измеримо [5] при $v\in V$, $\tau\in[0,\Theta]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [22] многозначное отображение $U^2(\tau,v)$ содержит $L\otimes B$-измеримый селектор $u^2(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [5].

Положим управление первого игрока $u^2(\tau)=u^2(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,\Theta]$.

Рассмотрим выражение (10) для момента $\Theta$ и управления первого игрока $u^2(\tau)$, $\tau\in[0,\Theta]$. Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (10) величину

$$[(p,\xi(\Theta))-\sigma^*(p)]\left[\int_0^{t_*}\alpha^*(\Theta,\tau)\,d\tau+\int_{t_*}^{\Theta}\alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau\right].$$

Тогда получим

$$\sigma(z(\Theta))=\max_{p\in\operatorname{dom}\sigma^*}\left\{[(p,\xi(\Theta))-\sigma^*(p)]h(t_*)+\right.$$

$$+\int_0^{t_*}[(p,\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(u^2(\tau),v(\tau))-\gamma(\Theta,\tau))+\alpha^*(\Theta,\tau)[(p,\xi(\Theta))-\sigma^*(p)]]\,d\tau+$$

$$\left.+\int_{t_*}^{\Theta}[(p,\pi\Omega(\Theta,\tau)\varphi(u^2(\tau),v(\tau))-\gamma(\Theta,\tau))+\alpha_*(\Theta,\tau)[(p,\xi(\Theta))-\sigma^*(p)]]\,d\tau\right\}.$$

С учетом соотношения (12) отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент $\Theta$ выполнение неравенства

$$\sigma(z(\Theta))\le\sigma(\xi(\Theta,g(\Theta),\gamma(\Theta,\cdot)))h(t_*)=0.$$

Для случая $\sigma(\xi(\Theta,g(\Theta),\gamma(\Theta,\cdot)))\le 0$ управление первого игрока на всем промежутке $[0,\Theta]$ выберем в виде измеримой функции $u_*^2(\tau)=u_*^2(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,\Theta]$, где $u_*^2(\tau,v)$ — $L\otimes B$-измеримый селектор отображения $U^2(\tau,v)$ соотношения (12) с разрешающей функцией $\alpha(\Theta,\tau)=\alpha_*(\Theta,\tau)$ на всем промежутке $[0,\Theta]$.

Опять рассмотрим выражение (10) для момента $\Theta$ и управления первого игрока $u_*^2(\tau)$, $\tau\in[0,\Theta]$. Прибавив и вычтя в квадратных скобках выражения (10) величину $[(p,\xi(\Theta))-\sigma^*(p)]\int_0^{\Theta}\alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau$, получим

$$\sigma(z(\Theta))=\max_{p\in\operatorname{dom}\sigma^*}\left\{[(p,\xi(\Theta))-\sigma^*(p)]\left(1-\int_0^{\Theta}\alpha_*(\Theta,\tau)\,d\tau\right)+\right.$$

$$+\int_0^{\Theta}[(p, \pi\Omega(\Theta, \tau)\varphi(u_*^2(\tau), v(\tau)) - \gamma(\Theta, \tau)) + \alpha_*(\Theta, \tau)[(p, \xi(\Theta)) - \sigma^*(p)]]d\tau\Bigg\}.$$

Отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент $\Theta$ выполнение неравенства

$$\sigma(z(\Theta)) \le \sigma(\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot)))\left(1 - \int_0^{\Theta}\alpha_*(\Theta, \tau)\,d\tau\right) \le 0,$$

поскольку по предположению $\sigma(\xi(\Theta, g(\Theta), \gamma(\Theta,\cdot))) \le 0,$ а по определению момента $\Theta$ $1 - \int_0^{\Theta}\alpha_*(T, \tau)\,d\tau > 0,$ что и завершает доказательство теоремы.

**Сравнение гарантированных времен**

**Лемма** [1]. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z),$ который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по $z$ функцией, выполнено условие 3. Тогда имеет место неравенство

$$\sup_{v \in V}\alpha_*(t, \tau, v) \le \alpha_*(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \Delta. \tag{13}$$

Если к тому же $\sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot))) > 0,$ то справедливо неравенство

$$\inf_{v \in V}\alpha^*(t, \tau, v) \ge \alpha^*(t, \tau), \quad (t, \tau) \in \Delta. \tag{14}$$

При этом, если многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta \times V,$ то в соотношениях (13) и (14) имеет место равенство.

**Теорема 6.** Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z),$ который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по $z$ функцией, при некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ выполнено условие 3. Тогда имеют место включения

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)).$$

При этом, если многозначное отображение $\mathfrak{A}(T, \tau, v)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta \times V,$ то справедливы равенства

$$T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)), \quad \mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)).$$

Если выполнено условие 1, то имеем

$$\mathrm{P}_*^2(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \mathrm{P}_*^1(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \mathrm{P}(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)),$$

причем, если выполнено условие Понтрягина, то в качестве $\gamma(\cdot,\cdot)$ можно взять некоторый селектор Понтрягина [1].

Доказательство непосредственно следует из леммы и конструкций соответствующих определений и теорем.

**Теорема 7.** Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z),$ который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по $z$ функцией, выполнено условие 2 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто, $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ и многозначное отображение $\mathfrak{A}(T,\tau,v)$ принимает выпуклые значения для всех $(\tau,v)$, $\tau\in[0,T]$, $v\in V.$ Тогда игра может быть закончена в момент $T$ с использованием управления вида (4).

Доказательство автоматически вытекает из теорем 5 и 6.

**Заключение**

В настоящей работе рассматриваются квазилинейные конфликтно-управляемые процессы общего вида с терминальной функцией платы. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение конфликтно-управляемого процесса с терминальной функцией платы в классе квазистратегий и контруправлений и дано сравнение гарантированных времен.

*Й.С. Раппопорт*

ДОСТАТНІ УМОВИ ГАРАНТОВАНОГО РЕЗУЛЬТАТУ В ДИФЕРЕНЦІЙНІЙ ГРІ З ТЕРМІНАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПЛАТИ

Досліджено метод розв'язувальних функцій стосовно теорії конфліктно-керованих процесів з термінальною функцією плати. Запропоновано модифіковану схему методу, що забезпечує закінчення гри за певний гарантований час в класі стробоскопічних стратегій без додаткових умов. Показано результати порівняння гарантованих часів схем методу розв'язувальних функцій з першим прямим методом Понтрягіна.

*J.S. Rappoport*

SUFFICIENT CONDITIONS OF THE GUARANTEED RESULT IN DIFFERENTIAL GAME WITH A TERMINAL PAY OFF FUNCTION

Advanced research of the resolving-functions method concerning the theory of conflict-controlled processes with terminal payoff function is considered. A modified scheme of the method is proposed. This scheme ensures the end of a game within a definite guaranteed time period in the class of stroboscopic strategies without any subsidiary conditions. The guaranteed times for this schemes of the resolving-functions method are compared with that of the fiirst Pontryagin method.

1. *Чикрий А.А., Чикрий В.К.* Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 3. — С. 65–78.
2. *Раппопорт И.С., Чикрий А.А.* О гарантированном результате в дифференциальной игре с терминальной функцией платы // Прикл. математика и механика. — 1995. — **59**, № 5. — С. 714–720.
3. *Chikrii A.A., Rappoport J.S.* Guarantee result in differential games with terminal payoff // Ann. Dynamic Games. — Berlin : Birkhauser, 1995. — **3**. — P. 323–330.
4. *Раппопорт И.С., Чикрий А.А.* Гарантированный результат в дифференциальной игре группового преследования с терминальной функцией платы // Прикл. математика и механика. — 1997. — **61**, № 4. — С. 584–594.

5. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — **48**, № 5. — С. 40–64.
6. *Раппопорт И.С.* Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 2. — С. 1–10.
7. *Раппопорт И.С.* О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — **52**, № 4. — С. 90–102.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М. : Наука, 1974. — 455 с.
9. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. — М. : Наука, 1988. — **2**. — 576 с.
10. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М. : Изд-во МГУ, 1984. — 65 с.
11. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. — М. : Наука, 1981. — 288 с.
12. *Hajek O.* Pursuit games. — New York : Academic Press, 1975. — **12**. — 266 p.
13. *Pittsyk M.V., Chikrii A.A.* On a group pursuit problem // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1982. — **46**, N 5. — P. 584–589.
14. *Chikrii A.A.* Multivalued mappings and their selections in game control problems // Journal of Automation and Information Sciences. — 1995. — **27**, N 1. — P. 27–38.
15. *Chikrii A.A.* Quasilinear controlled processes under conflict // Journal of Mathematical sciences. — 1996. — **80**, N 3. — P. 1489–1518.
16. *Chikrii A.A.* The problem of avoidance for controlled dynamic objects // J. Math., Game Theory and Algebra, Nova Science Publ. — 1997. — N 3. — P. 7–20.
17. *Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.* Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 6. — С. 66–99.
18. *Chikrii A.A.* Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems // Optimization Methods and Software. — 2008. — **23**, N 1. — P. 39–72.
19. *Chikrii A.A.* Game dynamic problems for systems with fractional derivatives // Springer Optimization and its Applications. — 2008. — **17**. — P. 349–387.
20. *Чикрий А.А., Белоусов А.А.* О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями сближения // Труды ИММ УрО РАН. — 2009. — **15**, № 4. — С. 290–301.
21. *Чикрий А.А.* Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Труды МИ РАН им. В.А.Стеклова. — 2010. — **271**. — С. 76–92.
22. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin : Birkhauser, 1990. — 461 p.
23. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М. : Мир, 1973. — 470 с.

*Получено 25.10.2017*