

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.02.013>

УДК 539.3

**О.М. Багно**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: alexbag2016@gmail.com

## **Про вплив скінченних початкових деформацій на поверхневу нестійкість нестисливого пружного шару, що взаємодіє з півпростором в'язкої стисливої рідини**

*Представлено академіком НАН України О. М. Гузем*

*Розглядається задача про поширення квазілембових хвиль у попередньо деформованому нестисливому пружному шарі, що взаємодіє з півпростором в'язкої стисливої рідини. Дослідження проводиться на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для нестисливого пружного шару і тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є—Стокса для півпростору в'язкої стисливої рідини. Застосовуються постановка задачі та підхід, засновані на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла і рідини. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення нормальних хвиль у гідропружній системі. Побудовано дисперсійні криві квазілембових хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінченних початкових деформацій у нестисливому пружному шарі, а також півпростору в'язкої рідини на фазові швидкості, коефіцієнти загасання, дисперсію квазілембових мод і поверхневу нестійкість гідропружного хвилеводу. Числові результати представлені у вигляді графіків і дано їх аналіз.*

**Ключові слова:** *поверхнева нестійкість, дисперсія хвиль, квазілембові моди, нестисливий пружний шар, півпростір в'язкої стисливої рідини, початкові деформації.*

Дослідження поверхневої нестійкості в гідропружних хвилеводах представляють актуальну і важливу проблему. Зумовлено це тим, що явище втрати стійкості істотно впливає на хвильові характеристики пружно-рідинної системи. Воно призводить до замикання хвилеводу, припинення процесу поширення хвиль і перенесення хвильової енергії.

У цій статті дане явище вивчається в рамках тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є — Стокса для рідини і тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла. Передбачається, що рідина є ньютонівською, знаходиться в стані спокою і теплові ефекти не враховуються. В якості підходу обрані постановки задач і метод, засновані на застосуванні представлень загальних розв'язків лінеари-

---

Цитування: Багно О.М. Про вплив скінченних початкових деформацій на поверхневу нестійкість нестисливого пружного шару, що взаємодіє з півпростором в'язкої стисливої рідини. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 2. С. 13—20. <https://doi.org/10/15407/dopovidi2021.02.013>

зованих рівнянь руху в'язкої стисливої рідини і попередньо напруженого нестисливого пружного тіла, запропоновані в роботах [1–5].

**Постановка задачі.** Розглянемо такі динамічні процеси в гідропружній системі, при яких виникають додаткові деформації, тобто збурення деформацій, які значно менші за початкові. Досліджуємо гармонічні хвильові процеси малої амплітуди.

Далі припустимо, що ізотропне нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі безперервно-диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, займає об'єм:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  та контактує з півпростором в'язкої стисливої рідини, що заповнює об'єм:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 < \infty$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Прийmemo, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно уздовж осі  $Oz_3$ . У цьому випадку задача є плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль в площині  $Oz_1z_2$ . Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи лінеаризованих рівнянь гідропружності при таких граничних умовах:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = \tilde{P}_1|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=-h} = 0; \quad (1)$$

$$v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (2)$$

Скористаємося постановками задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями та в'язкої рідини, а також представленнями загальних розв'язків, запропонованими в роботах [1–5]. Надалі досліджуються хвильові процеси в попередньо деформованих нестисливих пружних тілах, що взаємодіють з в'язкою рідиною, початковий стан яких є однорідним. У разі однорідного напружено-деформованого стану для плоского випадку загальні розв'язки мають вигляд [1–5]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 [\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12})] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

де введені функції  $\chi_i$  є розв'язками таких рівнянь:

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2 \lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1;$$

$$\left[ \left( 1 + \frac{4v^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t} - v^* \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Тут прийняті наступні позначення:  $\tilde{Q}_i$  і  $\tilde{P}_i$  — складові напружень, відповідно, в пружному тілі і рідині;  $u_i$  — компоненти вектора зміщень пружного тіла  $\mathbf{u}$ ;  $v_i$  — складові вектора збурень швидкості рідини  $\mathbf{v}$ ;  $\lambda_i$  — подовження (при  $\lambda_i > 1$ ) або укорочення (при  $\lambda_i < 1$ ) пружного шару в напрямках координатних осей;  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  — величини, що визначаються з рівнянь стану і залежать від виду пружного потенціалу [4, 6, 7];  $s_{ii}^0$  — початкові напруження;  $\rho$  — густина матеріалу пружного шару;  $\rho_0$  і  $a_0$  — густина і швидкість звуку у рідині в стані спокою;  $v^*$  і  $\mu^*$  — кінематичний і динамічний коефіцієнти в'язкості рідини.

Для аналізу поширення збурень, гармонічно змінних у часі, розв'язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = \overline{1,3}),$$

де  $k$  — хвильове число ( $k = \beta + i\gamma$ );  $\gamma$  — коефіцієнт загасання хвилі;  $\omega$  — кругова частота;  $i$  — уявна одиниця ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Зауважимо, що обраний в даній роботі клас гармонічних хвиль, який є найбільш простим і зручним у теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі застосовуючи метод Фур'є, приходимо до трьох задач про власні значення для рівнянь руху пружного тіла і рідини. Розв'язуючи їх, визначаємо відповідні власні функції. Після підстановки загальних розв'язків у граничні умови (1), (2) отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, маємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| e_{lm}(c, \gamma, \lambda_i, \mu, \rho, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1,6}), \quad (3)$$

де  $c$  — фазова швидкість мод в гідропружній системі;  $h$  — товщина пружного шару;  $c_s$  — швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла ( $c_s^2 = \mu/\rho$ );  $\mu$  — модуль зсуву матеріалу пружного тіла.

Відзначимо, що дисперсійне рівняння (3) не залежить від форми пружного потенціалу. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду окремих випадків, які розглянуті в роботах [2, 8, 9].

Задачі, які були розглянуті в рамках моделі, що враховує початкові напруження, наведені в [1, 2, 4, 6–9]. Якщо покласти  $s_{ii}^0 = 0$  ( $\lambda_1 = 1$ ), то отримаємо рівності для ґрунтовно досліджених у рамках класичної теорії пружності хвиль Релея, Лемба і Стоунлі—Шольте [10].

**Числові результати.** Надалі дисперсійне рівняння (3) розв'язуємо чисельно. При цьому розрахунки проводимо для гідропружної системи, що складається з реального пружного тіла і рідини. У якості матеріалу для пружного шару вибираємо високоеластичну гуму, пружні властивості якої описуються пружним потенціалом Трелоара. Механічні параметри гідропружної системи вибираємо наступними: пружний шар: —  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6$  Па; півпростір рідини —  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\mu^* = 0,001$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ . У цього хвилеводу матеріал пружного тіла (гума) є податливим, м'яким і нестисливим.

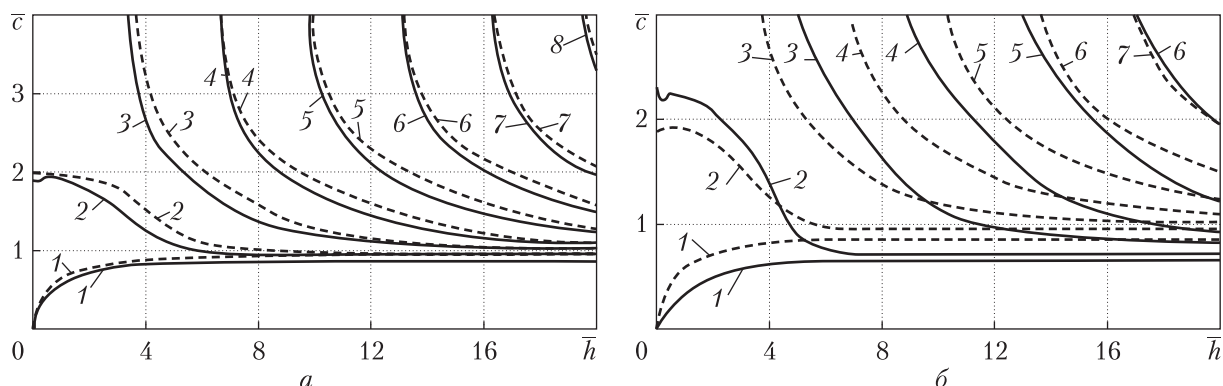


Рис. 1

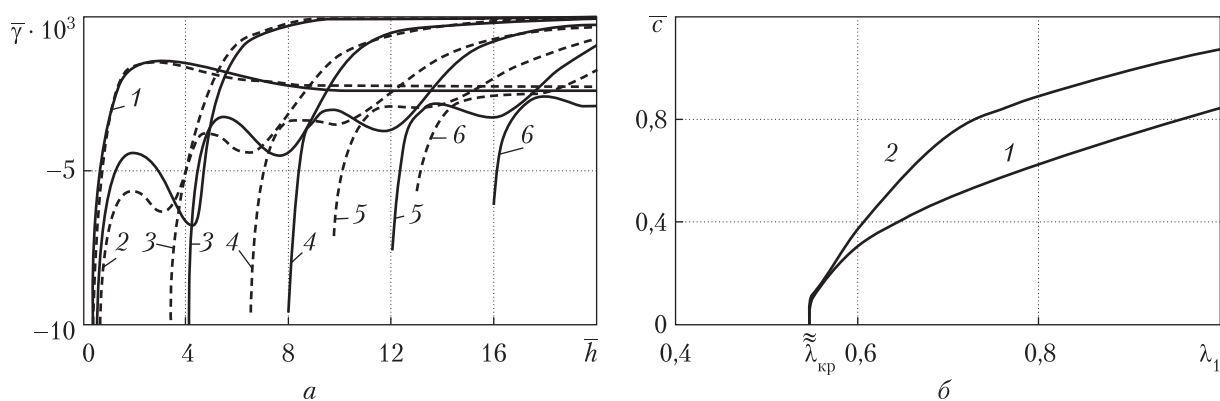


Рис. 2

Далі дисперсійне рівняння (3) розв'язуємо чисельно (рис. 1–3).

Графіки на рис. 1 ілюструють вплив в'язкої рідини на хвильові характеристики гідропружної системи. При цьому на рис. 1, а зображені дисперсійні криві, що відображають залежності безрозмірних величин фазових швидкостей квазілембових мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) від безрозмірної величини товщини пружного шару  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ) при  $\bar{\mu}^* = 0,001$  і відсутності початкових напружень ( $\lambda_1 = 1$ ). При цьому суцільні лінії відповідають гідропружній системі. Штриховими лініями позначені дисперсійні криві хвиль Лемба для пружного шару, що не взаємодіє з рідиною.

Характер впливу попереднього стиснення ( $\lambda_1 = 0,8$ ) на фазові швидкості квазілембових хвиль в пружно-рідинній системі показано на рис. 1, б. Суцільні лінії відповідають гідропружній системі з пружним шаром, підданим початковому стисненню ( $\lambda_1 = 0,8$ ), а штриховими лініями позначені дисперсійні криві квазілембових мод, що відповідають гідропружному хвилеводу при відсутності початкових деформацій ( $\lambda_1 = 1$ ).

На рис. 2, а наведено залежності безрозмірних коефіцієнтів загасання мод  $\bar{\gamma}$  ( $\bar{\gamma} = \gamma/k_s$ ,  $k_s$  – хвильове число хвилі зсуву в матеріалі пружного шару) від безрозмірної величини товщини пружного шару  $\bar{h}$  при  $\bar{\mu}^* = 0,001$ . На цьому рисунку суцільні лінії відповідають гідропружній системі з пружним шаром, підданим початковому стисненню ( $\lambda_1 = 0,8$ ).

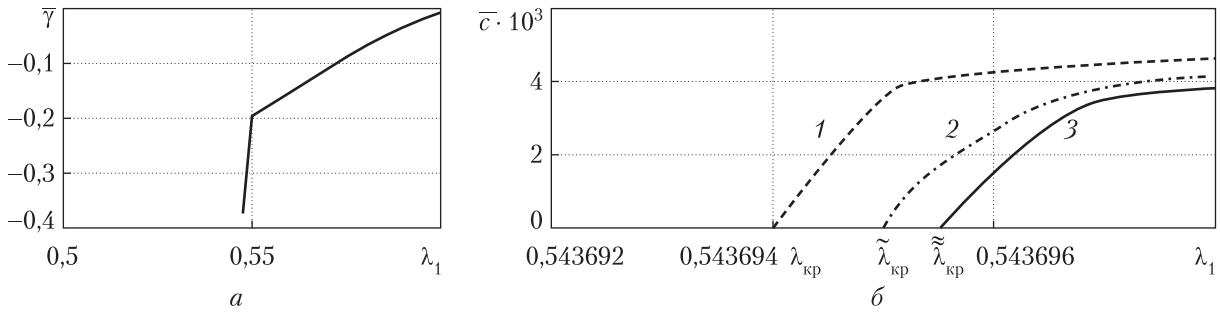


Рис. 3

Штриховими лініями позначені залежності  $\bar{\gamma} = f(h)$  для пружно-рідинного хвилеводу з ненапруженим пружним шаром ( $\lambda_1 = 1$ ).

Характер впливу попереднього деформування пружного шару на швидкості квазілембових мод у гідропружному хвилеводі ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) ілюструють графіки на рис. 2, б, на якому представлені залежності фазових швидкостей  $\bar{c}$  моди 1 і моди 2 від зміни величини  $\lambda_1$ . На рисунку наведені результати обчислень для попередньо стисненого ( $\lambda_1 \leq 1$ ) пружного шару. Графіки на рис. 2, б – 3, б побудовані для пружних шарів з товщиною  $\bar{h} = 5$ .

На рис. 3, а наведено графік залежності безрозмірного коефіцієнта загасання моди 1 (квазіповерхнева мода, яка трансформується при  $\bar{h} \rightarrow \infty$  в хвилю Стоунлі)  $\bar{\gamma}$  від величини  $\lambda_1$  для гідропружної системи ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ), пружний шар якої підданий початковому стисненню ( $\lambda_1 \leq 0,6$ ).

Графіки на рис. 3, б представляють значення фазових швидкостей квазілембових хвиль для сильно стисненого пружного шару ( $0,543694 \leq \lambda_1 \leq 0,543698$ ).

Наведений на рис. 3, б графік, зображений суцільною лінією 3, отриманий для гідропружної системи з в'язкою рідиною ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ). На рис. 3, б штрихова лінія 1 відповідає пружному шару, що не взаємодіє з рідиною ( $\bar{\rho}_0 = 0$ ). Характер впливу попереднього стиснення ( $0,543695 \leq \lambda_1 \leq 0,543698$ ) пружного шару на величину фазової швидкості  $\bar{c}$  квазілембової хвилі в гідропружній системі з півпростором ідеальної рідини ( $\bar{\mu}^* = 0$ ) ілюструє графік, зображений штрихпунктирною лінією 2.

**Аналіз числових результатів.** Із графіків, представлених на рис. 1, а, випливає, що для чисто пружного хвилеводу (штрихові лінії) швидкості першої (нульової антисиметричної) і другої (нульової симетричної) мод Лемба, які поширюються уздовж нижньої і верхньої вільних поверхонь шару, з ростом товщини пружного шару (частоти)  $\bar{h} \rightarrow \infty$  прямують до швидкості хвилі Релея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s$ ). При цьому перша мода прямує до швидкості поверхневої хвилі  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) знизу, а швидкість другої моди – відповідно, до  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) зверху. У гідропружному хвилеводі (суцільні лінії) при зростанні товщини пружного шару  $\bar{h}$  швидкість першої моди, що поширюється уздовж межі контакту середовищ, прямує до швидкості хвилі Стоунлі  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,857938$ ) знизу. Мода 2 поширюється в пружному шарі вздовж його вільної поверхні. Швидкість її прямує до швидкості хвилі Релея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955317$ ) зверху. Швидкості всіх мод вищого порядку прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла  $\bar{c}_s$ .

З графіків, наведених на рис. 1, б, випливає, що попередні деформації викликають зміну частот зародження квазілембових мод і зміщення їх дисперсійних кривих. Незавжди ба-

чити, що початкове стиснення ( $\lambda_1 = 0,8$ ) зумовлює зміщення критичних частот і дисперсійних кривих (суцільні лінії) в короткохвильову частину спектра.

З графіків, представлених на рис. 2, а, випливає, що початкове стиснення ( $\lambda_1 = 0,8$ ) призводить до зміщення кривих (суцільні лінії), що відображають залежності коефіцієнтів загасання мод від товщини шару (частоти), в короткохвильову частину спектра. Як впливає з графіків, рухи в модах, що поширюються в гідропружному хвилеводі, починаючи з третьої, зі зростанням товщини пружного шару віддаляються від його поверхонь і локалізуються в його товщі. Наслідком цього є зменшення впливу в'язкості рідини на ці моди в короткохвильовій частині спектра. При цьому величини коефіцієнтів загасання вищих мод з ростом товщини незалежно від попередніх деформацій наближаються до нуля. Цим також пояснюється зменшення впливу початкових деформацій на їх коефіцієнти загасання.

Крім того, як видно з графіків, наведених на рис. 2, б і 3, б, стиснення пружного шару ( $\lambda_1 < 1$ ) призводить до зменшення величин фазових швидкостей квазіповерхневих хвиль (моди 1 і 2).

**Поверхнева нестійкість гідропружної системи.** Графік на рис. 3, б для чисто пружного шару, зображений штриховою лінією 1, показує, що зі стисненням  $\lambda_1 \approx 0,54$  (більш точне значення  $\lambda_1 \approx 0,543694$ ), тобто при зменшенні довжини високоеластичного нестисливого тіла на 46 % величина фазової швидкості хвилі Релея  $\bar{c}_R$  стає рівною нулю. Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану для високоеластичного нестисливого неогуківського тіла при стисненні  $\lambda_1 \approx 0,54$  виникає явище поверхневої нестійкості пружного шару. Відзначимо, що це значення збігається з величиною, раніше отриманою в теорії стійкості [11], і відповідає значенню параметра критичного укорочення  $\lambda_{кр}$ .

З графіків (суцільна лінія 3 на рис. 3, б) випливає, що в гідропружному хвилеводі фазова швидкість моди 1 (квазіповерхнева хвиля Стоунлі)  $\bar{c}$  стає рівною нулю при  $\lambda_1 \approx 0,5436955$ . Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану поверхня пружного шару гідропружної системи, що контактує з півпростором в'язкої рідини, при стисненні  $\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,5436955$  втрачає поверхневу стійкість. Для чисто пружного шару, як зазначено раніше, явище поверхневої нестійкості виникає при  $\lambda_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543694$ . Ці відмінності між  $\tilde{\lambda}_{кр}$  і  $\lambda_{кр}$  свідчать про те, що наявність півпростору в'язкої стисливої рідини ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ) зумовлює зниження порога поверхневої нестійкості гідропружного хвилеводу і виникнення її раніше ( $\tilde{\lambda}_{кр} > \lambda_{кр}$ ) при меншому стисненні ( $\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,5436955 > \lambda_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543694$ ). З графіків, наведених на рис. 3, б, також випливає, що в гідропружній системі, що складається з пружного шару і півпростору ідеальної ( $\bar{\mu}^* = 0$ ) рідини (штрихпунктирна лінія 2), втрата поверхневої стійкості ( $\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543695$ ) виникає раніше [13], ніж в чисто пружному шарі ( $\bar{\rho}_0 = 0$ ), але пізніше, ніж в гідропружній системі з в'язким рідким півпростором ( $\bar{\mu}^* = 0,001$ ). При цьому для значень параметрів критичного укорочення має місце співвідношення  $\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,5436955 > \tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543695 > \lambda_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543694$ .

Відзначимо, що проведені розрахунки і отримані числові результати дозволили встановити, що навантаження пружного шару півпростором в'язкої рідини незначно впливає на значення параметра критичного укорочення і втрату поверхневої стійкості гідропружної системи.

Таким чином, розвинена лінеаризована теорія хвиль стосовно високоеластичних нестисливих тіл дозволяє досліджувати хвильові процеси не тільки в загальному і ряді окре-

мих випадків, але також можливість і умови виникнення явища поверхневої нестійкості як в пружному шарі, так і в гідропружних системах.

**Висновки.** Аналіз отриманих числових результатів показав, що вплив скінченних початкових деформацій пружного шару на характеристики хвильового процесу в гідропружній системі проявляється не тільки кількісно, а й якісно. Великі попередні деформації можуть зумовити не тільки зміну величин фазових швидкостей і дисперсійних властивостей квазілэмбових хвиль, а й до більш істотної зміни параметрів хвильового процесу в гідропружній системі в цілому. В результаті їх дії в пружно-рідинному хвилеводі може виникнути явище поверхневої нестійкості, що приводить до припинення процесу поширення хвиль і перенесення хвильової енергії.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Guz A.N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. P. 175–190.
2. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
3. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428 p.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: 2 части. Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing, 2016.
5. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. 244 с.
6. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
7. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 4. P. 277–291.
8. Жук А.П. Волны Стоули в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика.* 1980. **16**, № 1. С. 113–116.
9. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. P. 449–507.
10. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
11. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 272 с.

Надійшло до редакції 24.11.2020

#### REFERENCES

1. Guz, A.N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No. 3, pp. 175-190. <https://doi.org/10.1007/BF00885084>
2. Guz, A.N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kyiv: A.C.K. (in Russian).
3. Guz, A.N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009.
4. Guz, A.N. (2016). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. 2 parts. Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing (in Russian).
5. Guz, A.N. (2017). Introduction to dynamics of compressible viscous fluid. Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing RU (in Russian).
6. Guz, A.N., Zhuk, A.P. & Makhort, F.G. (1976). Waves in layer with initial stresses. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
7. Babich, S.Y., Guz, A.N. & Zhuk, A.P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 15, No. 4, pp. 277-291. <https://doi.org/10.1007/BF00884760>
8. Zhuk, A.P. (1980). Stoneley wave in a medium with initial stresses. *J. Appl. Mech.*, 16, No. 1, pp. 113-116 (in Russian).

9. Guz, A.N., Zhuk, A.P. & Bagno, A.M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No 5, pp. 449-507. <https://doi.org/10.1007/S10778-016-0770-6>
10. Viktorov, I.A. (1981). *Sound surface waves in solids*. Moscow: Nauka (in Russian).
11. Guz, A.N. (1973). *Stability of elastic bodies under finite deformations*. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).

Received 24.11.2020

A.M. Bagno

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON THE INFLUENCE OF FINITE INITIAL DEFORMATIONS  
ON THE SURFACE INSTABILITY OF INCOMPRESSIBLE ELASTIC  
LAYER INTERACTING WITH THE HALF-SPACE  
OF A VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID

The problem of the propagation of quasi-Lamb waves in a pre-deformed incompressible elastic layer that interacts with the half-space of a viscous compressible fluid is considered. The study is conducted on the basis of the three-dimensional linearized equations of elasticity theory of finite deformations for the incompressible elastic layer and on the basis of the three-dimensional linearized Navier–Stokes equations for the half-space of a viscous compressible fluid. The problem formulation and the approach, which are based on the utilization of representations of the general solutions of the linearized equations for an elastic solid and a fluid, are applied. Next, applying the Fourier method, we arrive at three eigenvalue problems for the equations of motion of the elastic body and the fluid. Solving them, we find the eigenfunctions. Substituting the general solutions into the boundary conditions, we obtain a homogeneous system of linear algebraic equations for the arbitrary constants. From the condition for the existence of a nontrivial solution, we derive the dispersion equation. It describes the propagation of normal waves in the hydroelastic system. The dispersion curves for quasi-Lamb waves over a wide range of frequencies are constructed. The effect of the finite initial deformations in an elastic layer, the thickness of the elastic layer, and the half-space of viscous compressible fluid on the phase velocities, attenuation coefficients, and dispersion of quasi-Lamb modes are analyzed. It follows from the graphical material presented above that, in the case of compression with 0.54, i.e., with a 46-percent reduction in the length of the highly elastic incompressible body, the phase velocities of the surface waves (Stoneley waves and Rayleigh waves) vanish. This indicates that the surface instability develops at 0.54 for a highly elastic incompressible non-Hookean body initially in a plane stress-strain state. We should point out that these figures agree with results obtained earlier in the theory of stability and correspond to the critical value of the contraction parameter. In the case of highly elastic incompressible bodies, the linearized wave theory makes it possible to study not only general and several specific wave processes, but also the conditions under which the surface instability begins in elastic bodies and hydroelastic systems. It also follows from the graphs that the viscous fluid slightly affects the surface instability of hydroelastic systems. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Keywords:** *surface instability, dispersion of waves, quasi-Lamb modes, incompressible elastic layer, half-space of viscous compressible fluid, initial deformations.*