Физика низких температур, 1996, т. 22, № 8, с. 985–988

Краткие сообщения

О температурной зависимости параметра порядка в сверхпроводнике

Т. Н. Анцыгина, В. А. Слюсарев

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: antsygina@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 2 апреля 1996 г.

Обсуждаются причины, по которым температурная зависимость параметра порядка в микроскопической теории сверхпроводимости с поразительной точностью совпадает с поведением намагниченности вейссовского магнетика.

Обговорюються причини, завдяки яким температурна залежність параметра порядку у мікроскопічній теорії надпровідності з надзвичайною точністю збігається з поведінкою намагніченості вейсівського магнетика.

Несмотря на то что с момента возникновения микроскопической теории сверхпроводимости прошло уже сорок лет и все это время теория непрерывно развивалась, в ней еще остается ряд белых пятен. Одним из них можно считать явление, которое в дальнейшем будем именовать «парадоксом Таулесса». Суть его состоит в следующем. Решение уравнения для щели БКШ—Боголюбова с поразительной точностью (порядка 0,1%, согласно утверждению работы [1]) совпадает с решением уравнения Вейсса для намагниченности m:

$$m = \text{th}\,\frac{m}{t}\,, \qquad (1)$$

где $t = T/T_c$ — безразмерная температура; T_c — температура перехода.

Цель настоящего сообщения состоит в обсуждении некоторых обстоятельств, связанных с этим удивительным совпадением.

Уравнение БКШ—Боголюбова для щели Δ в простейшей форме имеет вид

$$\Delta = \frac{g}{V}\sum_{|\xi_k|<\bar{\omega}} \frac{\Delta}{2\varepsilon_k}\,\text{th}\,\frac{\varepsilon_k}{2T}\,. \qquad (2)$$

Представление (2) справедливо, когда матричный элемент взаимодействия между носителями предполагается равным постоянной величине $-g(g>0)$ внутри слоя $|\xi_k| < \bar{\omega}$ (ξ_k — одноэлектронная энергия, отсчитанная от уровня Ферми; $\bar{\omega}$ — некоторое характерное значение фононной частоты) и обращается в нуль в остальной области; $\varepsilon_k = (|\Delta|^2 + \xi_k^2)^{1/2}$; V— объем системы. Очевидно, что (2) очень мало напоминает уравнение Вейсса (1). Естественно, его можно свести к (1), если предположить, что в указанном слое $\xi_k = 0$, однако столь грубая аппроксимация в данном контексте не заслуживает внимания. В свое время она была предложена для того, чтобы на простейшем примере продемонстрировать факт возникновения квазисредних [2]. Для столь хорошего соответствия уравнений (1) и (2) должны быть более веские причины. В связи с этим заметим, что в приближении слабой связи уравнение (2) может быть преобразовано к виду [3]

$$\ln\frac{\Delta_0}{\Delta} = I\left(\frac{\Delta}{T}\right)\,, \qquad (3)$$

где

$$I(u) = 2\int_0^\infty \frac{d\varphi}{\exp\,(u\,\text{ch}\,\varphi) + 1}\,, \qquad (4)$$

а Δ_0 — значение энергетической щели при $T = 0$. Интеграл $I(u)$ не может быть выражен через стандартные функции. Однако нас интересует лишь определенная область значений $u = \Delta/T$, а именно та часть вещественной полуоси, где не работают асимптотики для параметра порядка.

Существует несколько способов построения аппроксимационных выражений для сложных функ-

© Т. Н. Анцыгина, В. А. Слюсарев, 1996

ций. Наиболее распространенный из них состоит в том, что, зная асимптотики на краях, мы строим интерполяционное выражение, описывающее функцию в середине промежутка и отвечающее правильным асимптотическим выражениям. Классическим примером здесь является построение Зоммерфельдом решения уравнения Томаса—Ферми [4]. Недостаток этого подхода, однако, состоит в том, что выбранные интерполяционные выражения могут сильно отличаться от истинного поведения функции внутри промежутка. Существует также альтернативный способ аппроксимации. Задавшись некоторым аналитическим выражением, в качестве которого обычно используются аппроксиманты Паде, мы подбираем входящие в него свободные параметры так, чтобы минимизировать ошибку в рассматриваемой области изменений независимой переменной. В качестве примера использования такого подхода можно привести хорошо известную аппроксимацию функции arctg x в интервале $|x| < 1$ [5]:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1 + 0{,}28x^2} + \varepsilon(x), \quad |\varepsilon(x)| \le 5\cdot 10^{-3}.$$

Недостатком такого способа рассмотрения является то, что аппроксимация может давать хорошее приближение для функции, но не для ее производной. В рассматриваемом нами случае, по-видимому, не существует достаточно простого выражения, интерполирующего интеграл (4) между предельными значениями. Таким образом, первый способ рассмотрения для нас не пригоден. Кроме того, поскольку параметр порядка ведет себя существенно различным образом при $T \to 0$ и при $T \to T_c$, второй способ также оказывается неприменимым. Наконец, независимо от выбора аппроксиманты должно выполняться требование простоты ее вычисления по сравнению с исходным выражением. В противном случае использование аппроксиманты лишено смысла. Руководствуясь именно этим соображением, для вычисления интеграла (4) можно было бы поступить следующим образом. Выразим фермиевскую функцию в (4) через гиперболический тангенс. Для многих практических целей $\operatorname{th} x$ можно заменить его аргументом, если последний по модулю меньше единицы и $\operatorname{sgn} x$ — в противном случае. В результате приходим к легко вычисляемому интегралу:

$$I(u) = \begin{cases} \ln\left(2/u + 2/u\sqrt{1 - u^2/4}\right) - \sqrt{1 - u^2/4} & \text{при } |u| < 2, \\ 0 & \text{при } |u| > 2. \end{cases} \tag{5}$$

Из рис. 1 видно, что совпадение выражений (5) и (4) недостаточно хорошее. Может показаться, что попытка усовершенствовать аппроксимацию с целью улучшения полученного согласия приведет к совершенно неприемлемому по сложности выражению. Замечательным, однако, является то, что в интересующей нас области значений u (при не очень малых u) интеграл (4) очень хорошо (см. рис. 1) аппроксимируется функцией

$$I(u) = \ln \operatorname{cth} \alpha u, \tag{6}$$

где $\alpha = T_c/\Delta_0 \simeq 0{,}57$. В результате уравнение (3) преобразуется к виду

$$\ln m = \ln \operatorname{th} \frac{m}{t}, \tag{7}$$

где $m = \Delta/\Delta_0$. Очевидно, что уравнение (1) получается из (7) взятием экспоненты от обеих его частей. Подчеркнем, что уравнением для щели является именно (7), а не (1), а это приводит к тому, что выражения для свободных энергий обеих этих задач совершенно различны. Действительно, плотность свободной энергии магнетика (на узел), полученная в приближении самосогласованного поля, имеет вид

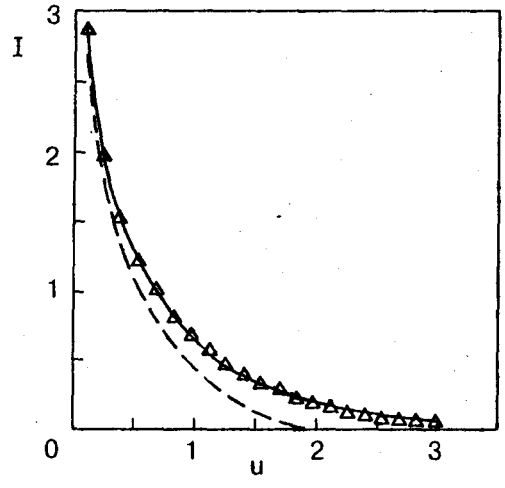

Рис. 1. Функция $I(u)$; Δ — точное выражение (4); штриховая линия соответствует аппроксиманте (5); сплошная — аппроксиманте (6).

$$F_M = T_c\left[\frac{m^2}{2} - t\ln\left(2\operatorname{ch}\frac{m}{t}\right)\right], \qquad (8)$$

а плотность свободной энергии (на единицу объема) сверхпроводника в приближении слабой связи с точностью до несущественной аддитивной постоянной равна

$$F = \frac{|\Delta|^2}{g} - \frac{2T}{V}\sum_{|\xi_{\mathbf{k}}|<\bar{\omega}} \ln\left(2\operatorname{ch}\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{2T}\right).$$

Учтем, что

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta^*} = \frac{2\Delta}{g} - \frac{1}{V}\sum_{|\xi_{\mathbf{k}}|<\bar{\omega}} \frac{\Delta}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} + \frac{2}{V}\sum_{|\xi_{\mathbf{k}}|<\bar{\omega}} \frac{\Delta}{\varepsilon_{\mathbf{k}}}\frac{1}{\exp(\varepsilon_{\mathbf{k}}/T)+1}. \qquad (9)$$

Переходя в (9) от суммирования к интегрированию и учитывая (6), для разности свободных энергий сверхпроводящего и нормального состояний получаем следующее выражение:

$$F_s - F_n = N(0)\Delta_0^2 m^2\left\{\ln m - \ln\operatorname{th}\frac{m}{t} - \frac{1}{2} + D_2\left(2\frac{m}{t}\right) - \frac{1}{2}D_2\left(4\frac{m}{t}\right)\right\}, \qquad (10)$$

где $N(0)$ — плотность состояний на поверхности Ферми, а $D_n(x)$ — функция Дебая, определяемая как [4]

$$D_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x dy\frac{y^n}{\exp(y)-1}.$$

Выражение (10) может быть представлено также в виде бесконечного ряда

$$F_s - F_n = N(0)\Delta_0^2 m^2\left\{\ln m - \ln\operatorname{th}\frac{m}{t} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(2n)(2^{2n-1}-1)}{n+1}\left(\frac{m}{\pi t}\right)^{2n}\right\}, \qquad (11)$$

где $\zeta(x)$ — ζ-функция.

Полученное выражение по своей структуре совершенно отлично от свободной энергии магнетика (9).

Тем более замечательным представляется тот факт, что в ряде случаев соответствие между решениями уравнений (1) и (2) распространяется и на их производные по температуре, что, как сказано выше, совершенно не обязательно должно иметь место для аппроксимационных выражений. Плотность нормальных электронов для сверхпроводника представляется в виде следующего интеграла:

$$\rho_n = 2u\int_0^{\infty}\frac{d\varphi\operatorname{ch}\varphi}{[\exp(u\operatorname{ch}\varphi)+1][\exp(-u\operatorname{ch}\varphi)+1]}. \qquad (12)$$

Ее можно записать также через производную параметра порядка по температуре [3]

$$\rho_n = 1 + \left(\frac{\partial\ln(\Delta/T)}{\partial\ln T}\right)^{-1}.$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (1) по t, имеем

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{m}{t}\frac{1-m^2}{1-m^2-t}$$

и для ρ_n получаем следующее очень простое выражение:

$$\rho_n = \frac{1-m^2}{t} = \frac{T_c}{T}\left(1 - \frac{\Delta^2}{\Delta_0^2}\right). \qquad (13)$$

Различие между плотностями нормальных электронов, найденными в результате численного счета по формулам (12) и (13), оказалось столь незначительным, что это не удалось отобразить на графике. Кроме того, асимптотика ρ_n при $T \to T_c$, найденная с помощью соотношения (13), совпадает с асимптотикой, полученной из точного выражения (12).

Уравнение Вейсса является частным случаем (для спина $S = 1/2$) более общего уравнения для магнитного момента системы с произвольным значением спина S, записанного в приближении самосогласованного поля. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли достичь еще более точного согласия с уравнением БКШ, рассматривая S как непрерывный параметр и варьируя его величину. Проведенные нами численные расчеты показывают, что значение $S = 1/2$ является оптимальным.

В заключение отметим следующее. То обстоятельство, что вблизи критической температуры различные системы, испытывающие фазовый переход второго рода, ведут себя более или менее одинаково, не является удивительным, поскольку в окрестности T_c (при T не очень близких к T_c) они могут быть описаны в рамках теории Ландау [3]. Однако нет никаких оснований ожидать, что и в произвольной области температур поведение таких систем будет сходным. В науке известно множество примеров совпадения числовых констант.

Но то, что в теории БКШ—Боголюбова поведение параметра порядка такое же, как и в вейссовской теории магнетизма, является уникальным примером удивительного числового совпадения уже не на уровне констант, а на уровне физических зависимостей. Удивительно, что совпадение имеет место для модельной задачи магнетизма с бесконечным радиусом взаимодействия, а не для реального магнетика, в котором при $T \to 0$ отклонение параметра порядка от насыщенного значения описывается функцией температуры (в пренебрежении релятивистскими эффектами), в то время как для вейссовского магнетика и в теории БКШ это отклонение экспоненциально мало.

Авторы выражают благодарность К. А. Чишко за постоянный интерес к работе.

1. D. J. Touless, *Phys. Rev.* **117**, 1256 (1960).
2. Y. Wada, *Progr. Theor. Phys.* **19**, 597 (1958).
3. Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1964).
4. А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, Москва (1975).
5. *Справочник по специальным функциям*, М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), Наука, Москва (1979).

On the temperature dependence of the superconducting order parameter

T. N. Antsygina and V. A. Slyusarev

The reasons are discussed why the temperature dependence of the order parameter in the microscopic superconductivity theory agrees with the behavior of magnetization in the Weiss magnet with a striking accuracy.