УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

СТРАТЕГИИ ГРУППОВОГО СБЛИЖЕНИЯ В МЕТОДЕ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. Исследован метод разрешающих функций для стратегий группового сближения в квазилинейных конфликтно-управляемых процессах. Предложена модифицированная схема метода, обеспечивающая окончание игры за определенное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий без дополнительных условий. Показаны результаты сравнения гарантированных времен различных схем метода разрешающих функций.

Ключевые слова: стратегия управления, групповое сближение, разрешающая функция, стробоскопическая стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются квазилинейные конфликтно-управляемые процессы группового сближения применительно к общей схеме метода разрешающих функций [1]. На основе методики [2] введены понятия верхней и нижней разрешающих функций двух типов и получены достаточные условия гарантированного результата, когда условие Понтрягина не имеет места. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии группового сближения и дано сравнение гарантированных времен. Исследована модифицированная схема метода разрешающих функций, обеспечивающая завершение процесса группового сближения в классе стробоскопической стратегии Хайека [3] без каких-либо дополнительных предположений.

Данная статья является развитием идей [1–14], примыкает к исследованиям [15–27] и определяет новые возможности применения метода разрешающих функций к решению игровых задач управления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

Рассмотрим квазилинейный конфликтно-управляемый процесс

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i, v), \ i = 1, \dots, N, \ z_i \in R^{n_i}, \ u_i \in U_i \subset R^{m_i}, \ v \in V \subset R^k, \quad (1)$$

где R^{n_i} — евклидово n_i-мерное пространство, A_i — квадратные матрицы порядка n_i, U_i, V — непустые компакты, вектор-функции $\varphi_i(u_i, v)$ непрерывны по совокупности переменных, являющихся параметрами управления группы преследователей и убегающего.

Терминальное множество M^* состоит из цилиндрических множеств M_i^*, $M_i^* \subset R^{n_i}$, $i = 1, \dots, N$, имеющих вид

$$M_i^* = M_i^0 + M_i, \quad (2)$$

где M_i^0 — линейное подпространство из R^{n_i}, а M_i — выпуклые компакты из ортогональных дополнений L_i к M_i^0 в пространстве R^{n_i}.

Рассмотрим для процесса (1), (2) задачу группового преследования, состоящую в приведении хотя бы одной из траекторий системы (1) на соответствующее множество (2) при любых противодействиях убегающего. При этом, если игра (1), (2) происходит на интервале $[0, T]$, то управления группы преследователей

© И.С. Раппопорт, 2019

в момент t выберем в виде набора измеримых функций

$$u(t) = \{u_i(t),\ i = 1, \ldots, N\},\ u_i(t) = u_i(z_i, v_t(\cdot)),$$
$$u_i(t) \in U_i,\ i = 1, \ldots, N,\ t \in [0, T], \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$, или в виде набора измеримых контруправлений

$$u(t) = \{u_i(t),\ i = 1, \ldots, N\},\ u_i(t) = u_i(z_i, v(t)),$$
$$u_i(t) = U_i,\ i = 1, \ldots, N,\ t \in [0, T]. \tag{4}$$

В случае (3) говорят о квазистратегии группы преследователей [1], в случае (4) — о стробоскопической стратегии Хайека [3] для группы преследователей.

Пусть $\gamma_i(t, \tau)$, $\gamma_i : \Delta \to L$, $i = 1, \ldots, N$, $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$, — некоторые, почти везде ограниченные измеримые по t и суммируемые по τ, $\tau \in [0, T]$, для каждого $t > 0$ функции, которые, следуя [2], назовем функциями сдвига.

Зафиксируем некоторый набор функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau),\ i = 1, \ldots, N\}$. Пусть π_i — оператор ортогонального проектирования из R^{n_i} на подпространство L_i. Положим

$$\xi_i(t) = \xi_i(t, z_i, \gamma_i(t, \cdot)) = \pi e^{tA_i} z_i + \int_0^t \gamma_i(t, \tau) d\tau,\ i = 1, \ldots, N,$$

и рассмотрим для $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$, $z_i \in R^{n_i}$ многозначные отображения

$$\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i) = \{\alpha \ge 0 : [\pi_i e^{(t-\tau)A_i} \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(t, \tau)] \cap$$
$$\cap\, \alpha [M_i - \xi_i(t)] \ne \varnothing\},\ i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Условие 1. Для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, \ldots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau),\ i = 1, \ldots, N\}$ многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)$, $i = 1, \ldots, N$, принимают непустые значения на множестве $\Delta \times V$.

Если данное условие выполнено, то по аналогии с работой [2] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции первого типа

$$\alpha_i^*(t, \tau, v, z_i^0) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)\},$$
$$\alpha_*^i(t, \tau, v, z_i^0) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)\},$$

где $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, $z_i^0 \in R^{n_i}$, $i = 1, \ldots, N$. Можно показать [4], что многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)$, $i = 1, \ldots, N$, замкнутозначны, $L \otimes B$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, так что верхняя $\alpha_i^*(t, \tau, v, z_i^0)$ и нижняя $\alpha_*^i(t, \tau, v, z_i^0)$ разрешающие функции, $i = 1, \ldots, N$, являются $L \otimes B$-измеримыми по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$. Поэтому они суперпозиционно измеримы [4], т.е. $\alpha_i^*(t, \tau, v(\tau), z_i^0)$ и $\alpha_*^i(t, \tau, v(\tau), z_i^0)$, $i = 1, \ldots, N$, измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$, при любой измеримой функции $v(\cdot) \in V(\cdot)$, где $V(\cdot)$ — совокупность измеримых функций $v(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty)$, со значениями из V.

Обозначим $\delta(t, \tau, z) = \inf\limits_{v \in V} \max\limits_{i = 1, \ldots, N} \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i)$, $\tau \in [0, t]$, $z = \{z_i, z_i \in R^{n_i}$, $i = 1, \ldots, N\}$.

Лемма 1. Функция $\delta(t, \tau, z) = \inf\limits_{v \in V} \max\limits_{i = 1, \ldots, N} \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i)$ — измеримая по τ при каждом t, $t > 0$, $\tau \in [0, t]$, функция.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $\varepsilon \in R^1$ и $\tau \in [0, t]$ многозначное отображение $G_\varepsilon(\tau) = \{v \in R^k : \max\limits_{i = 1, \ldots, N} \alpha_i^*(t, \tau, v, z_i) < \varepsilon\}$, которое имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $v \in R^k$ функции $\max\limits_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i)$ при любом $\tau \in [0,t]$.

Нетрудно показать, что при всех $\varepsilon \in R^1$ имеем $\delta(t,\tau,z) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $G_\varepsilon(\tau) \bigcap V \neq \varnothing$, $\tau \in [0,t]$. Действительно, пусть $\delta(t,\tau,z) < \varepsilon$ и $\gamma > 0$ выбрано так, что $\delta(t,\tau,z) + \gamma < \varepsilon$. Тогда согласно свойству инфинума существует такое $v_\gamma \in V$, что $\max\limits_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i) \leq \delta(t,\tau,z) + \gamma < \varepsilon$, поэтому $G_\varepsilon(\tau) \bigcap V \neq \varnothing$, $\tau \in [0,t]$. Обратно, если $v_0 \in V$ и $\max\limits_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i) < \varepsilon$, $\tau \in [0,t]$, то имеем $\delta(t,\tau,z) =$ $= \inf\limits_{v \in V} \max\limits_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i) \leq \max\limits_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i) < \varepsilon.$

Поскольку компакт V — измеримое многозначное отображение, согласно теореме о характеризации [28] существует счетное семейство измеримых селекторов компакта V (обозначим его $\{v_i(\cdot)\}_{i \geq 1}$) такое, что $V = \overline{\bigcup_{i > 1} v_i(\tau)}$ для каждого $\tau \in [0,t]$. Здесь черта над выражением означает замыкание [28]. Тогда для любого $\varepsilon \in R^1$ имеем

$$\{\tau \in [0,t] : \delta(t,\tau,z) < \varepsilon\} = \{\tau \in [0,t] : G_\varepsilon(\tau) \bigcap V \neq \varnothing\} =$$

$$= \{\tau \in [0,t] : G_\varepsilon(\tau) \bigcap [\overline{\bigcup_{i > 1} v_i(\tau)}] \neq \varnothing\} =$$

$$= \{\tau \in [0,t] : \max_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i) < \varepsilon \text{ для некоторого } v_0 \in \overline{\bigcup_{i > 1} v_i(\tau)}\} =$$

$$= \{\tau \in [0,t] : \max_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v_0(\tau),z_i) < \varepsilon \text{ для некоторого } v_0(\cdot) \in \{v_i(\cdot)\}_{i \geq 1} =$$

$$= \bigcup_{v_0(\cdot) \in \{v_i(\cdot)\}_{i \geq 1}} \{\tau \in [0,t] : \max_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v_0(\tau),z_i) < \varepsilon\}.$$

Но множество $\{\tau \in [0,t] : \max\limits_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v_0(\tau),z_i) < \varepsilon\}$ измеримо, поскольку, как отмечалось ранее, функции $\alpha_i^*(t,\tau,v,z_i)$, $i = 1,\dots,N$, суперпозиционно измеримы , т.е. $\alpha_i^*(t,\tau,v_0(\tau),z_i^0)$, $i = 1,\dots,N$, измеримы по τ, $\tau \in [0,t]$. Поэтому функция $\max\limits_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v_0(\tau),z_i)$ измерима по τ, $\tau \in [0,t]$.

Таким образом, функция $\delta(t,\tau,z) = \inf\limits_{v \in V} \max\limits_{i=1,\dots,N} \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i)$ является измеримой по τ, $\tau \in [0,t]$, функцией.

Рассмотрим многозначные отображения

$$\mathfrak{A}_i(t,\tau,z_i) = \bigcap_{v \in V} \mathfrak{A}_i(t,\tau,v,z_i), \quad z_i \in R^{n_i}, \quad i = 1,\dots,N, \quad (t,\tau) \in \Delta.$$

Условие 2. Для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t,\tau) = \{\gamma_i(t,\tau), i = 1,\dots,N\}$ многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t,\tau,z_i^0)$, $i = 1,\dots,N$, принимают непустые значения на множестве Δ.

Если данное условие выполнено, то по аналогии с [2] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа:

$$\alpha_i^*(t,\tau,z_i^0) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}_i(t,\tau,z_i^0)\},$$

$$\alpha_*^i(t,\tau,z_i^0) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}_i(t,\tau,z_i^0)\}, \quad i = 1,\dots,N.$$

Можно показать, что многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t,\tau,z_i^0)$, $i=1,\dots,N$, замкнутозначны, измеримы по τ, а верхняя и нижняя разрешающие функции измеримы по τ при фиксированном t.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0=\{z_i^0, z_i^0\in R^{n_i}$, $i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t,\tau)=\{\gamma_i(t,\tau), i=1,\dots,N\}$ множество

$$T_\alpha(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0: \inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)}\max_{i=1,\dots,N}\int_0^t \alpha_i^*(t,\tau,v(\tau),z_i^0)\,d\tau\ge 1,$$
$$\max_{i=1,\dots,N}\int_0^t \alpha_*^i(t,\tau,z_i^0)\,d\tau<1\}. \qquad (6)$$

Если при некотором i, $i=1,\dots,N$, для $\tau\in[0,t]$, $v\in V$ имеем $\alpha_i^*(t,\tau,v,z_i^0)\equiv$ $\equiv+\infty$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (6) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in T_\alpha(z_0,\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (6) не выполняются при всех $t>0$, положим $T_\alpha(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 1. Пусть для некоторого начального положения $z^0=$ $=\{z_i^0, z_i^0\in R^{n_i}, i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)=\{\gamma_i(\cdot,\cdot)$, $i=1,\dots,N\}$ выполнено условие 2, множество $T_\alpha(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T\in T_\alpha(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда по крайней мере для одного j, $1\le j\le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau)\in V$, $\tau\in[0,T]$, — произвольная измеримая функция.

Рассмотрим вначале случай $\xi_i(T,z_i^0,\gamma_i^0(T,\cdot))\notin M_i$ для всех i, $i=1,\dots,N$, и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\max_{i=1,\dots,N}\left[\int_0^t \alpha_i^*(T,\tau,v(\tau),z_i^0)\,d\tau+\int_t^T \alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)\,d\tau\right],\ t\in[0,T].$$

Функции $\alpha_i^*(T,\tau,v,z_i^0)$, $i=1,\dots,N$, $L\otimes B$-измеримы по совокупности (τ,v), $\tau\in[0,T]$, $v\in V$, поэтому они суперпозиционно измеримы, т.е. функции $\alpha_i^*(T,\tau,v(\tau),z_i^0)$, $i=1,\dots,N$, измеримы по τ, $\tau\in[0,T]$. Функции $\alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)$, $i=1,\dots,N$, измеримы по τ, $\tau\in[0,T]$.

Согласно определению T имеем

$$h(0)=1-\max_{i=1,\dots,N}\int_0^T \alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)\,d\tau>0,\ h(T)=1-\max_{i=1,\dots,N}\int_0^T \alpha_i^*(T,\tau,v(\tau),z_i^0)\,d\tau\le$$
$$\le 1-\inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)}\max_{i=1,\dots,N}\int_0^T \alpha_i^*(T,\tau,v(\tau),z_i^0)\,d\tau\le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что

$$h(t_*)=0. \qquad (7)$$

Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s): s\in[0,t_*]\}$.

Рассмотрим при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$, $i = 1, \dots, N$, многозначные отображения

$$U_i^1(\tau, v) = \{u_i \in U_i : \pi_i e^{(T-\tau)A_i} \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(T, \tau) \in$$

$$\in \alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0)[M_i - \xi_i(T)]\}. \tag{8}$$

В силу свойств параметров процесса (1), верхних разрешающих функций первого типа $\alpha_i^*(T, \tau, v(\tau), z_i^0)$ и на основании теоремы об обратном образе [4, 28] заключаем, что отображения $U_i^1(\tau, v)$, $i = 1, \dots, N$, $L \otimes B$-измеримы и компактнозначны при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [28] в многозначном отображении $U_i^1(\tau, v)$ существует хотя бы один $L \times B$-измеримый селектор $u_i^1(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователей на интервале $\tau \in [0, t_*]$ положим равными

$$u_i(\tau) = u_i^1(\tau, v(\tau)), \quad i = 1, \dots, N. \tag{9}$$

Из равенства (7) следует, что существует такой номер j, $1 \le j \le N$, что

$$1 - \left[\int_0^{t_*} \alpha_j^*(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau + \int_{t_*}^{T} \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau \right] = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим для $v \in V$, $\tau \in [t_*, T]$ многозначное отображение

$$U_j^2(\tau, v) = \{u_j \in U_j : \pi_j e^{(T-\tau)A_j} \varphi_j(U_j, v) - \gamma_j(T, \tau) \in$$

$$\in \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(T)]\}. \tag{11}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции второго типа $\alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 28] заключаем, что отображение $U_j^2(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо и компактнозначно при $v \in V$, $\tau \in [t_*, T]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [28] в многозначном отображении $U_j^2(\tau, v)$ существует хотя бы один $L \times B$-измеримый селектор $u_j^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управление преследователя с номером j на интервале $[t_*, T]$ положим равным

$$u_j(\tau) = u_j^2(\tau, v(\tau)), \tag{12}$$

а управления остальных преследователей на данном интервале выберем произвольными.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi_j z_j(T) = \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(T, \cdot)) + \int_0^T [\pi_j e^{(T-\tau)A_j} \varphi_j(u_j(\tau), v(\tau)) - \gamma_j(T, \tau)] d\tau.$$

Тогда с учетом соотношений (8)–(12) получим

$$\pi_j z_j(T) \in \xi_j(T) + \int_0^{t_*} \alpha_j^*(T, \tau, v(\tau), z_j^0)[M_j - \xi_j(T)] d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^{T} \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(T)] d\tau =$$

$$=\xi_j(T)\left[1-\int_0^{t_*}\alpha_j^*(T,\tau,v(\tau),z_j^0)d\tau-\int_{t_*}^{T}\alpha_*^j(T,\tau,z_j^0)d\tau\right]+$$

$$+\int_0^{t_*}\alpha_j^*(T,\tau,v(\tau),z_j^0)M_j\,d\tau+\int_{t_*}^{T}\alpha_*^j(T,\tau,z_j^0)M_j\,d\tau=$$

$$=\left[\int_0^{t_*}\alpha_j^*(T,\tau,v(\tau),z_j^0)d\tau+\int_{t_*}^{T}\alpha_*^j(T,\tau,z_j^0)d\tau\right]M_j\;=M_j.$$

Поэтому $\pi_j z_j(T)\in M_j$ и, следовательно, $z_j(T)\in M_j^*$.

Если для некоторого номера $q, 1\le q\le N$, имеем $\xi_q(T,z_q^0,\gamma_q(T,\cdot))\in M_q$, то при $v\in V$, $\tau\in[0,T]$ рассмотрим многозначное отображение

$$U_q^2(\tau,v)=\{u_q\in U_q:\pi_q e^{(T-\tau)A_q}\varphi_q(U_q,v)-\gamma_q(T,\tau)\in$$
$$\in\alpha_*^q(T,\tau,z_q^0)[M_q-\xi_q(T)]\}. \qquad (13)$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции второго типа $\alpha_*^q(T,\tau,z_q^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 28] заключаем, что отображение $U_q^2(\tau,v)$ $L\otimes B$-измеримо и компактнозначно при $v\in V$, $\tau\in[0,T]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [28] в многозначном отображении $U_q^2(\tau,v)$ существует хотя бы один $L\times B$-измеримый селектор $u_q^2(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управление q-го преследователя на интервале $[0,T]$ положим равным

$$u_q(\tau)=u_q^2(\tau,v(\tau)), \qquad (14)$$

а управления остальных преследователей на данном интервале выберем произвольными. Тогда с учетом аппарата опорных функций [29] из соотношений (13), (14) следует

$$\pi_q z_q(T)\in\xi_q(T)+\int_0^T\alpha_*^q(T,\tau,z_q^0)[M_q-\xi_q(T)]d\tau\subset M_q,$$

поскольку по предположению $c(M_q-\xi_q(T))\ge 0$,

$$\int_0^T\alpha_*^q(T,\tau,z_q^0)d\tau\le\max_{i=1,\dots,N}\int_0^T\alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)d\tau<1.$$

Поэтому $\pi_j z_j(T)\in M_j$ и, следовательно, $z_j(T)\in M_j^*$.

Теорема доказана.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0=\{z_i^0, z_i^0\in R^{n_i}, i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t,\tau)=\{\gamma_i(t,\tau), i=1,\dots,N\}$ множество

$$T_N(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\ge 0:\int_0^t\delta(t,\tau,z)d\tau\ge N,\int_0^t\max_{i=1,\dots,N}\alpha_*^i(t,\tau,z_i^0)d\tau<\frac{1}{N}\right\}. \qquad (15)$$

Если при $\tau\in[0,t]$, $v\in V$ имеем $\delta(t,\tau,z^0)\equiv+\infty$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (15) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (15) не выполняются при всех $t>0$, положим $T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Следствие 1. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot) = \{\gamma_i(\cdot,\cdot), i=1,\dots,N\}$ выполнено условие 2, множество $T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T \in T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда $T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \subset T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ и по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \max_{i=1,\dots,N} \int_0^T \alpha_i^*(T,\tau,v(\tau),z_i^0)d\tau \ge \inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N}\int_0^T \alpha_i^*(T,\tau,v(\tau),z_i^0)d\tau =$$

$$= \frac{1}{N} \inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \int_0^T \sum_{i=1}^N \alpha_i^*(T,\tau,v(\tau),z_i^0)d\tau \ge \frac{1}{N}\int_0^T \delta(T,\tau,z)d\tau \ge 1.$$

В то же время справедлива цепочка неравенств

$$\max_{i=1,\dots,N} \int_0^T \alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)d\tau \le \sum_{i=1}^N \int_0^T \alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)d\tau =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^N \alpha_*^i(T,\tau,z_i^0)d\tau \le \int_0^T N \max_{i=1,\dots,N} \alpha_*^i(t,\tau,z_i^0)d\tau < 1.$$

Таким образом, $T_N(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) \subset T_\alpha(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$, далее следует применить теорему 1.

Если выполнено условие 2, то положим для $(t,\tau)\in\Delta$, $v \in V$, $i=1,\dots,N$,

$$\beta_i^1(t,\tau,v,z_i) = \begin{cases} \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i), & \text{если} \quad \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i) = \max\limits_{j=1,\dots,N} \alpha_j^*(t,\tau,v,z_j), \\ \alpha_*^i(t,\tau,v,z_i), & \text{если} \quad \alpha_i^*(t,\tau,v,z_i) \ne \max\limits_{j=1,\dots,N} \alpha_j^*(t,\tau,v,z_j). \end{cases}$$

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t,\tau) = \{\gamma_i(t,\tau), i=1,\dots,N\}$ множество

$$T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) =$$
$$= \left\{ t \ge 0: \max_{i=1,\dots,N} \int_0^t \inf_{v\in V} \beta_i^1(t,\tau,v,z_i^0)d\tau \ge 1, \max_{i=1,\dots,N} \int_0^t \alpha_*^i(t,\tau,z_i^0)d\tau < 1 \right\}. \quad (16)$$

Если при некотором i, $i=1,\dots,N$, для $\tau\in[0,t]$ имеем $\inf\limits_{v\in V} \beta_i^1(t,\tau,v,z_i^0) \equiv +\infty$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (16) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (16) не выполняются при всех $t>0$, положим $T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot) = \{\gamma_i(\cdot,\cdot),\ i=1,\dots,N\}$ выполнено условие 2, множество $T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T \in T_\beta(z^0, \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда по крайней мере для одного $j, 1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$, $\tau \in [0, T]$, — произвольная измеримая функция.

Рассмотрим вначале случай $\xi_i(T, z_i^0, \gamma_i^0(T,\cdot)) \notin M_i$ для всех i, $i = 1, \dots, N$, и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \max_{i=1,\dots,N} \left[\int_0^t \beta_i^1(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau + \int_t^T \alpha_*^i(T, \tau, z_i^0) d\tau \right], \; t \in [0, T].$$

Функции $\beta_i^1(T, \tau, v, z_i^0)$, $i = 1, \dots, N$, $L \otimes B$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, поэтому они суперпозиционно измеримы, т.е. функции $\beta_i^1(T, \tau, v(\tau), z_i^0)$, $i = 1, \dots, N$, измеримы по τ, $\tau \in [0, T]$. Функции $\alpha_*^i(T, \tau, z_i^0)$, $i = 1, \dots, N$, измеримы по τ, $\tau \in [0, T]$.

Согласно определению T имеем

$$h(0) = 1 - \max_{i=1,\dots,N} \int_0^T \alpha_*^i(T, \tau, z_i^0) d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \max_{i=1,\dots,N} \int_0^T \beta_i^1(T, \tau, v(\tau), z_i^0) d\tau \le 1 - \max_{i=1,\dots,N} \int_0^T \inf_{v \in V} \beta_i^1(T, \tau, v, z_i^0) d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что

$$h(t_*) = 0. \tag{17}$$

Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим многозначные отображения при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$, $i = 1, \dots, N$,

$$U_i^1(\tau, v) = \{u_i \in U_i : \pi_i e^{(T-\tau)A_i} \varphi_i(U_i, v) - \gamma_i(T, \tau) \in$$
$$\in \beta_i^1(T, \tau, v(\tau), z_i^0)[M_i - \xi_i(T)]\}. \tag{18}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающих функций $\beta_i^1(T, \tau, v(\tau), z_i^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 28] заключаем, что отображения $U_i^1(\tau, v)$, $i = 1, \dots, N$, $L \otimes B$-измеримы и компактнозначны при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [28] в многозначном отображении $U_i^1(\tau, v)$ существует хотя бы один $L \times B$-измеримый селектор $u_i^1(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователей на интервале $\tau \in [0, t_*]$ положим равными

$$u_i(\tau) = u_i^1(\tau, v(\tau)), \; i = 1, \dots, N. \tag{19}$$

Из равенства (17) следует, что существует такой номер j, $1 \le j \le N$, что

$$1 - \left[\int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau \right] = 0. \tag{20}$$

Рассмотрим для $v \in V$, $\tau \in [t_*, T]$ многозначное отображение

$$U_j^2(\tau, v) = \{u_j \in U_j : \pi_j e^{(T-\tau)A_j} \varphi_j(U_j, v) - \gamma_j(T, \tau) \in$$

$$\in \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(T)]\}. \qquad (21)$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции второго типа $\alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 28] заключаем, что отображение $U_j^2(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо и компактнозначно при $v \in V$, $\tau \in [t_*, T]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [28] в многозначном отображении $U_j^2(\tau, v)$ существует хотя бы один $L \times B$-измеримый селектор $u_j^2(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управление преследователя с номером j на интервале $[t_*, T]$ положим равным

$$u_j(\tau) = u_j^2(\tau, v(\tau)), \qquad (22)$$

а управления остальных преследователей на интервале $[t_*, T]$ выберем произвольными.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi_j z_j(T) = \xi_j(T, z_j^0, \gamma_j(T, \cdot)) + \int_0^T [\pi_j e^{(T-\tau)A_j} \varphi_j(u_j(\tau), v(\tau)) - \gamma_j(T, \tau)] d\tau.$$

Тогда с учетом соотношений (18)–(22) получим

$$\pi_j z_j(T) \in \xi_j(T) + \int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0)[M_j - \xi_j(T)] d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(T)] d\tau =$$

$$= \xi_j(T)[1 - \int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau - \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau] +$$

$$+ \int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0) M_j d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) M_j d\tau =$$

$$= \left[\int_0^{t_*} \beta_j^1(T, \tau, v(\tau), z_j^0) d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau \right] M_j = M_j.$$

Поэтому $\pi_j z_j(T) \in M_j$ и, следовательно, $z_j(T) \in M_j^*$.

Случай, когда для некоторого номера q, $1 \le q \le N$, $\xi_q(T, z_q^0, \gamma_q(T, \cdot)) \in M_q$, можно рассмотреть так же, как в теореме 1.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, \ldots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot, \cdot) = \{\gamma_i(\cdot, \cdot), i = 1, \ldots, N\}$ выполнено условие 2, множество $T_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $T \in T_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда $T_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot)) \subset T_\beta(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$ и по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\max_{i=1,\ldots,N}\int_0^T \inf_{v\in V}\beta_i^1(T,\tau,v,z_i^0)d\tau \geq \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\int_0^T \inf_{v\in V}\beta_i^1(T,\tau,v,z_i^0)d\tau =$$

$$=\frac{1}{N}\int_0^T\sum_{i=1}^{N}\inf_{v\in V}\beta_i^1(T,\tau,v,z_i^0)d\tau \geq \frac{1}{N}\int_0^T\delta(T,\tau,z)d\tau\geq 1.$$

Таким образом, $T_N(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))\subset T_\beta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$, далее следует применить теорему 2.

СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ КЛАССА СТРОБОСКОПИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ

Из доказательств теорем 1 и 2 видно, что преследователь в момент t использует информацию о $v_t(\cdot)$, причем она необходима лишь для определения момента переключения t_*, который разделяет активный и пассивный интервалы. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, которое определяется стробоскопической стратегией. В сформулированной далее теореме показано, что для реализации гарантированного времени можно ограничиться контруправлением с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления.

Если выполнено условие 2, то положим для $(t,\tau)\in\Delta$, $i=1,\ldots,N$,

$$\beta_i^2(t,\tau,z_i)=\begin{cases}\alpha_i^*(t,\tau,z_i), & \text{если } \alpha_i^*(t,\tau,z_i)=\max\limits_{j=1,\ldots,N}\alpha_j^*(t,\tau,z_j),\\ \alpha_*^i(t,\tau,z_i), & \text{если } \alpha_i^*(t,\tau,z_i)\neq\max\limits_{j=1,\ldots,N}\alpha_j^*(t,\tau,z_j).\end{cases}$$

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0=\{z_i^0, z_i^0\in R^{n_i}$, $i=1,\ldots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t,\tau)=\{\gamma_i(t,\tau), i=1,\ldots,N\}$ множество

$$\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\geq 0:\max_{i=1,\ldots,N}\int_0^t\beta_i^2(t,\tau,z_i^0)d\tau\geq 1,\ \max_{i=1,\ldots,N}\int_0^t\alpha_*^i(t,\tau,z_i^0)d\tau<1\right\}. \quad (23)$$

Если при некотором i, $i=1,\ldots,N$, для $\tau\in[0,t]$, $v\in V$ имеем $\beta_i^2(t,\tau,z_i^0)\equiv+\infty$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (23) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (23) не выполняются при всех $t>0$, положим $\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 3. Пусть для некоторого начального положения $z^0=$ $=\{z_i^0, z_i^0\in R^{n_i}, i=1,\ldots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)=\{\gamma_i(\cdot,\cdot)$, $i=1,\ldots,N\}$ выполнено условие 2, множество $\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\Theta\in\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда по крайней мере для одного j, $1\leq j\leq N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент Θ с использованием управления вида (4) с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления.

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau)\in V$, $\tau\in[0,\Theta]$, — произвольная измеримая функция.

Рассмотрим вначале случай $\xi_i(\Theta, z_i^0, \gamma_i(\Theta, \cdot)) \notin M_i$ для всех i, $i=1, \ldots, N$, и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \max_{i=1,\ldots,N}\left[\int_0^t \beta_i^2(\Theta,\tau,z_i^0)d\tau + \int_t^\Theta \alpha_*^i(\Theta,\tau,z_i^0)d\tau\right],\ t \in [0,\Theta].$$

Согласно определению Θ имеем

$$h(0) = 1 - \max_{i=1,\ldots,N}\int_0^\Theta \alpha_*^i(\Theta,\tau,z_i^0)d\tau > 0,\ h(\Theta) = 1 - \max_{i=1,\ldots,N}\int_0^\Theta \beta_i^2(\Theta,\tau,z_i^0)d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, \Theta]$, что

$$h(t_*) = 0. \tag{24}$$

Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$, $i = 1, \ldots, N$, следующие многозначные отображения:

$$U_i^1(\tau,v) = \{u_i \in U_i : \pi_i e^{(\Theta-\tau)A_i}\varphi_i(U_i,v) - \gamma_i(\Theta,\tau) \in \beta_i^2(\Theta,\tau,z_i^0)[M_i - \xi_i(\Theta)]\}. \tag{25}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающих функций $\beta_i^2(\Theta,\tau,z_i^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 28] заключаем, что отображения $U_i^1(\tau,v)$, $i=1,\ldots,N$, $L\otimes B$-измеримы и компактнозначны при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [28] в многозначном отображении $U_i^1(\tau,v)$ существует хотя бы один $L\times B$-измеримый селектор $u_i^1(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управления преследователей на интервале $\tau \in [0, t_*]$ положим равными

$$u_i(\tau) = u_i^1(\tau, v(\tau)),\ i = 1, \ldots, N. \tag{26}$$

Из равенства (24) следует, что существует такой номер j, $1 \le j \le N$, что

$$1 - \left[\int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta,\tau,z_j^0)d\tau + \int_{t_*}^\Theta \alpha_*^j(\Theta,\tau,z_j^0)d\tau\right] = 0. \tag{27}$$

Рассмотрим для $v \in V$, $\tau \in [t_*, \Theta]$ многозначное отображение

$$\begin{aligned} U_j^2(\tau,v) = \{u_j \in U_j : \pi_j e^{(\Theta-\tau)A_j}\varphi_j(U_j,v) - \gamma_j(\Theta,\tau) \in \\ \in \alpha_*^j(\Theta,\tau,z_j^0)[M_j - \xi_j(\Theta)]\}. \end{aligned} \tag{28}$$

В силу свойств параметров процесса (1) и разрешающей функции $\alpha_*^j(\Theta,\tau,z_j^0)$ на основании теоремы об обратном образе [4, 28] заключаем, что отображение $U_j^2(\tau,v)$ $L\otimes B$-измеримо и компактнозначно при $v \in V$, $\tau \in [t_*, \Theta]$. Поэтому согласно теореме измеримого выбора [28] в многозначном отображении $U_j^2(\tau,v)$ существует хотя бы один $L\times B$-измеримый селектор $u_j^2(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Управление преследователя с номером j на интервале $[t_*, \Theta]$ положим равным

$$u_j(\tau) = u_j^2(\tau, v(\tau)), \tag{29}$$

а управления остальных преследователей на данном интервале выберем произвольными.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi_j z_j(\Theta) = \xi_j(\Theta, z_j^0, \gamma_j(\Theta, \cdot)) + \int_0^{\Theta} [\pi_j e^{(\Theta-\tau)A_j} \varphi_j(u_j(\tau), v(\tau)) - \gamma_j(\Theta, \tau)] d\tau.$$

Тогда с учетом соотношений (25)–(29) получим

$$\pi_j z_j(\Theta) \in \xi_j(\Theta) + \int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(\Theta)] d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0)[M_j - \xi_j(\Theta)] d\tau =$$

$$= \xi_j(\Theta)[1 - \int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0) d\tau - \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*^j(T, \tau, z_j^0) d\tau] +$$

$$+ \int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0) M_j d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*^j(\Theta, \tau, z_j^0) M_j d\tau =$$

$$= [\int_0^{t_*} \beta_j^2(\Theta, \tau, z_j^0) d\tau + \int_{t_*}^{\Theta} \alpha_*^j(\Theta, \tau, z_j^0) d\tau] M_j = M_j.$$

Поэтому $\pi_j z_j(\Theta) \in M_j$ и, следовательно, $z_j(\Theta) \in M_j^*$.

Случай, когда для некоторого номера q, $1 \le q \le N$, $\xi_q(\Theta, z_q^0, \gamma_q^0(\Theta, \cdot)) \in M_q$, можно рассмотреть так же, как в теореме 1.

Теорема доказана.

Рассмотрим для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, \ldots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t, \tau) = \{\gamma_i(t, \tau), i = 1, \ldots, N\}$ множество

$$\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \max_{j=1,\ldots,N} \alpha_j^*(t, \tau, z_j) d\tau \ge N, \right.$$

$$\left. \int_0^t \max_{i=1,\ldots,N} \alpha_*^i(t, \tau, z_i^0) d\tau < \frac{1}{N} \right\}. \tag{30}$$

Если при некотором i, $i = 1, \ldots, N$, для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$ имеем $\max_{j=1,\ldots,N} \alpha_j^*(t, \tau, z_j) \equiv +\infty$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (30) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in \Theta_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (30) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Следствие 1. Пусть для некоторого начального положения $z^0 = \{z_i^0, z_i^0 \in R^{n_i}, i = 1, \ldots, N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot, \cdot) = \{\gamma_i(\cdot, \cdot), i = 1, \ldots, N\}$ выполнено условие 2, множество $\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $\Theta \in \Theta_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда $\Theta_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot)) \subset \Theta(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$ и по крайней мере для одного j, $1 \le j \le N$, соответствующая траектория процесса (1) из начального положения z_0^j может быть приведена на терминальное множество M_j^* в момент Θ с использованием управления вида (4) с переключением, момент которого не зависит от предыстории управления.

Доказательство. Имеют место следующие соотношения:

$$\max_{i=1,\dots,N}\int_0^T \beta_i^2(T,\tau,z_i^0)d\tau \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{N}\int_0^T \beta_i^2(T,\tau,z_i^0)d\tau =$$

$$=\frac{1}{N}\int_0^T \sum_{i=1}^N \beta_i^2(T,\tau,z_i^0)d\tau \geq \frac{1}{N}\int_0^T \max_{j=1,\dots,N}\alpha_j^*(t,\tau,z_j)d\tau \geq 1.$$

Таким образом, $\Theta_N(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))\subset\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$, далее следует применить теорему 3.

СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН

Лемма 2. Пусть для некоторого начального положения $z^0=\{z_i^0, z_i^0\in R^{n_i}, i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(t,\tau)=\{\gamma_i(t,\tau), i=1,\dots,N\}$ выполнено условие 2, многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)$, $i=1,\dots,N$, принимают непустые компактные значения на множестве $\Delta\times V$ и верхние разрешающие функции первого типа $\alpha_i^*(t,\tau,v,z_i^0)$, $i=1,\dots,N$, ограничены, $(t,\tau)\in\Delta$, $v\in V$. Тогда имеет место неравенство

$$\delta(t,\tau,z^0)\geq \max_{i=1,\dots,N}\alpha_i^*(t,\tau,z_i^0), \quad (t,\tau)\in\Delta. \tag{31}$$

Если к тому же многозначные отображения $\mathfrak{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)$, $i=1,\dots,N$, принимают непустые выпуклые значения на множестве $\Delta\times V$, т.е. $\mathfrak{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)=$ $=[\alpha_*^i(t,\tau,v,z_i^0),\alpha_i^*(t,\tau,v,z_i^0)]$, то в соотношении (31) имеет место равенство.

Доказательство. По определению в силу компактности образов отображений $\mathfrak{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)$ для каждого $v\in V$ имеем $\alpha_i^*(t,\tau,z_i^0)\in\mathfrak{A}_i(t,\tau,v,z_i^0)$, $(t,\tau)\in\Delta$, $i=1,\dots,N$, поэтому $\alpha_i^*(t,\tau,z_i^0)\leq\alpha_i^*(t,\tau,v,z_i^0)$, $v\in V$, $i=1,\dots,N$. Тогда получим

$$\max_{i=1,\dots,N}\alpha_i^*(t,\tau,z_i^0)\leq \max_{i=1,\dots,N}\alpha_i^*(t,\tau,v,z_i^0)\leq\delta(t,\tau,z^0),\ (t,\tau)\in\Delta,\ v\in V.$$

В то же время существует такой номер j, $1\leq j\leq N$, что $\alpha_j^*(t,\tau,v,z_j^0)\geq$ $\geq\delta(t,\tau,z^0)$, $(t,\tau)\in\Delta$, $v\in V$. При этом справедливо

$$\alpha_*^j(t,\tau,z_j^0)=\sup_{v\in V}\alpha_*^j(t,\tau,v,z_j^0)\leq\inf_{v\in V}\alpha_j^*(t,\tau,v,z_j^0)\leq\delta(t,\tau,z_j^0).$$

Тогда в силу выпуклозначности отображения $\mathfrak{A}_j(t,\tau,v,z_i^0)$ имеем $\delta(t,\tau,z)\in$ $\in\mathfrak{A}_j(t,\tau,v,z_i^0)$, $v\in V$, $(t,\tau)\in\Delta$, и, следовательно, $\delta(t,\tau,z)\in\bigcap_{v\in V}\mathfrak{A}_j(t,\tau,v,z_i)$.

В результате получим

$$\delta(t,\tau,z)\leq\alpha_j^*(t,\tau,z_i^0)\leq\max_{i=1,\dots,N}\alpha_i^*(t,\tau,z_i^0),\ (t,\tau)\in\Delta.$$

Теорема 4. Пусть для некоторого начального положения $z^0=$ $=\{z_i^0, z_i^0\in R^{n_i}, i=1,\dots,N\}$ и набора функций сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)=\{\gamma_i(\cdot,\cdot), i=1,\dots,N\}$ выполнено условие 2. Тогда имеют место включения $T_\alpha(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))\supset$ $\supset T_\beta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))\supset T_N(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$, $T_\beta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))\supset\Theta(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))\supset\Theta_N(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$, $T_N(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))\supset\Theta_N(z^0,\gamma(\cdot,\cdot))$. Если к тому же многозначные отображения

$\mathfrak{A}_i(t, \tau, v, z_i^0)$, $i = 1, \ldots, N$, принимают непустые выпуклые значения на множестве $\Delta \times V$, то справедливы равенства $T_\beta(z^0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \Theta(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$, $T_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \Theta_N(z^0, \gamma(\cdot, \cdot))$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 2 и конструкций соответствующих определений и теорем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены квазилинейные конфликтно-управляемые процессы группового сближения применительно к общей схеме метода разрешающих функций. Сформулированы достаточные условия гарантированного результата, когда условие Понтрягина не выполняется. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии группового сближения и дано сравнение гарантированных времен. Исследована также модифицированная схема метода разрешающих функций, обеспечивающая завершение процесса группового сближения в классе котруправлений без каких-либо дополнительных предположений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chikrii A. A. Conflict controlled processes. Dortrecht; London: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
2. Чикрий А.А., Чикрий В.К. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 3. С. 65–78.
3. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic press, 1975. Vol. 12. 266 p.
4. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 5. С. 40–64.
5. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами. *Кибернетика*. 1976. № 3. С. 145, 146.
6. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С. Об одной задаче группового преследования. *Кибернетика*. 1979. № 6. С. 145, 146.
7. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями. *ДАН СССР*. 1981. Т. 256, № 3. С. 530–535.
8. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений. *ДАН СССР*. 1981. Т. 259, № 4. С. 785–788.
9. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Групповое преследование в дифференциальных играх. *Wissenshaftliche Zeitschriff.* Techische Hochschul Leipzig, 1982. N 1. S. 13–27.
10. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. Гарантированный результат в дифференциальной игре группового преследования с терминальной функцией платы. *Прикл. математика и механика*. 1997. Т. 61, № 4. С. 584–594.
11. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 3. С. 49–58.
12. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 90–102.
13. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 1. С. 72–84.
14. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций для игровых задач управления с интегральными ограничениями. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 5. С. 109–127.
15. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
16. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.

17. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.

18. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.

19. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. Москва: Изд-во МГУ, 1990. 198 с.

20. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 260 с.

21. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 46, N 5. P. 584–589.

22. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Pareto optimality, Game Theory and Equilibria, Springer Optimization and its Applications*. 2008. Vol. 17. P. 349–387.

23. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. Vol. 27, N 1. P. 27–38.

24. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271. P. 69–85.

25. Chikrii A.A., Kalashnikova S.F. Pursuit of a group of evaders by a single controlled object. *Cybernetics*. 1987. Vol. 23, N 4. P. 437–445.

26. Chikrii A.A., Sobolenko L.A., Kalashnikova S.F. A numerical method for the solution of the successive pursuit and evasion problem. *Cybernetics*. 1988. Vol. 24, N 1. P. 53–59.

27. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.J. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving object. *Cybernetics and Systems Analisis*. 2001. Vol. 37, N 1. P. 75–91.

28. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.

29. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.

Надійшла до редакції 07.08.2018

Й.С. Раппопорт

СТРАТЕГІЇ ГРУПОВОГО ЗБЛИЖЕННЯ У МЕТОДІ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИХ ПРОЦЕСІВ

Анотація. Досліджено метод розв'язувальних функцій для стратегій групового зближення у квазілінійних конфліктно-керованих процесах. Запропоновано модифіковану схему методу, що забезпечує закінчення гри за певний гарантований час у класі стробоскопічних стратегій без додаткових умов. Наведено результати порівняння гарантованих часів різних схем методу розв'язувальних функцій.

Ключові слова: стратегія керування, групове зближення, розв'язувальна функція, стробоскопічна стратегія.

J.S. Rappoport

STRATEGIES OF GROUP APPROACH IN THE METHOD OF RESOLVING FUNCTIONS FOR QUASILINEAR CONFLICT-CONTROLLED PROCESSES

Abstract. The paper analyzed the resolving-functions method as applied to strategies of group approach for quasilinear conflict-controlled processes. A modified scheme of the method is proposed. This scheme ensures the end of a game within a certain guaranteed time period in the class of stroboscopic strategies without any subsidiary conditions. The guaranteed times for various schemes of the resolving-functions method are compared.

Keywords: strategies of control, group approach, resolving function, stroboscopic strategy.

Раппопорт Иосиф Симович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.