

**АТМОСФЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕМЕНТАХ  
ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ**

**Аннотация.** Показаны эффективность и точность предлагаемых гидродинамической модели атмосферы, турбулентной модели замыкания, методов аппроксимации производных первого и второго порядков на неравномерной сетке и абсолютно устойчивая разностная схема на основе решения прикладных задач. Проведено сравнение результатов математического моделирования аэродинамики уличных каньонов с существующими теоретическими и экспериментальными данными. Исследовано влияние длины уличного каньона и высоты домов на характеристики воздушного потока в городской застройке. Показано, что изменение конфигурации городской застройки приводит не только к количественному, но и к существенному качественному изменению картины течения воздуха и его скорости.

**Ключевые слова:** гидродинамическая мезомасштабная модель атмосферы, разностная схема, замыкание модели турбулентности, скорость ветра, ротор скорости, прямоугольный канал, уличный каньон, городская застройка.

**ВВЕДЕНИЕ**

Уравнения гидродинамики имеют ряд специфических особенностей, проявляющихся в численной реализации, и одна из существенных — пространственно-эллиптический характер уравнений, обусловленный влиянием дивергенции тензора напряжений  $\nabla \cdot \vec{\tau}_n$  в поле течения. В связи с этим для решения уравнений гидродинамики необходимо использовать типичные для начально-краевых задач методы решения и формулировать краевые условия на всех границах расчетной области.

В системе уравнений гидродинамики в члене  $\nabla \cdot \vec{\tau}_n$  имеется параметр  $\nu$ , изменению которого соответствует существенное изменение гладкости решения. Это связано с появлением у подстилающей поверхности пограничного слоя больших вертикальных градиентов метеорологических величин.

Наконец, система уравнений гидродинамики нелинейная, что типично для многих систем гидродинамического типа и обусловлено инерционными составляющими в уравнениях количества движения. В сочетании с двумя упоминавшимися особенностями нелинейность уравнений гидродинамики приводит к образованию весьма сложных пространственно-временных структур. Численное решение при этом имеет не только нерегулярный характер во времени, но и существенно усложняется его пространственная структура, в частности, теряет устойчивость и дробится пограничный слой. Во внешнем течении (в свободной атмосфере) появляются вторичные потоки и т.д. В ряде случаев трудно отличить явления вычислительной неустойчивости от возможного сложного поведения решений.

Таким образом, полная система уравнений гидротермодинамики имеет большую общность и универсальность, но для практических приложений достаточно сложна. Поэтому при гидродинамическом моделировании процессов и явлений в атмосфере различного масштаба используют, где это возможно, известные гипотезы и допущения, позволяющие, сохранив специфические для конкретной задачи физические и термодинамические свойства атмосферы, упростить (в некоторых случаях весьма существенно) исходную модель гидротермодинамики.

В атмосфере существуют различные процессы и явления: одни развиваются на весьма ограниченной территории в течение небольшого отрезка времени, дру-

гие — на обширных пространствах длительное время. В современной классификации в зависимости от размера территории, для которой реализуется моделирование процессов или отдельных явлений в атмосфере, гидродинамические модели подразделяются на локальные ( $\alpha$ - и  $\beta$ -мезомасштаба соответственно 2–20 км и 20–200 км) и региональные ( $\gamma$ -мезомасштаба 200–2000 км).

Очевидно, что формирование процессов и явлений в атмосфере в каждой конкретной области происходит под влиянием процессов всех перечисленных масштабов. Однако значимость каждого процесса в различных условиях неодинакова. Так, формирование общей циркуляции на больших пространствах происходит, главным образом, под влиянием макромасштабных процессов. Мезомасштабные процессы при этом менее значительны. Следовательно, существуют определенные приоритеты для включения тех или иных процессов в гидродинамическую модель.

Наличие в атмосфере горизонтальных и вертикальных градиентов скорости ветра, температуры и влажности способствует росту гидротермодинамической неустойчивости и нелинейному взаимодействию между возмущениями различных временных и пространственных масштабов. Следовательно, в локальных моделях порядок некоторых членов уравнений зависит от местных условий области решения и может изменяться в широких пределах. Упрощение исходной системы уравнений путем пренебрежения некоторыми входящими в уравнения членов требует доказательства их малости в пределах всей рассматриваемой области решения и времени реализации, что в настоящее время оказывается трудной задачей. Таким образом,  $\alpha$ - и  $\beta$ -мезомасштабные модели требуют использования полных уравнений гидротермодинамики.

Цель данной статьи — продемонстрировать эффективность и точность предлагаемых далее моделей и методов на основе решения мезомасштабных прикладных задач путем перехода от простых задач к более сложным.

#### МЕЗОМАСШТАБНАЯ МОДЕЛЬ АТМОСФЕРЫ

Рассмотрим мезомасштабную модель атмосферы в прямоугольной декартовой системе координат  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  в виде [1]:

— уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad (1)$$

— уравнений движения атмосферы

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = & -e^{-\mathcal{R}} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - 2 \Omega (w \cos \varphi - v \sin \varphi), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = & -e^{-\mathcal{R}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] - 2 \Omega u \sin \varphi, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = & -e^{-\mathcal{R}} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2 \Omega u \cos \varphi; \end{aligned} \quad (2)$$

— распространения в атмосфере скалярных величин  $\mathfrak{F} = (\theta, q, \delta, s)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} = \\ & = f + \frac{\partial}{\partial x} \left( d_T \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( d_T \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( d_T \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $V = (u, v, w)$  — скорость ветра;  $\mathcal{R} = \ln(\rho)$ ,  $\rho$  — плотность воздуха;  $\theta = T(p_{00}/p)^{R/c_p}$  — потенциальная температура воздуха;  $T$  — абсолютная температура воздуха;  $p$  — давление воздуха в миллибарах,  $p_{00}$  — давление на подстилающей поверхности;  $R$  — универсальная газовая постоянная для сухого воздуха;  $p = R\rho T$  — уравнение состояния;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $q$  — удельная влажность (масса водяного пара в единице массы воздуха);  $\delta$  — удельная водность (масса сконденсированной влаги в единице массы воздуха);  $s$  — концентрация примеси в воздухе;  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли;  $\mathbf{g} = (0, 0, g)$  — ускорение силы тяжести;  $\nu$  — коэффициент турбулентной вязкости;  $d_T$  — коэффициент турбулентной диффузии;  $f$  — источниковые (стоковые) члены.

В области  $\mathcal{J} = [\mathbf{r} \in \mathfrak{R}] \times [t \in \mathcal{F}]$  система уравнений (1)–(3) в принципе позволяет при заданных в некоторый момент времени  $t$  значениях полей искомым функций  $u, v, w, \theta, p, q, \delta, s$  и соответствующих граничных условиях определить значение полей этих функций в некоторый момент времени  $t + \Delta t$ ,  $\Delta t > 0$ . Но интегрирование уравнений гидродинамической модели атмосферы (1)–(3) с локально высоким разрешением в условиях ограниченных вычислительных ресурсов сопряжено со значительными трудностями, даже в случае применения эффективных численных методов. Под эффективностью понимается затрачиваемое одним процессором время, необходимое для интегрирования системы уравнений модели на один час модельного времени при заданном уровне ошибки воспроизведения атмосферных процессов. Выбор оптимального метода решения нелегок ввиду того, что цель (точность) и средства (экономичность) противоречивы. Несмотря на постоянное совершенствование ЭВМ, актуальны проблемы точности и экономичности численных методов решения системы уравнений (1)–(3). Наиболее трудоемка численная реализация зависимостей, описывающих процессы подсеточного масштаба: турбулентность, коротковолновая и длинноволновая радиации, облако- и осадкообразование и т.д.

#### МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Решить систему уравнений (1)–(3) невозможно без использования численных методов, в которых поле течения аппроксимируется конечным числом расчетных точек. Основная трудность такого расчета турбулентных течений обусловлена тем, что масштабы турбулентности намного меньше расстояний между узлами используемых на практике расчетных сеток. Хотя оценки в различных публикациях отличаются, расчеты показывают, что для численного моделирования движения турбулентного вихря необходимо по меньшей мере 10 узлов сетки. Масштаб наименьших вихрей обычно в 1000 раз меньше области течения вдоль твердой поверхности. Для типичных течений при расчете области течения объемом  $1 \text{ см}^3$  может понадобиться 105 узлов сетки. По этим причинам прямые расчеты полей турбулентных течений (Direct Numerical Simulation, DNS) на современной вычислительной технике практически невозможны. Такие же проблемы возникают при применении метода Large Eddy Simulation (LES), с помощью которого пытаются моделировать крупномас-

штабное турбулентное движение, исходя из основных принципов численного решения «отфильтрованной» системы уравнений Навье–Стокса, описывающей это крупномасштабное трехмерное нестационарное движение. Таким образом, несмотря на быстрый прогресс в развитии вычислительной техники, современные ее возможности все еще недостаточны для решения уравнений Навье–Стокса методами DNS и LES в задачах моделирования атмосферных процессов, представляющих практический интерес.

Таким образом, закономерности развитого турбулентного движения приходится искать лишь для осредненных по времени величин скорости, температуры, концентрации и давления. Такой путь в сочетании с некоторыми весьма вероятными полуэмпирическими гипотезами для импульса, тепло- и массообмена, вызываемыми турбулентным перемешиванием, позволяет привести систему уравнений (1)–(3) к виду, допускающему их интегрирование.

На практике детального знания полей гидродинамических величин в большинстве случаев не требуется, так как интерес представляют лишь усредненные (статистические) характеристики турбулентных полей. Поэтому для анализа турбулентности используют статистическое и спектральное описания, которые не позволяют получить результат определенным образом, но дают возможность определить вероятность его появления. Статистический анализ описывает перенос энергии между различными масштабами или вихрями различных размеров, а спектральный — обмен кинетической энергией, соответствующей вихрям различных размеров или с различными частотами пульсаций в турбулентном движении.

Приемы, заложенные Рейнольдсом в [3], с помощью которых можно установить связи между усредненными характеристиками гидродинамических полей, подробно описаны в [2, 4–7]. Модели, осуществляющие замыкание уравнений Рейнольдса, относятся к так называемым моделям рейнольдсовых напряжений (МРН).

В публикациях модели турбулентного замыкания МРН часто классифицируются по числу дополнительных дифференциальных уравнений в частных производных, которые необходимо решить для получения параметров модели. Это число может изменяться от нуля в случае простейших алгебраических моделей до 12 в случае наиболее сложных МРН. Согласно этой терминологии в модели замыкания первого порядка рейнольдсовы напряжения рассчитываются как функции только усредненных скоростей и геометрии задачи [8]. Модель замыкания второго порядка использует решение некоторого модельного уравнения для переноса одной или более характеристик турбулентности. В настоящее время наиболее широко применяются методы замыкания уравнений переноса на уровне уравнений для корреляционных моментов второго порядка [5]. Огромное значение в развитии этого подхода к изучению турбулентности получили гипотезы [9, 10], позволившие замкнуть систему уравнений с привлечением соотношений для вторых моментов пульсаций. В настоящее время эти гипотезы конкретизированы и обобщены [5, 6].

Модели, в которых используется гипотеза Буссинеска [8], и большинство моделей, применяемых в инженерных расчетах, также относятся к МРН. Экспериментальные наблюдения свидетельствуют о том, что гипотеза турбулентной вязкости пригодна для многих гидродинамических задач, несмотря на то, что она основана в принципе на ошибочных концепциях. Это объясняется тем, что постоянные параметры модели подбираются на основе экспериментальных данных, т.е. турбулентная вязкость выбирается такой, чтобы средние профили характеристик некоторых стандартных течений предсказывались приблизительно правильно. Иными словами, создается новая среда с другими физическими свойствами, имеющая, однако, те же характеристики сопротивления, теплопередачи и массообмена, что и турбулентность при соответствующих внешних условиях.

Согласно гипотезе Буссинеска [8]

$$-\overline{v'v'} = \nu \left( \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \nu \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial x_k} + k \right),$$

где  $-\overline{v'v'}$  — тензор дополнительных напряжений;  $\nu$  — коэффициент турбулентной вязкости;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ), и аналогии Рейнольдса [3] имеем

$$-\overline{v'_j \Phi'} = d_T \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (j=1, 2, 3),$$

где  $-\overline{v'_j \Phi'}$  — дополнительный перенос, возникающий вследствие наличия турбулентных пульсаций скорости и одной из скалярных величин  $\Phi = (\theta, q, \delta, s)$ ;  $d_T$  — коэффициент турбулентной диффузии.

Связь между коэффициентом турбулентной вязкости  $\nu$  и коэффициентами турбулентного переноса тепла и массы  $d_T$  осуществляется турбулентными числами Прандтля  $Pr$  и Шмидта  $Sc$ . Обобщенно обозначив одно из них  $\zeta = (Pr, Sc)$ , запишем эту связь в виде  $d_T = \nu / \zeta$ . Хотя коэффициенты турбулентного переноса являются в общем случае функциями координат и времени, их безразмерные комбинации  $Pr$  и  $Sc$  обычно оказываются величинами, мало изменяющимися, что позволяет во многих практически важных случаях полагать их постоянными. Численные значения  $Pr$  и  $Sc$  в настоящее время точно не установлены. Немногочисленные опытные данные о величинах этих чисел весьма противоречивы, тем не менее можно считать, что в течениях типа пограничного слоя вблизи твердой поверхности  $Pr$  и  $Sc$  близки к единице.

Простейшие модели, описывающие распределение  $\nu$ , построены на гипотезе, предложенной Прандтлем в 20-х годах XX ст., согласно которой коэффициент турбулентной вязкости пропорционален масштабу скорости и масштабу турбулентности [11]:

$$\nu = \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|, \quad (4)$$

где  $u$  — компонента скорости в направлении основного течения,  $\ell$  — характерный масштаб длины (путь смещения). Произведение  $\ell \partial u / \partial z$  можно интерпретировать как характерную скорость турбулентности  $V$ .

Для случаев, когда направление потока воздуха не совпадает с направлением оси  $x$ , формула Прандтля записывается обычно в виде

$$\nu = \ell^2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4a)$$

В формулах (4), (4a) турбулентная вязкость представлена как скаляр и дает качественно правильные результаты, особенно для пристенных течений, поскольку имеются экспериментальные доказательства того, что во внешнем слое турбулентную вязкость следует рассматривать как тензор (т.е. величину, зависящую от направления деформации) для обеспечения лучшего согласования с результатами эксперимента.

Лабораторные эксперименты и натурные наблюдения в пограничном слое показывают, что масштаб турбулентности может быть достаточно хорошо аппроксимирован либо с помощью модели Прандтля

$$\ell = \begin{cases} \chi z & \text{при } z \leq h_b, \\ \chi h_b & \text{при } z > h_b, \end{cases} \quad (5)$$

либо с помощью модели Кармана [12]

$$\ell = \chi_1 \left| \frac{\partial u / \partial z}{\partial^2 u / \partial z^2} \right|, \quad (5a)$$

где  $\chi$ ,  $\chi_1$  — константы,  $h_b$  — высота пограничного слоя.

Предположение об изотропности коэффициента турбулентной вязкости (4), (4a) в моделях турбулентности Прандтля и Кармана является сильным упрощением, обуславливающим ограниченную их пригодность при интерпретации сложных течений.

Полуэмпирическая модель, известная как  $(k - \varepsilon)$ -модель турбулентности, — одна из наиболее используемых моделей пограничного слоя имеет вид

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu}{\xi_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{g}{T} \frac{\nu}{\xi_T} \left( \frac{\partial T}{\partial x_3} + \gamma_a \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu}{\xi_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \frac{\varepsilon}{k} C_1 \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \\ & + \frac{\varepsilon}{k} \left[ C_2 \frac{g}{T} \frac{\nu}{\xi_T} \left( \frac{\partial T}{\partial x_3} + \gamma_a \right) - C_3 \varepsilon \right] \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\xi_\varepsilon$  и  $C_1, C_2, C_3$  — эмпирические постоянные,  $\gamma_a = 0.0098$  — сухоадиабатический градиент температуры, а турбулентная вязкость определяется соотношением

$$\nu = \frac{C_4 k^2}{\varepsilon}. \quad (8)$$

В практическом применении полуэмпирическая модель дает удовлетворительные результаты при одних и тех же значениях эмпирических констант в сложных случаях рециркуляционных трехмерных течений. Это свидетельствует о том, что  $(k - \varepsilon)$ -модель в достаточной степени универсальна и более общая, чем классический подход с использованием локальных зависимостей для турбулентной вязкости. Однако в задачах динамической метеорологии для моделирования циркуляции атмосферы применение  $(k - \varepsilon)$ -модели турбулентности сопряжено с очень сложными проблемами. Объясняется это тем, что при интегрировании дифференциальных уравнений, составляющих основу  $(k - \varepsilon)$ -модели, возникает необходимость формулировать начальные и граничные условия для переменных  $k$  и  $\varepsilon$  наряду с обычными требованиями к переменным усредненного движения (метеорологическим величинам). Это чаще всего далеко не тривиальная задача, особенно когда задаются начальные условия для  $k$  и  $\varepsilon$ , поскольку значения метеорологических величин усредненного движения неточны.

Долгое время необходимость принятия нетривиальных граничных условий на подстилающей поверхности возникала, с одной стороны, ввиду сложности технической реализации условия прилипания на компьютерах с ограниченными ресурсами и с другой — вследствие неприменимости стандартной  $(k - \varepsilon)$ -модели. Очевидно, что скорость диссипации  $\varepsilon$  принимает нулевое значение на стене в то время как энергия пульсаций на стене  $k$  равна нулю. Это означает, что дробная величина  $k^2 / \varepsilon$  на подстилающей поверхности стремится к бесконечности.

Кроме того, модель (6)–(8) содержит большее количество вычисляемых переменных и является более сложной, чем модели (4), (4a), (5), (5a). Естественно, ее применение повышает стоимость решения. Следовательно, выбор модели турбулентности зависит от характера решаемой задачи. Вряд ли целесообразно использовать сложные модели в тех случаях, когда применимы простые модели и не ожидается существенного улучшения результатов.

В работе [1] предложена модель

$$\nu = \chi(\text{rot } \mathbf{V})^3 (\text{rot rot } \mathbf{V})^{-2}, \quad (9)$$

где  $\chi$  — коэффициент пропорциональности, некоторая безразмерная константа. Согласно формуле векторного анализа

$$\text{rot rot } \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}. \quad (10)$$

По определению скалярного произведения двух векторов, скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля

$$(\text{rot } \mathbf{V})^2 = |\text{rot } \mathbf{V}|^2 = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (11)$$

С учетом (10) и (11) формулу (9) можно представить в виде

$$\nu = \chi \frac{|\text{rot } \mathbf{V}|^2}{[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}]^2} \sqrt{(\text{rot } \mathbf{V})^2}, \quad (12)$$

в которой коэффициент турбулентной вязкости принимается пропорциональным модулю вектора завихренности и, следовательно, является функцией  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ .

Если принять, что воздушный поток в рассматриваемой задаче — несжимаемая среда

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

то, как следует из (7), имеем  $\text{rot rot } \mathbf{V} = -\Delta \mathbf{V}$ , и формула (10) приобретает вид

$$\nu = \chi \left( \frac{|\text{rot } \mathbf{V}|}{\Delta \mathbf{V}} \right)^2 \sqrt{|\text{rot } \mathbf{V}|^2}. \quad (13)$$

Отметим, что с современной точки зрения преимущества и недостатки полученных моделей (12) и (13) подлежат обсуждению, поскольку обмен количеством движения между соседними слоями осуществляется вихрями различных геометрических масштабов, в том числе и тех, которые соизмеримы с размером потока.

В стратифицированных пограничных слоях влияние массовых сил, возникающих вследствие сил плавучести или кривизны линий тока, на распределение масштаба турбулентности можно рассчитать по формуле [13]:

$$\ell = \begin{cases} \ell_0 (1 - \zeta_1 Ri) & \text{при } Ri > 0, \\ \ell_0 (1 - \zeta_2 Ri)^{-1/4} & \text{при } Ri < 0, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\ell_0$  — масштаб турбулентности по соотношениям (12) и (13) при  $Ri = 0$ ;  $\zeta_1 \approx 7$ ,  $\zeta_2 \approx 14$  — эмпирические константы;  $Ri$  — число Ричардсона, определяемое выражением  $Ri = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho / \partial x_3}{(\partial V_g / \partial x_3)^2}$ .

#### АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

В общем случае для составляющих  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вектора скорости  $\mathbf{V}$  не имеется аналитических выражений, а заданы лишь их дискретные значения  $u_{ijk} = u(x_i, y_j, z_k)$ ,  $v_{ijk} = v(x_i, y_j, z_k)$ ,  $w_{ijk} = w(x_i, y_j, z_k)$  в узлах  $x_i$  ( $i = \overline{1, I}$ ),  $y_j$  ( $j = \overline{1, J}$ ),  $z_k$  ( $k = \overline{1, K}$ ) некоторой сетки  $\bar{w}_h$  с шагами  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\delta_j = y_j - y_{j-1}$ ,  $s_k = z_k - z_{k-1}$ . Следовательно, для вычисления значений производных первого и второго порядков, содержащихся в выражениях  $\text{rot } \mathbf{V}$  и  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}$  и входящих в формулы (12) и (13), необходимо использовать методы аппроксимации производных их разностными выражениями. В [1] предло-

жен эффективный метод повышенного порядка точности для аппроксимации частных производных первого и второго порядков, являющихся составной частью (12) и (13). Не повторяя вывод, формулы аппроксимации частных производных первого и второго порядков представим в окончательном виде.

Пусть  $\eta$  — одна из осей системы координат  $(x, y, z)$  и в узлах  $a < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < b$ , образующих (для общности неравномерную) сетку  $\bar{w}_h$  с шагами  $h_i = \eta_i - \eta_{i-1}$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ), заданы дискретные значения  $f(\eta_i) = f_i$  функции  $f(\eta) = \mathfrak{R}^n(r)$ .

По дискретным значениям функции  $f_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , определим приближенные значения  $\psi_i$  частной производной первого порядка  $(\partial f / \partial \eta)_i$  и  $\xi_i$  частной производной второго порядка  $(\partial^2 f / \partial \eta^2)_i$  во всех узловых точках  $i = \overline{1, N}$  по следующим формулам:

$$\psi_{i+1} + 2 \left( 1 + \frac{h_i}{h_{i-1}} \right) \psi_i + \frac{h_i}{h_{i-1}} \psi_{i-1} = \frac{3}{h_i} \left\{ f_{i+1} - \left[ 1 - \left( \frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^2 \right] f_i - \left( \frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^2 f_{i-1} \right\} - \frac{h_i h_{i-1}^2}{24} \left[ 1 - \left( \frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^2 \right] \frac{\partial^4 f}{\partial \eta^4}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_{i-1}}{h_i} \left[ \frac{h_{i-1}}{h_i} \left( 1 - \frac{h_{i-1}}{h_i} \right) + 1 \right] \xi_{i+1} + \left( 1 + \frac{h_{i-1}}{h_i} \right) \left[ \frac{h_{i-1}}{h_i} \left( 3 + \frac{h_{i-1}}{h_i} \right) + 1 \right] \xi_i + \\ & + \left[ \frac{h_{i-1}}{h_i} \left( 1 + \frac{h_{i-1}}{h_i} \right) - 1 \right] \xi_{i-1} = \frac{12}{h_i h_{i-1}} \left[ \frac{h_{i-1}}{h_i} f_{i+1} - \left( 1 + \frac{h_{i-1}}{h_i} \right) f_i + f_{i-1} \right] + \\ & + \frac{h_i^2 h_{i-1}}{360} \left[ 1 - \left( \frac{h_{i-1}}{h_i} \right)^2 \right] \left\{ 5 \frac{h_{i-1}}{h_i} + 2 \left[ 1 - \left( \frac{h_{i-1}}{h_i} \right)^2 \right] \right\} \frac{\partial^5 f}{\partial \eta^5}. \quad (16) \end{aligned}$$

Очевидно, что соотношения (15) и (16) имеют третий порядок аппроксимации, когда  $h_i \neq h_{i-1}$ , и четвертый порядок при  $h_i = h_{i-1}$ .

Рассматриваемые производные  $\psi_i = (\partial f / \partial \eta)_i$ ,  $\xi_i = (\partial^2 f / \partial \eta^2)_i$  входят в (12) и (13) неявно. Их можно вычислить по заданным значениям  $f_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , решением систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки при граничных условиях

$$\begin{aligned} & \frac{h_1}{6} (\xi_2 - \xi_1) - (\psi_2 - \psi_1) + \frac{2}{h_1} (f_2 - f_1) = 0, \\ & \frac{h_{N-1}}{6} (\xi_N - \xi_{N-1}) - (\psi_N - \psi_{N-1}) + \frac{2}{h_{N-1}} (f_N - f_{N-1}) = 0. \end{aligned}$$

В этом состоит основное преимущество предложенного метода аппроксимации производных, входящих в (12) и (13), перед стандартной трехточечной аппроксимацией. Поскольку решение систем алгебраических уравнений (15) и (16) во всех точках  $i$  зависит от значений в других точках, оно зависит от  $f_i$  глобально, а не локально, как в схемах трехточечных разностных аппроксимаций производных первого и второго порядков.

Оценка эффективности аппроксимаций производных первого (15) и второго (16) порядков проведена на решении тестовой задачи, для которой существуют точные решения. На рис. 1 показаны результаты качественной оценки методов аппроксимации, а в табл. 1 — количественной. В четвертой и шестой колонках табл. 1



**Таблица 1.** Результаты численного дифференцирования  $\partial f / \partial \eta$  и  $\partial^2 f / \partial \eta^2$  функции  $f(\eta) = \cos^2(\eta)$

$n$	$\eta$	$f(\eta) = \cos^2(\eta)$	$\psi_i = -\sin(2\eta_i)$	$(\partial f / \partial \eta)_i$	$\xi_i = -2\cos(2\eta_i)$	$(\partial^2 f / \partial \eta^2)_i$
1	-0.1571E+01	0.2689E-12	0.1037E-05	-0.5510E-02	0.2000E+01	0.2101E+01
2	-0.1334E+01	0.5522E-01	0.4568E+00	0.4581E+00	0.1779E+01	0.1771E+01
3	-0.1107E+01	0.2002E+00	0.8003E+00	0.7997E+00	0.1199E+01	0.1211E+01
4	-0.8996E+00	3868E+00	0.9740E+00	0.9740E+00	0.4528E+00	0.4696E+00
5	-0.7173E+00	0.5679E+00	0.9907E+00	0.9907E+00	-0.2715E+00	-0.2526E+00
6	-0.5627E+00	0.7154E+00	0.9024E+00	0.9024E+00	-0.8618E+00	-0.8451E+00
7	-0.4353E+00	0.8222E+00	0.7647E+00	0.7647E+00	-0.1289E+01	-0.1276E+01
8	-0.3329E+00	0.8932E+00	0.6177E+00	0.6177E+00	-0.1573E+01	-0.1564E+01
9	-0.2523E+00	0.9377E+00	0.4835E+00	0.4835E+00	-0.1751E+01	-0.1745E+01
10	-0.1898E+00	0.9644E+00	0.3705E+00	0.3706E+00	-0.1858E+01	-0.1854E+01
11	-0.1419E+00	0.9800E+00	0.2800E+00	0.2800E+00	-0.1920E+01	-0.1918E+01
12	-0.1056E+00	0.9889E+00	0.2096E+00	0.2096E+00	-0.1956E+01	-0.1954E+01
13	-0.7820E-01	0.9939E+00	0.1558E+00	0.1558E+00	-0.1976E+01	-0.1975E+01
14	-0.5768E-01	0.9967E+00	0.1151E+00	0.1151E+00	-0.1987E+01	-0.1986E+01
15	-0.4236E-01	0.9982E+00	0.8462E-01	0.8462E-01	-0.1993E+01	-0.1993E+01
16	-0.3096E-01	0.9990E+00	0.6189E-01	0.6189E-01	-0.1996E+01	-0.1996E+01
17	-0.2250E-01	0.9995E+00	0.4498E-01	0.4498E-01	-0.1998E+01	-0.1998E+01
18	-0.1622E-01	0.9997E+00	0.3244E-01	0.3244E-01	-0.1999E+01	-0.1999E+01
19	-0.1158E-01	0.9999E+00	0.2315E-01	0.2315E-01	-0.1999E+01	-0.1999E+01
20	-0.8141E-02	0.9999E+00	0.1628E-01	0.1628E-01	-0.2000E+01	-0.2000E+01
21	-0.5601E-02	0.1000E+01	0.1120E-01	0.1120E-01	-0.2000E+01	-0.2000E+01
22	-0.3724E-02	0.1000E+01	0.7447E-02	0.7447E-02	-0.2000E+01	-0.2000E+01
23	-0.2337E-02	0.1000E+01	0.4674E-02	0.4674E-02	-0.2000E+01	-0.2000E+01
24	-0.1314E-02	0.1000E+01	0.2627E-02	0.2627E-02	-0.2000E+01	-0.2000E+01
25	-0.5578E-03	0.1000E+01	0.1116E-02	0.1116E-02	-0.2000E+01	-0.2000E+01
26	0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000+00	-0.3150E-10	-0.2000E+01	-0.2000E+01
27	0.5578E-03	0.1000E+01	-0.1116E-02	-0.1116E-02	-0.2000E+01	-0.2000E+01
28	0.1314E-02	0.1000E+01	-0.2627E-02	-0.2627E-02	-0.2000E+01	-0.2000E+01
29	0.2337E-02	0.1000E+01	-0.4674E-02	-0.4674E-02	-0.2000E+01	-0.2000E+01
30	0.3724E-02	0.1000E+01	-0.7447E-02	-0.7447E-02	-0.2000E+01	-0.2000E+01
31	0.5601E-02	0.1000E+01	-0.1120E-01	-0.1120E-01	-0.2000E+01	-0.2000E+01
32	0.8141E-02	0.9999E+00	-0.1628E-01	-0.1628E-01	-0.2000E+01	-0.2000E+01
33	0.1158E-01	0.9999E+00	-0.2315E-01	-0.2315E-01	-0.1999E+01	-0.1999E+01
34	0.1622E-01	0.9997E+00	-0.3244E-01	-0.3244E-01	-0.1999E+01	-0.1999E+01
35	0.2250E-01	0.9995E+00	-0.4498E-01	-0.4498E-01	-0.1998E+01	-0.1998E+01
36	0.3096E-01	0.9990E+00	-0.6189E-01	-0.6189E-01	-0.1996E+01	-0.1996E+01
37	0.4236E-01	0.9982E+00	-0.8462E-01	-0.8462E-01	-0.1993E+01	-0.1993E+01
38	0.5768E-01	0.9967E+00	-0.1151E+00	-0.1151E+00	-0.1987E+01	-0.1986E+01
39	0.7820E-01	0.9939E+00	-0.1558E+00	-0.1558E+00	-0.1976E+01	-0.1975E+01
40	0.1056E+00	0.9889E+00	-0.2096E+00	-0.2096E+00	-0.1956E+01	-0.1954E+01
41	0.1419E+00	0.9800E+00	-0.2800E+00	-0.2800E+00	-0.1920E+01	-0.1918E+01
42	0.1898E+00	0.9644E+00	-0.3705E+00	-0.3706E+00	-0.1858E+01	-0.1854E+01
43	0.2523E+00	0.9377E+00	-0.4835E+00	-0.4835E+00	-0.1751E+01	-0.1745E+01
44	0.3329E+00	0.8932E+00	-0.6177E+00	-0.6177E+00	-0.1573E+01	-0.1564E+01
45	0.4353E+00	0.8222E+00	-0.7647E+00	-0.7647E+00	-0.1289E+01	-0.1276E+01
46	0.5627E+00	0.7154E+00	-0.9024E+00	-0.9024E+00	-0.8618E+00	-0.8451E+00
47	0.7173E+00	0.5679E+00	-0.9907E+00	-0.9907E+00	-0.2715E+00	-0.2526E+00
48	0.8996E+00	0.3868E+00	-0.9740E+00	-0.9740E+00	0.4528E+00	0.4696E+00
49	0.1107E+01	0.2002E+00	-0.8003E+00	-0.7997E+00	0.1199E+01	0.1211E+01
50	0.1334E+01	0.5522E-01	-0.4568E+00	-0.4581E+00	0.1779E+01	0.1771E+01
51	0.1571E+01	0.2689E-12	-0.1037E-05	0.5510E-02	0.2000E+01	0.2101E+01

приведены результаты аналитического дифференцирования  $\psi_i = -\sin(2\eta_i)$ ,  $\xi_i = -\cos(2\eta_i)$ , а в пятой и седьмой колонках — результаты аппроксимации производных первого и второго порядков функции  $f(\eta) = \cos^2(\eta)$  с помощью формул (15) и (16) на отрезке  $-\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$  с шагом  $0.02\pi$ .

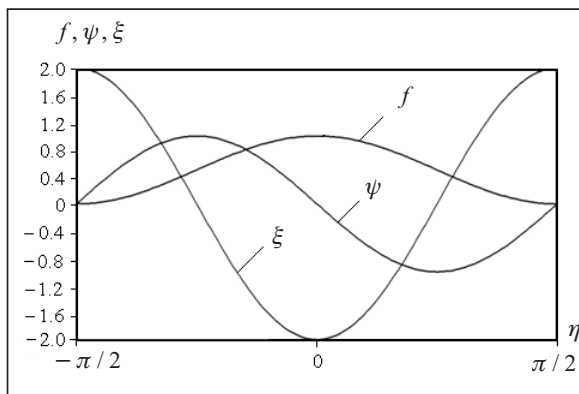


Рис. 1. Результаты аналитического и численного дифференцирования  $\partial f / \partial \eta$  и  $\partial^2 f / \partial \eta^2$  функции  $f(\eta) = \cos^2(\eta)$

#### РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Представим систему уравнений (1)–(3) в виде векторного трехмерного уравнения

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_k} = F + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_k \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_k} \right) \quad (17)$$

и сформулируем для него начально-краевую задачу конвективной диффузии

$$\mathfrak{R}(0, x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{R}_0(x_1, x_2, x_3) \text{ при } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{J},$$

$$\mathfrak{R}(t, x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{R}_b \text{ при } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{B},$$

где  $\mathcal{B} = \partial \mathcal{J}$  — граница области решения  $\mathcal{J}$ ;  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(t, x_1, x_2, x_3)$  — неизвестная функция;  $F = F(t, x_1, x_2, x_3)$  — источник или сток величины  $\mathfrak{R}$ ;  $v_k = v_k(t, x_1, x_2, x_3)$  — коэффициент конвекции  $k$ -го координатного направления;  $\nu_k = \nu_k(t, x_1, x_2, x_3) \geq 0$  — коэффициент диффузии  $k$ -го координатного направления.

Для определенности будем полагать, что  $v_k > 0$  для  $k = 1, 2, 3$ .

Проведем пространственно-временную дискретизацию в уравнении (17) согласно одномерной схеме [1, 14, 15]. В результате получим следующее матрично-векторное уравнение:

$$\frac{\mathfrak{R}^{n+1} - \mathfrak{R}^n}{\tau} + \sum_{k=1}^3 (B_k \mathfrak{R}^{n+1} - A_k \mathfrak{R}^n) = F^n, \quad (18)$$

где  $A_k, B_k$  — матричные операторы явного и неявного слоев  $k$ -го координатного направления соответственно;  $\tau$  — шаг по времени;  $n$  — индекс, указывающий на принадлежность функции  $\mathfrak{R}$  времени  $t_n$ ;  $n+1$  — индекс, указывающий на принадлежность функции  $\mathfrak{R}$  времени  $t_n + \tau$ .

Точное решение уравнения (18) имеет вид

$$\mathfrak{R}^{n+1} = \left( I + \tau \sum_{k=1}^3 B_k \right)^{-1} \left[ \left( I + \tau \sum_{k=1}^3 A_k \right) \mathfrak{R}^n + \tau F^n \right]. \quad (19)$$

Для выражения (19) используем приближения

$$\left( I + \tau \sum_{k=1}^3 B_k \right)^{-1} = I - \tau \sum_{k=1}^3 B_k + O[\tau^2],$$

$$\left( I + \tau \sum_{k=1}^3 B_k \right)^{-1} \left( I + \tau \sum_{k=1}^3 A_k \right) = I + \tau \sum_{k=1}^3 A_k - \tau \sum_{k=1}^3 B_k + O[\tau^2].$$

В результате получим, что с точностью до членов  $O[\tau]$  решением уравнения (18) будет

$$\mathfrak{R}^{n+1} = \left( I + \tau \sum_{k=1}^3 A_k - \tau \sum_{k=1}^3 B_k \right) \mathfrak{R}^n + \tau F^n. \quad (20)$$

Предлагаемое аддитивное расщепление уравнения (18) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1^{n+1} &= (I + \tau B_1)^{-1} [(I + \tau A_1) \mathfrak{R}^n + \tau F_1^n], \\ \mathfrak{R}_2^{n+1} &= (I + \tau B_2)^{-1} [(I + \tau A_2) \mathfrak{R}^n + \tau F_2^n], \\ \mathfrak{R}_3^{n+1} &= (I + \tau B_3)^{-1} [(I + \tau A_3) \mathfrak{R}^n + \tau F_3^n], \\ \mathfrak{R}^{n+1} &= a_1 \mathfrak{R}_1^{n+1} + a_2 \mathfrak{R}_2^{n+1} + a_3 \mathfrak{R}_3^{n+1} + b_1 F^n + b_2 \mathfrak{R}^n, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  — неизвестные коэффициенты,  $F^n = F_1^n + F_2^n + F_3^n$ .

Определим коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  так, чтобы обеспечить точность решения уравнения (18) порядка  $\tau$ . Подставляя приближения

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1^{n+1} &= (I + \tau A_1 - \tau B_1) \mathfrak{R}^n + \tau F_1^n + O[\tau^2], \\ \mathfrak{R}_2^{n+1} &= (I + \tau A_2 - \tau B_2) \mathfrak{R}^n + \tau F_2^n + O[\tau^2], \\ \mathfrak{R}_3^{n+1} &= (I + \tau A_3 - \tau B_3) \mathfrak{R}^n + \tau F_3^n + O[\tau^2] \end{aligned}$$

в выражение (21) для  $\mathfrak{R}^{n+1}$  и сравнивая с (20), получаем, что  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  и  $b_1 = 0, b_2 = -2$ . Следовательно, предлагаемая аддитивная схема расщепления по координатным направлениям для (18) будет иметь следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1^{n+1} &= (I + \tau B_1)^{-1} [(I + \tau A_1) \mathfrak{R}^n + \tau F_1^n], \\ \mathfrak{R}_2^{n+1} &= (I + \tau B_2)^{-1} [(I + \tau A_2) \mathfrak{R}^n + \tau F_2^n], \\ \mathfrak{R}_3^{n+1} &= (I + \tau B_3)^{-1} [(I + \tau A_3) \mathfrak{R}^n + \tau F_3^n], \\ \mathfrak{R}^{n+1} &= \mathfrak{R}_1^{n+1} + \mathfrak{R}_2^{n+1} + \mathfrak{R}_3^{n+1} - 2\mathfrak{R}^n. \end{aligned} \quad (22)$$

Алгоритм расщепления (22) позволяет сделать переход на следующий временной слой в два этапа. Первый этап — решение трех однотипных задач по каждому координатному направлению. Причем эти решения можно вычислять параллельно в силу их независимости по начальным данным. К тому же краевые условия не нужно адаптировать для расчета по какому-либо координатному направлению. Второй этап — это суммирование полученных результатов. Таким образом, связанными по начальным данным являются только эти два этапа вне зависимости от размерности задачи.

Воспользуемся нестандартной абсолютно устойчивой конечно-разностной схемой порядка  $O[\tau, h]$  решения подзадач [1, 14, 15], полученных расщеплением (22). Рассмотрим одномерное уравнение адвекции–диффузии

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} \right) + F, \quad \nu > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \quad (23)$$

с начальным условием

$$\mathfrak{R}(x, 0) = \eta(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (24)$$

и граничными условиями Дирихле

$$\mathfrak{R}(0, t) = \alpha(t), \quad \mathfrak{R}(l, t) = \beta(t), \quad t > 0, \quad (25)$$

где  $v(x, t)$ ,  $\nu(x, t)$ ,  $\eta(x)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  — известные функции, а функция  $\mathfrak{R}(x, t)$  неизвестная.

Предположим, что параметры задачи  $v(x, t)$ ,  $\nu(x, t)$ ,  $\eta(x)$ ,  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  достаточно гладки, а начальные и граничные условия согласованы так, что задача (23)–(25) имеет единственное решение  $\mathfrak{R}(x, t)$ .

Уравнение параболического типа (23) включает члены, описывающие те же физические процессы, что и члены, входящие в систему уравнений гидромеханики (1)–(3), а именно:

— нестационарный член  $\partial\mathfrak{R}/\partial t$  описывает скорость изменения величины  $\mathfrak{R}$  во времени;

— конвективный член  $v\partial\mathfrak{R}/\partial x$  описывает конвекцию величины  $\mathfrak{R}$ , обусловленную движением окружающей среды со скоростью  $v$ ;

— диффузионный (или диссипативный) член  $\partial(v\partial\mathfrak{R}/\partial x)/\partial x$  описывает физическую диффузию величины  $\mathfrak{R}$  в окружающей среде вдоль оси  $x$ .

Разделим пространственный интервал  $[0, l]$  задачи на  $J$  равных частей с точками деления  $x_0 < x_1 < \dots < x_{J-1} < x_J$  и обозначим  $h_j$  длину  $j$ -го отрезка. Кроме того, разделим  $[0, T]$  на  $N$  равных частей точками  $t^n = nTN^{-1}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , с шагом по времени  $\tau$ . Определим сетку  $\Omega = \{(x_j, t^n); j = 0, 1, \dots, J; n = 0, 1, \dots, N\}$  и обозначим  $\mathfrak{R}_j^n$  аппроксимацию  $\mathfrak{R}(x_j, t^n)$ .

В [1, 14, 15] предложена разностная схема для одномерной задачи конвективной диффузии (23)–(25) в следующем виде:

— для  $v > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathfrak{R}_j^{n+1} - \mathfrak{R}_j^n}{\tau} + \frac{v_j^n}{h_{j-1} + h_j} \left[ h_{j-1} \frac{\mathfrak{R}_{j+1}^n - \mathfrak{R}_j^n}{h_j} + h_j \frac{\mathfrak{R}_j^{n+1} - \mathfrak{R}_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right] - \\ & - \frac{1}{h_{j-1} + h_j} \left[ (v_{j+1} + v_j) \frac{\mathfrak{R}_{j+1}^n - \mathfrak{R}_j^n}{h_j} - (v_j + v_{j-1}) \frac{\mathfrak{R}_j^{n+1} - \mathfrak{R}_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right] - F_j^n = 0, \quad (26) \end{aligned}$$

$$j = 0, 1, \dots, J, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \mathfrak{R}_j^0 = \eta(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, J,$$

$$\mathfrak{R}_0^n = \alpha(t^n), \quad \mathfrak{R}_J^n = \beta(t^n), \quad n = 0, 1, \dots, N;$$

— для  $v < 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathfrak{R}_j^{n+1} - \mathfrak{R}_j^n}{\tau} + \frac{v_j^n}{h_{j-1} + h_j} \left[ h_{j-1} \frac{\mathfrak{R}_{j+1}^{n+1} - \mathfrak{R}_j^{n+1}}{h_j} + h_j \frac{\mathfrak{R}_j^n - \mathfrak{R}_{j-1}^n}{h_{j-1}} \right] - \\ & - \frac{1}{h_{j-1} + h_j} \left[ (v_{j+1} + v_j) \frac{\mathfrak{R}_{j+1}^{n+1} - \mathfrak{R}_j^{n+1}}{h_j} - (v_j + v_{j-1}) \frac{\mathfrak{R}_j^n - \mathfrak{R}_{j-1}^n}{h_{j-1}} \right] - F_j^n = 0, \quad (26a) \end{aligned}$$

$$j = J-1, J-2, \dots, 2, 1, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$\mathfrak{R}_j^0 = \eta(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad \mathfrak{R}_0^n = \alpha(t^n), \quad \mathfrak{R}_J^n = \beta(t^n), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Как следует из (26) и (26а), в обеих схемах на  $(n+1)$ -м временном слое разности направлены в ту сторону, откуда осуществляется конвекция к точке  $x_j$ .

Обычно подобные разности называются разностями, направленными против потока (upstream differences). Таким образом, в схеме (26), (26a) односторонняя разность на  $(n+1)$ -м временном слое всегда выбирается против потока, т.е. в направлении вверх по течению от точки, в которой вычисляется  $\partial \mathcal{R} / \partial t$ . Вследствие этого возмущение не может распространяться в направлении, противоположном физической конвекции. Следовательно, никакие паразитные волны не должны искажать численного решения.

#### ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим задачу определения установившегося турбулентного течения в плоском прямолинейном канале длины  $\ell$  с прямоугольным поперечным сечением, высота которого  $2h$ , а ширина  $2s$ . Начало координат поместим на входе канала на оси симметрии поперечного сечения (рис. 2).

Из простых рассуждений можно сделать некоторые существенные выводы о физических свойствах воздушного потока в прямоугольном канале, не проводя интегрирования уравнений (1)–(3). Примем, что на входе в канал вследствие малой вязкости картина линий тока и распределение скоростей имеют такой же вид, как и при потенциальном течении жидкости без трения. Если совместить ось  $x$  с направлением скорости  $V$  набегающего потока, ось  $y$  направить поперек канала (перпендикулярно к стенкам) в горизонтальной плоскости, а ось  $z$  — перпендикулярно горизонтальной плоскости, то продольная скорость  $u$  будет стремиться к значению скорости  $V(x, t)$  входного потока воздуха, а поперечная  $v$  и вертикальная  $w$  скорости будут стремиться к нулю. Поэтому на горизонтальных поверхностях  $-h \leq z \leq h$  система уравнений (2) вырождается в уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -e^{-\mathcal{R}} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

При стационарном течении  $\partial V / \partial t = 0$  давление  $p$  становится функцией только  $x$ :

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = -e^{-\mathcal{R}} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Пусть внутри канала движение воздуха турбулентное. Тогда на ведущий поток налагается неправильное неупорядоченное вихревое (пульсационное) движение, в результате чего возникает перемешивание отдельных масс воздушного потока. Это перемешивание вызывает интенсификацию обмена в воздушном потоке не только импульсами, но и теплом, и примесями, и следовательно, обуславливает необходимость учета закономерностей развитого турбулентного движения в гидродинамических моделях.

Основной особенностью турбулентности «сдвиговых» течений, которая учитывается моделью (12) и (13), является неоднородность турбулентных движений по осям координат. Поэтому рассматриваемая задача является хорошим тестом для проверки возможностей модели (13) для корректного расчета трехмерного турбулентного течения несжимаемой жидкости.

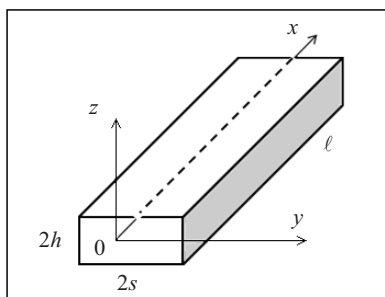


Рис. 2. Прямолинейный канал с прямоугольным поперечным сечением

На данном этапе примем некоторые допущения, предполагая возможность их исключения в дальнейшем: жидкость несжимаемая; диссипация энергии пренебрежимо мала; отсутствие объемных сил, внутренних тепловыделений  $T(x, y, z) = \text{const}$ , посторонних примесей и фазовых преобразований влаги в потоке,

а также поперечных к направлению движения потока компонент давления  $\partial p / \partial y = \partial p / \partial z = 0$ . Эти допущения приводят к существенному упрощению системы уравнений (1)–(3), в результате чего она принимает следующий вид:

— уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} = 0; \quad (27)$$

— уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = & -e^{-\mathcal{R}} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right);$$

$$\mathcal{R} = \ln(\rho), \quad p = R\rho T. \quad (29)$$

Пусть в сечении  $x = 0$  при давлении  $p_0$  распределение скоростей по поперечному сечению имеет равномерный вид такой же, как при потенциальном течении жидкости без трения, т.е.  $\mathbf{V}(t, x, y, z) = \text{const} = V_0$ .

Граничным условием данной трехмерной задачи является прилипание жидкости к стенкам канала

$$\mathbf{V}(x, y, z) = 0 \quad \text{при} \quad (y, z) \in \partial \mathcal{J}, \quad (30)$$

где  $\partial \mathcal{J}$  — граница боковой поверхности области  $\mathcal{J}_r = [\mathbf{r} \in 0, \mathfrak{R}]$ .

Численное решение поставленной задачи (27)–(29) осуществлялось на основе разностной схемы (26), (26а), в которой шаг по времени  $\tau$  — итерационный параметр.

Численный эксперимент показал, что дальше от входа в начальном участке канала профиль скоростей под воздействием сил трения постепенно вытягивается. При этом развитие турбулентного пограничного слоя происходит в основном путем увеличения его толщины при незначительном изменении градиентов скорости (рис. 3).

На некотором расстоянии от входа профиль принимает свою окончательную в дальнейшем не изменяемую форму (рис. 4). При турбулентном течении длина начального участка составляет, как подтверждают измерения в [16], от 25 до 40 гидравлических диаметров  $d_h = 4F/P$ , где  $F$  — площадь поперечного сечения канала,  $P$  — смоченный периметр поперечного сечения.

Сопоставление расчетного профиля с опытными данными [17] при значении  $k = 0.36$  приведено на рис. 5.

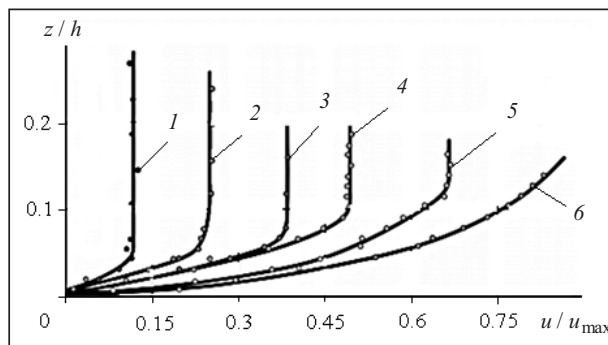


Рис. 3. Профили скорости вблизи стенки в начальном участке канала: кривая 1 для  $x/d_h = 0$ ; 2 —  $x/d_h = 20$ ; 3 —  $x/d_h = 30$ ; 4 —  $x/d_h = 50$ ; 5 —  $x/d_h = 100$ ; 6 —  $x/d_h > 100$

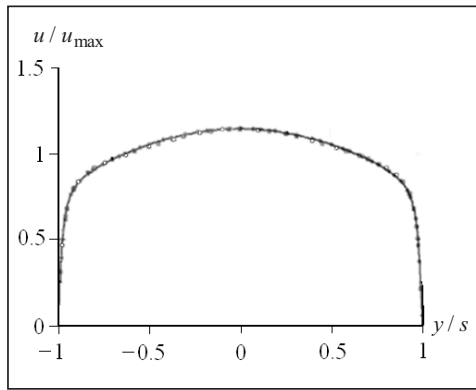


Рис. 4. Установившееся распределение продольной скорости в поперечном сечении канала

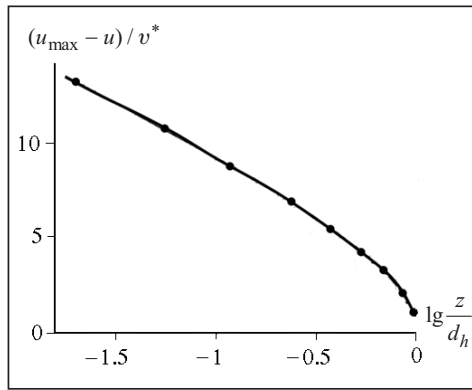


Рис. 5. Профиль в форме закона избыточной скорости, • — экспериментальные данные из [17]

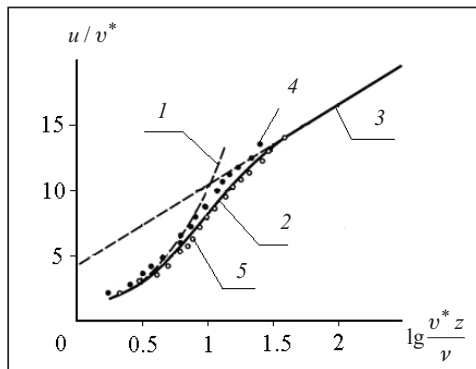


Рис. 6. Сопоставление профиля скорости в вязком подслое с данными измерений: кривая 1 — ламинарное течение; 2 — переход ламинарной формы течения в турбулентную; 3 — расчетный профиль; 4 — данные из [19], 5 — данные из [18]

Численное решение задачи (27)–(30), в которой замыкание осуществлялось с помощью модели турбулентности (13), позволило получить осредненный профиль скорости в вязком подслое, сопоставляемый с данными из [18] и [19] (рис. 6).

За начальным участком поле скорости поступательного вдоль  $Ox$  течения становится двумерным  $V(y, z)$ , не изменяющимся вдоль  $Ox$  с компонентами вращения  $\text{rot}_x \mathbf{V} = 0$ ,  $\text{rot}_y \mathbf{V} = \partial u / \partial z$ ,  $\text{rot}_z \mathbf{V} = -\partial u / \partial y$ . Исследуем роль угловых точек в плоскости сечения  $\mathcal{T}_r = [-s \leq y \leq +s, -h \leq z \leq +h]$  на распределение абсолютной величины вектора завихренности

$$|\text{rot } \mathbf{V}| = \sqrt{(\text{rot } \mathbf{V})^2} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

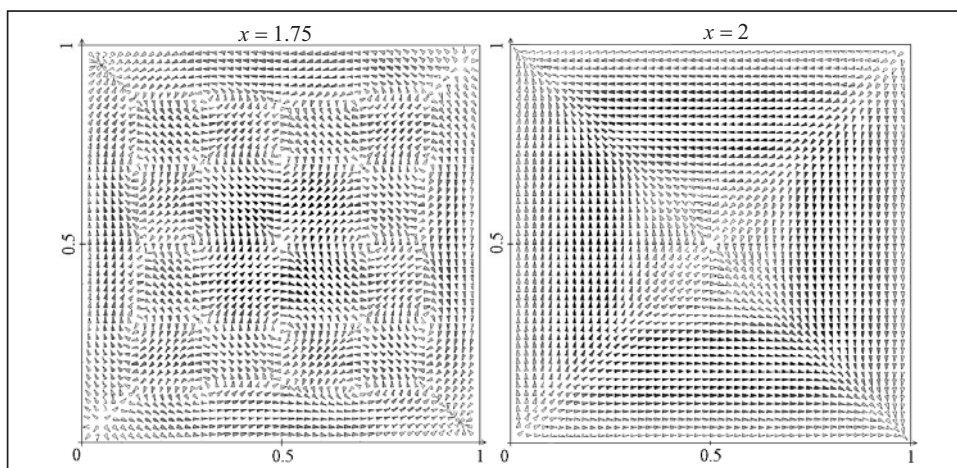


Рис. 7. Векторные поля поперечных компонент скорости в канале квадратного сечения

Экспериментальные исследования турбулентных течений в прямоугольном канале [20–22] свидетельствуют о том, что угловые точки вызывают слабые вторичные течения. В работах [23–26] особое внимание обращено на вторичные движения жидкости в поперечном направлении. Обнаружено, что изолинии продольной скорости турбулентного потока в поперечном сечении прямоугольного канала отличались от овальной формы, были деформированными и вытянутыми к угловым точкам. Наблюдалось слабое движение жидкости по биссектрисам к стенке (рис. 7).

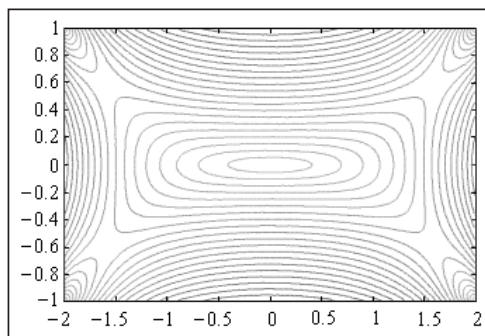


Рис. 8. Изолинии модуля завихренности в прямоугольной трубе с гладкими стенками в поперечном сечении канала.

Результаты численного решения задачи (27)–(30) с помощью разностной схемы (26), (26а), приведенные на рис. 8, показывают, что, как и в работе [27], изолинии абсолютной величины вектора завихренности овальной формы раздвигаются возмущениями, исходящими из угловых точек. Изменение конфигурации поля изолиний происходит на удалении приблизительно 0.40 от вертикальных стенок.

#### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТМОСФЕРЫ И ГОРОДСКОГО ЛАНДШАФТА

Ускорение процессов урбанизации и, как следствие, интенсивный рост городов и городских агломераций обуславливает изменения во взаимодействии атмосферы и земной поверхности. Естественно-природный ландшафт заменяется антропогенным и городским ландшафтами, которые весьма заметно влияют на изменение теплового и влажного баланса на подстилающей поверхности. Они характеризуются сложным взаимосвязанным сочетанием природных и искусственных компонентов, значительно изменяя альбедо и шероховатость подстилающей поверхности. Это жилые, общественные и производственные здания, хозяйственные, инженерные, транспортные, энергетические сооружения, все элементы благоустройства на улицах и площадях, во дворах, садах, парках и т.д.

Главной особенностью городской застройки является удлиненность улиц с характерными композиционными объединениями групп зданий различной этажности и протяженности, являющихся, в свою очередь, фрагментами более сложных компоновок застройки. Наличие промежутков между зданиями, парадных подъездов, балконов, зеленых насаждений и автомобильного транспорта обуславливает внутри улицы возникновение вихревых, струйных и других более сложных потоков воздуха [28].

Изучать взаимодействие атмосферы и городского ландшафта как сверхсложной системы, состоящей из многочисленных компонентов, можно в том случае, если сложную систему разбить на ряд более простых структур и выделить наиболее универсальные их свойства.

#### ЦИРКУЛЯЦИЯ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА ВНУТРИ ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ

Используем систему уравнений (1)–(3) для изучения влияния городской застройки на формирование атмосферных процессов на примере фрагмента жилого квартала. В области решения  $\mathcal{T}_r = [r \in 0, \mathfrak{R}]$  мезомасштабной задачи примем условие гидростатической устойчивости и горизонтальной однородности метеорологических полей в свободной атмосфере, т.е. выше пограничного слоя. Основными факторами, влияющими на взаимодействие атмосферы и подстилающей поверхности, являются следующие:



- турбулентный обмен импульсом и теплом;
- вынужденные конвективные движения, генерируемые горизонтальным движением воздуха над неоднородным рельефом подстилающей поверхности;
- свободные конвективные движения, обусловленные подъемной силой Архимеда при термической неоднородности подстилающей поверхности.

Исследования на моделях уличных каньонов позволяют установить закономерности трансформации воздушного потока по направлению и скорости, выявить влияние плотности застройки на формирование режима проветривания городских улиц различной ширины. Компоновка размещений зданий имеет значение для возможности регулирования аэрационного режима улиц в целях предупреждения их загазованности, защиты территории жилой застройки от холодных сильных ветров (более 5 м/с) или сохранения исходных скоростей ветра при недостаточном естественном проветривании (до 3 м/с и штиле).

Как показывает численный эксперимент, картина течения воздушных масс вдоль каньона сильно зависит от его структуры, которая находится вниз по потоку, наличия зеленных насаждений и транспорта. Если каньон образует одна пара параллельных длинных зданий и не имеется автомобильного транспорта и зеленных насаждений («идеальный» каньон), то профиль свободного набегающего потока, подчиняясь классическим законам гидродинамики, на некотором расстоянии от входа принимает свою окончательную, в дальнейшем не изменяемую форму турбулентного профиля.

Если уличный каньон образует совокупность пар параллельных зданий с промежутками между ними, то вниз по потоку образуются рециркуляционные области внутри промежутков, образованных торцами зданий. Характер течения воздушных масс в промежутках между зданиями имеет более сложную структуру, чем в «идеальном» каньоне. Численные эксперименты с каньонами, имеющими промежутки между зданиями, показали, что режимы течения (рециркуляции и сквозные потоки поперек оси каньона) сильно зависят от направления фонового ветра на уровне крыш. В промежутках между зданиями, где образуются сквозные потоки поперек каньона, структура потока сложнее, а интенсивность турбулентности выше, чем непосредственно в каньоне. Численные результаты показывают, что даже малые изменения направления фонового ветра могут вызвать значительные изменения в направлении среднего поля течения воздушных масс и интенсивности турбулентности внутри каньона.

Существенное влияние на поток в каньоне оказывают условия стратификации атмосферы. В настоящей работе исследовались характерные особенности течения воздушных масс для устойчивой ( $Ri > 0$ ) и неустойчивой ( $Ri < 0$ ) атмосферы для идеализированной модели городской улицы, образованной последовательностью пар параллельных параллелепипедов одинакового размера. Параметр  $Ri$  определялся из соотношения:

$$Ri = \left( \frac{gh}{V_h^2} \right) \frac{T_h - T_b}{T_\infty},$$

где  $h$  — высота уличного каньона;  $g$  — ускорение свободного падения;  $T_h, V_h$  — соответственно температура и скорость на высоте крыши каньона;  $T_b$  — температура на дне каньона;  $T_\infty$  — температура окружающего воздуха.

Интенсивность рециркуляций в модельных уличных каньонах слабее в условиях устойчивой атмосферы и сильнее в неустойчивой. Устойчивая стратификация атмосферы приводит к тому, что течение воздушных масс в уличном каньоне ниже по потоку ослабевает вследствие плавучести, что в свою очередь приводит к образованию еще более устойчивой стратифицированной атмосферы. И как результат, когда устойчивость атмосферы достигает определенного уровня

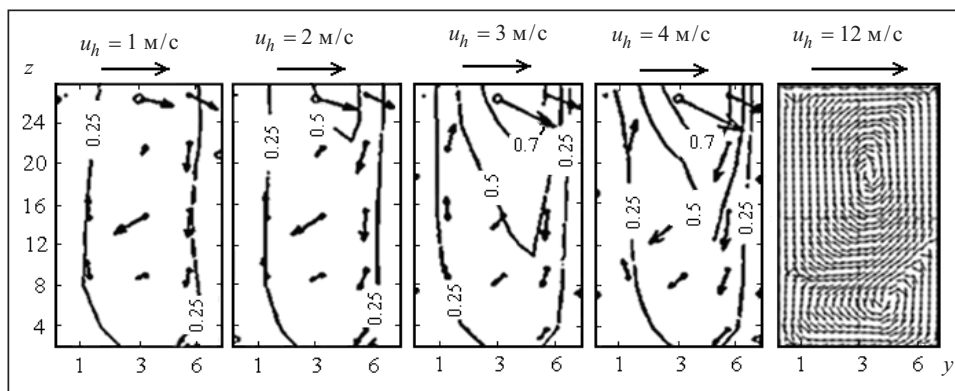


Рис. 9. Структура турбулентного течения в каньоне при поперечном направлении ветра

(приблизительно в интервале  $Ri = 0.4-0.8$ ), скорость ветра в уличном каньоне падает практически до нуля. Однако в неустойчиво стратифицированной атмосфере существует очень интенсивное перемешивание в уличных каньонах, приводящее к малому росту и изменению вертикального градиента температур, а следовательно, увеличению неустойчивости атмосферы.

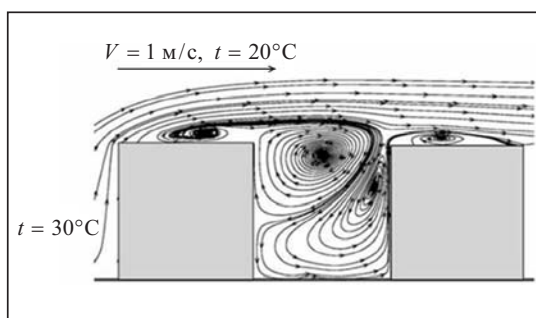


Рис. 10. Изотехи в уличном каньоне в условиях подогретой наветренной стены

Численный эксперимент показывает, что при поперечном ветре, дующем слева направо, и когда нет больших промежутков между зданиями внутри каньона улицы образуется вращающийся по часовой стрелке вихревой поток. При увеличении скорости ветра угловая скорость вихревого потока нарастает и, наконец, при скорости ветра 10 м/с в углу между дном каньона и подветренной стеной наветренного здания образуется вихрь малого размера (рис. 9). Эти результаты согласуются с экспериментальными результатами, полученными в [28].

Не менее важной задачей исследования, особенно в штилевых условиях, является оценка влияния на аэродинамику уличных каньонов нагретых солнечной радиацией стен зданий, которое может быть очень значительным в случае преобладания термических эффектов. С помощью численных экспериментов показано, что при определенных условиях  $Gr / Re^2 \gg 1$  ( $Gr = gL^3 \beta \Delta T / \nu^2$ ) влияние плавучести бывает настолько велико, что основная рециркуляция в каньоне разбивается на две или полностью разрушается, и следовательно, значительно изменяется картина вихревых образований (рис. 10). Этот факт согласуется с результатами, полученными в [29, 30].

Для анализа влияния параметров поперечного профиля улиц и приемов компоновки зданий на деформацию воздушного потока моделировались функциональные зависимости скорости ветра по длине магистрали от ее ширины и плотности застройки. Для того чтобы проследить, при каких планировочных условиях вихревые зоны, образованные торцами отдельных зданий, объединяются в единую область замкнутой циркуляции воздушных масс, охватывающей все уличное пространство, проводился численный эксперимент крупномасштабного моделирования городской застройки. Он осуществлялся для изучения влияния застройки за-

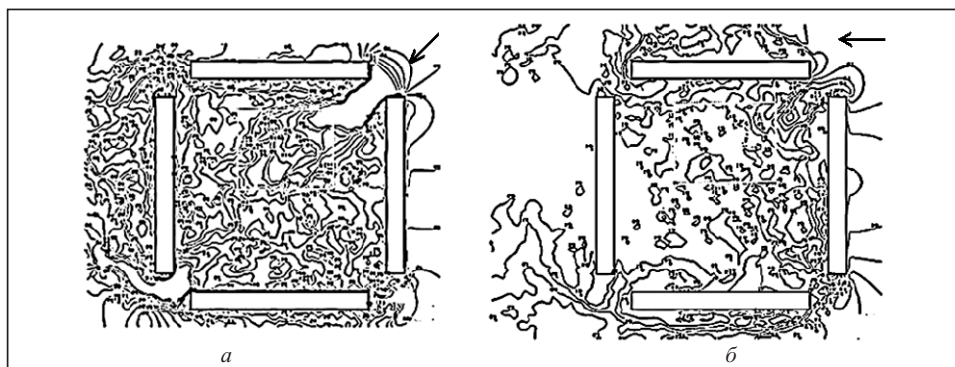


Рис. 11. Результаты численного моделирования воздушной циркуляции в застройке замкнутого типа при северо-восточном (а) и восточном ветре (б)

мкнутого типа на аэрацию дворового пространства. Набегающий воздушный поток представлял собою равномерное векторное поле. В рассматриваемом типе замкнутой застройки торцевые стены зданий образуют направляющие для входящего в угловые промежутки между зданиями воздушного потока. При любом угле ветра по отношению к застройке он направлен вовнутрь застройки. Интенсивность воздушного потока определяется размером промежутка между зданиями застройки. В численном эксперименте рассматривалась жилая застройка замкнутого типа, в которой длина зданий  $L$  принималась равной 100 м, ширина 15 м, скорость ветра  $V = 10$  м/с, промежуток между зданиями 20 м. Результаты численного моделирования внутреннего пространства при северо-восточном и восточном ветре в виде изотоп показаны рис. 11. С наветренной стороны в разрывах зафиксировано увеличение скорости ветра в 1.6 раза.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для исследования аэродинамики в городской застройке разработана нестационарная пространственная микромасштабная математическая модель, основанная как на использовании усредненных по Рейнольдсу уравнений гидродинамики, так и на предложенной вихревой модели турбулентности.

Численная реализация рассматриваемой микромасштабной модели выполнена на основе покоординатного аддитивного расщепления. Сеточные уравнения решены с помощью неявной абсолютно устойчивой разностной схемы первого порядка аппроксимации по времени и по координатам с эффективностью явной схемы.

Тестирование математической модели и численного метода решения проведены на аналитических и экспериментальных данных. Выполнены вычислительные эксперименты на задачах турбулентного течения в прямоугольном канале, продольных и поперечных каньонах городских улиц. На основании результатов сравнительного анализа сделан вывод об адекватности предложенной модели исследуемым физическим процессам.

Изучено влияние геометрических размеров композиционного объединения групп городских зданий и метеорологических факторов на изменение скорости и направления воздушных потоков в уличных каньонах, что, несомненно, представляет интерес относительно аэрационного режима улиц и процессов, связанных с турбулентным рассеиванием.

Отметим, что по результатам апробации предложенной вихревой модели турбулентности установлено, что при исследовании сложных течений воздушных масс в уличных каньонах с зелеными насаждениями и движущимся автотранспортом необходимы дополнительные экспериментальные и теоретические исследования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prusov V., Doroshenko A. Computational techniques for modeling atmospheric processes. Hershey: IGI Global USA, 2018. 460 p.
2. Прусов В.А., Романюк А.П. Математическая модель турбулентности для стратифицированных сред. *Наукові праці УкрНДГМІ*. 1998. Вип. 246. С. 35–45.
3. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1895. Vol. 174. P. 935–982.
4. Бызова И.Л., Иванов В.Н., Гаргер Э.К. Турбулентность в пограничном слое атмосферы. Ленинград: Гидрометеиздат, 1989. 263 с.
5. Методы расчета турбулентных течений. Под ред. В. Колльмана. Москва: Мир, 1984. 464 с.
6. Турбулентность. Принципы и применения. Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. Москва: Мир, 1980. 535 с.
7. Galperin B., Kantha L., Hassid S., Rosati A. A quasi-equilibrium turbulent energy model for geophysical flows. *J. Atmos. Sci.* 1988. Vol. 45. P. 55–62.
8. Boussinesq J. Theorie de l'écoulement tourbillant. *Mem. Pres. Acad. Sci.* 1877. XXIII. 46 p.
9. Колмогоров А. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. *ДАН СССР*. 1941. Т. 39. С. 299–303.
10. Rotta J. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. 1. *Zeitschrift für Physik*. 1951. Bd 129. S. 129–142.
11. Prandtl L. Über die ausgebildete Turbulenz. *ZAMM*. 1925. Vol. 5. P. 136–139.
12. von Karman Th. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse*. 1930. Vol. 58. P. 337–346.
13. Thom A.S. Momentum, mass and heat exchange of plant communities. *Vegetation and the atmosphere*. Monteith J.L. (ed.). Vol. 1. Principles. London: Academic Press, 1975. P. 57–109.
14. Prusov V., Doroshenko A., Farago I., Havasi A. On the numerical solution of the three-dimensional advection-diffusion equation. *Проблеми програмування*. 2006. № 2-3. С. 641–647.
15. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 3. С. 64–74.
16. Nikuradse J. Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Rohren. *Forsch. Arb. Ing.-Wes., Ausgabe*. 1932. N 356.
17. Nikuradse I. Stroemungsgesetze in rauhen Rohren. *Forschungs-Heft (Forschungs auf dem Gebiete des Ingenieur-wesens)*. 1933. N 361. P. 1–22.
18. Coles D. The law of the wake in the turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*. 1956. N 1. 191 p.
19. Kline S.J., Runstadler P.W. Some preliminary results of visual studies of the flow model of the wall layers of the turbulent boundary layer. *ASME Transactions. Series E*. 1959. Vol. 26, N 2. P. 166–170.
20. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Москва: Наука, 1969. 742 с.
21. Brundrett E., Baines W.D. The production and diffusion of vorticity in duct flow. *J. Fluid Mech.* 1964. Vol. 19. P. 375–394.
22. Корнилов В.И. Пространственные пристенные турбулентные течения в угловых конфигурациях. Новосибирск: Наука, 2000. 398 с.
23. Gessner F.B., Jones J.B. On some aspects of fully developed turbulent flow in rectangular channels. *J. Fluid Mech.* 1965. Vol. 23. P. 689–713.
24. Brundrett E., Baines W.D. The production and diffusion of vorticity in duct flow. *J. Fluid Mech.* 1964. Vol. 19. P. 375–394.
25. Melling A., Whitelaw J.H. Turbulent flow in a rectangular duct. *J. Fluid Mech.* 1976. Vol. 78, N 2. P. 289–315.
26. Тепакс Л.А. Равномерное турбулентное движение в трубах и каналах. Таллин: Валгус, 1975. 255 с.
27. Han I.S. Hydrodynamic entrance length for incompressible flow in rectangular ducts. *Trans. ASME, J. Applied Mechanics*. 1960. Vol. 27, N 3. P. 403–408.

28. Chan T.L., Dong G., Leung C.W., Cheung C.S., Hung W.T. Validation of a two-dimensional pollutant dispersion model in an isolated street canyon. *Atmospheric Environment*. 2002. Vol. 36, N 5. P. 861–872.
29. Mestayer P.G., Sini J.-F., Jobert M. Simulation of the wall temperature influence on flows and dispersion within street canyons. *Proc. 3rd International Conference on Air Pollution (Porto Carras)*. 1995. Vol. 1. P.106–109.
30. Xie X., Huang Z., Wang J., Xie Z. The impact of solar radiation and street layout on pollutant dispersion in street canyon. *Building and Environment*. 2005. V. 40. P. 201–212.

*Надійшла до редакції 16.04.2018*

**В.А. Прусов, А.Ю. Дорошенко, Т.А. Сологуб**  
**АТМОСФЕРНІ ПРОЦЕСИ В ЕЛЕМЕНТАХ МІСЬКОЇ ЗАБУДОВИ**

**Анотація.** Продемонстровано ефективність і точність розроблених гідродинамічної моделі атмосфери, турбулентної моделі замикання, методів апроксимації похідних першого і другого порядків на нерівномірній сітці та абсолютно стійка різницева схема на основі розв'язання прикладних задач. Наведено порівняння результатів математичного моделювання аеродинаміки вуличних каньйонів з наявними теоретичними і експериментальними даними. Досліджено вплив довжини вуличного каньйону і висоти будинків на характеристики повітряного потоку в міській забудові. Показано, що зміна конфігурації міської забудови призводить не тільки до кількісної, але й до істотної якісної зміни картини течії повітря і його швидкості.

**Ключові слова:** гідродинамічна мезомасштабна модель атмосфери, різницева схема, замикання моделі турбулентності, швидкість вітру, ротор швидкості, прямокутний канал, вуличний каньйон, міська забудова.

**V.A. Prusov, A.Yu. Doroshenko, T.A. Sologub**  
**ATMOSPHERIC PROCESSES IN ELEMENTS OF URBAN CONSTRUCTION**

**Abstract.** The authors demonstrate the efficiency and accuracy of the developed hydrodynamic model of the atmosphere, turbulent closure model, methods for approximating the first- and second-order derivatives on an irregular grid, and the absolutely stable difference scheme based on the solution of applied problems. The results of mathematical modeling of aerodynamics of street canyons are compared with available theoretical and experimental data. The influence of the length of the street canyon and height of the houses on the characteristics of air flow in the urban development is investigated. It is shown that changes in the configuration of urban development lead not only to quantitative but also to a significant qualitative change in air flow pattern and velocity.

**Keywords:** hydrodynamic mesoscale model of the atmosphere, difference scheme, closure of turbulence model, wind velocity, velocity rotor, rectangular channel, street canyon, urban development.

**Прусов Виталий Арсениевич,**  
 доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Украинского гидрометеорологического института ГСЧС Украины и НАН Украины, Киев, e-mail: vitaliy@softtick.com.

**Дорошенко Анатолий Ефимович,**  
 доктор физ.-мат. наук, профессор Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», ведущий научный сотрудник Института программных систем НАН Украины, Киев, e-mail: doroshenkoanatoliy2@gmail.com.

**Сологуб Татьяна Андреевна,**  
 научный сотрудник Украинского гидрометеорологического института ГСЧС Украины и НАН Украины, Киев, e-mail: sologub@uhmi.org.ua.