УДК 517 . 927

ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРНИХ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ*

В. А. Ферук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

In this paper, conditions for consistency of a pair system of functional-differential equations with restrictions are established. An iterative method for such problems is substantiated.

Установлены условия совместимости для четных систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с ограничениями. Обосновано применение к таким задачам итерационного метода.

Вивчення різних природних та суспільних явищ проводяться сьогодні шляхом побудови та дослідження їх математичних моделей. Практичні застосування сприяли зародженню та розбудові багатьох математичних дисциплін. Серед них — теорія функціонально-диференціальних рівнянь [1 – 5]. Одним із напрямків згаданих вище досліджень є встановлення умов сумісності та обґрунтування наближених методів розв'язання парних систем функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями [6, 7]. У даній роботі досліджується система парних нелінійних рівнянь з додатковими умовами, одне з яких є звичайним диференціальним рівнянням, а інше — диференціальним рівнянням із запізненням нейтрального типу.

1. Об'єкт дослідження. Розглянемо задачу

$$\frac{d}{dt}x(t) + R(t)x(t) = g(t, x(t)), \quad t \in [a, c], \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) + N(t)\frac{d}{dt}x(t-\Delta) + L(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta) = \\ = f(t, x(t), x(t-\Delta)), \quad t \in [c, b], \tag{2}$$

$$x(a) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{3}$$

у якій $c \geq a + \Delta$, $\Delta > 0$ — стале запізнення, елементи $(m \times m)$-матриць $R(t)$, $L(t)$, $M(t)$ та $(l \times m)$-матриці $S(t)$ сумовні з квадратом на відрізках $[a, c]$, $[c, b]$, $[c, b]$ та $[a, b]$ відповідно, $N(t)$ — неперервна на $[c, b]$ $(m \times m)$-матриця, $N(t) \neq 0$ на $[c, b]$, вектор-функції $g : [a, c] \times \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ та $f : [c, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задають оператори $g : L_2([a, c], \mathbb{R}^m) \to \to L_2([a, c], \mathbb{R}^m)$, $f : L_2([c, b], \mathbb{R}^m) \to L_2([c, b], \mathbb{R}^m)$, вектори $\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$.

* Частково підтримано грантом Президента України для молодих учених (№ GP/F13/0097).

Задачу (1) – (3) вважатимемо сумісною, якщо існує вектор-функція $x \in W_2^1([a,b],\mathbb{R}^m)$, яка майже скрізь задовольняє рівняння (1), (2) та умови (3). Якщо ж такої вектор-функції не існує, то задача (1) – (3) є несумісною.

Метою даної статті є встановлення умов сумісності задачі (1) – (3) та обґрунтування застосування до неї ітераційного методу.

2. Зведення системи парних функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями до крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з обмеженнями. Задачу (1) – (3) можна звести до крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з обмеженнями. Такий підхід дозволяє застосувати при дослідженні поставленої задачі методики, розроблені для звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, встановлення умов сумісності задачі (1) – (3) та обґрунтування застосування до неї різних наближених методів можна проводити методом інтегральних рівнянь.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $c > a+\Delta$, $b = c+K\Delta$, де K — фіксоване натуральне число. Дотримуючись методики із [8], розглядаючи систему рівнянь (1), (2) на кожному інтервалі (τ_i,τ_{i+1}), виконуючи заміну $t = ds+\tau_i$, де $\tau_0 = a$, $d = (c-a)/T$, $i = 0$, $\tau_i = c+(i-1)\Delta$, $d = \Delta/T$, $i = \overline{1,K}$, $s \in [0,T]$, та враховуючи неперервність вектор-функції $x(t)$ у точках τ_i, $i = \overline{1,K-1}$, отримуємо крайову задачу для системи диференціальних рівнянь порядку $m(K+1)$ з обмеженнями

$$Q(s)\frac{dz}{ds} + P(s)z(s) = U(s,z(s)), \quad s \in (0,T), \tag{4}$$

$$z(0) = \beta + Dz(T), \quad \int_0^T V(s)z(s)ds = \alpha, \tag{5}$$

в якій

$$z(s) = \operatorname{col}\begin{pmatrix} z_0(s) & z_1(s) & \dots & z_K(s) \end{pmatrix},$$

$$Q(s) = \begin{pmatrix} I & O & \dots & O & O \\ N_1(s) & I & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & N_K(s) & I \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ I & O & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & I & O \end{pmatrix},$$

$$P(s) = \begin{pmatrix} R_1(s) & O & \dots & O & O \\ M_1(s) & L_1(s) & \dots & O & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & M_K(s) & L_K(s) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\beta = \operatorname{col}\begin{pmatrix} \gamma & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad V(s) = \operatorname{col}\begin{pmatrix} S_0(s) & S_1(s) & \dots & S_K(s) \end{pmatrix},$$

$$U(s,z(s)) = \begin{pmatrix} g_0(s,z_0(s)) \\ f_1(s,z_1(s),z_0(s)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_K(s,z_K(s),z_{K-1}(s)) \end{pmatrix},$$

I — одинична матриця в $\mathbb{R}^m$,

$$z_i(s) = x(ds+\tau_i), \quad i = \overline{0,K}, \quad R_0(s) = dR(ds+\tau_0),$$

$$L_i(s) = dL(ds+\tau_i), \quad M_i(s) = dM(ds+\tau_i), \quad N_i(s) = N(ds+\tau_i), \quad i = \overline{1,K},$$

$$g_0(s, z_0(s)) = dg(ds+\tau_0, x(ds+\tau_0)),$$

$$f_i(s, z_i(s), z_{i-1}(s)) = df(ds+\tau_i, x(ds+\tau_i), x(ds+\tau_{i-1})), \quad i = \overline{1,K},$$

$$S_i(s) = dS(ds+\tau_i), \quad i = \overline{0,K}.$$

Отже, вивчення задачі (1) – (3) звелося до вивчення системи диференціальних рівнянь з обмеженнями (4), (5). Розв'язки цих задач пов'язані між собою співвідношеннями

$$x(t) = z_i(s), \quad z_i(s) = x(ds+\tau_i),$$

де $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0,K}$, $s \in [0,T]$ і $z_i(T) = z_{i+1}(0)$, $i = \overline{0,K-1}$.

Наведені вище міркування дозволяють проводити подальші дослідження безпосередньо задачі (4), (5), тому далі вона буде основним об'єктом нашого вивчення.

3. Умови сумісності. Задача (4), (5) є перевизначеною. Наявність додаткових обмежень (5) потребує відшукання умов сумісності поставленої задачі. Наведемо одну з таких умов.

Для цього розглянемо задачу з керуванням

$$Q(s)\frac{dv}{ds} + P(s)v(s) = U(s, v(s)) + E(s)\lambda, \quad s \in (0,T), \tag{7}$$

$$v(0) = \beta + Dv(T), \quad \int\limits_0^T V(s)v(s)ds = \alpha, \tag{8}$$

у якій $E(s)$ — $(m(K+1)\times l)$-матриця із сумовними з квадратом на $[0,T]$ елементами, стовпці якої є лінійно незалежними. Під розв'язком задачі (7), (8) розумітимемо пару $(v(s), \lambda)$, $v \in W_2^1\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$, що задовольняє майже скрізь рівняння (7) та умови (8).

Введемо до розгляду допоміжну задачу

$$Q(s)\frac{dv}{ds} + H(s)v(s) = y(s) + E(s)\lambda, \quad s \in (0,T), \tag{9}$$

$$v(0) = \beta + Dv(T), \quad \int\limits_0^T V(s)v(s)\,ds = \alpha, \tag{10}$$

де $H(s)$ — неперервна при $s \in [0,T]$ $(m(K+1) \times m(K+1))$-матриця. Тут вектор-функція $y^* \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$ є заданою, а вектор-функцію $v \in W_2^1\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$ та вектор $\lambda \in \mathbb{R}^l$ потрібно визначити.

Матриці $H(s)$ та $E(s)$ підбираємо так, щоб задача (9), (10) мала єдиний розв'язок при довільній вектор-функції $y^* \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$, що зображається формулами [9]

$$v(s) = h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi, \quad u(s) = E(s)\lambda = r(s) - \int\limits_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi, \tag{11}$$

і справджувались рівності

$$\int_0^T G(s,\xi)E(\xi)d\xi = O, \quad E(s) - \int_0^T R(s,\xi)E(\xi)d\xi = O. \tag{12}$$

Формули (11) дозволяють пов'язати дослідження питання сумісності задачі (4), (5), а отже і задачі (1) – (3), з питанням існування розв'язків деякої системи інтегральних рівнянь без обмежень. Для побудови згаданої вище системи рівнянь запишемо задачу (7), (8) у вигляді (9), (10), поклавши в ній

$$y(s) = [H(s) - P(s)]v(s) + U(s, v(s)), \tag{13}$$

та підставимо перше із зображень (11) у (13). Отримаємо

$$y(s) = p(s) + \int_0^T K(s,\xi)y(\xi)d\xi + U\left(s, h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi\right), \tag{14}$$

де

$$p(s) = [H(s) - P(s)]h(s), \quad K(s,\xi) = [H(s) - P(s)]G(s,\xi). \tag{15}$$

Справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *За умови однозначної розв'язності задачі (9), (10) задача (7), (8) має розв'язок* $v^* \in W_2^1\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$ *тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок* $y^* \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$ *рівняння (14).*

Сформулюємо тепер одну з умов сумісності задачі (4), (5). Дотримуючись методики доведення теореми 1 із [8], можна переконатися у справедливості наступного твердження.

Теорема 2. *Якщо задача (9), (10) має єдиний розв'язок, то задача (4), (5) (а отже, і задача (1) – (3)) сумісна тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок* $y^*(s)$ *системи рівнянь (14) такий, що задовольняє умову*

$$\sigma + \int_0^T \Gamma(\xi)y^*(\xi)d\xi = 0, \tag{16}$$

де

$$\sigma = \int_0^T V(s)p(s)ds, \quad \Gamma(\xi) = \int_0^T V(s)K(s,\xi)ds.$$

Розв'язки задачі (4), (5) і рівняння (14) пов'язані між собою співвідношеннями

$$z^*(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y^*(\xi)d\xi, \quad y^*(s) = Q(s)\frac{dz^*}{ds} + H(s)z^*(s).$$

4. Ітераційний метод. Поряд із питанням сумісності задачі (4), (5) не менш важливим завданням є відшукання її розв'язків: точно чи наближено. До розв'язання задачі (4), (5) можна застосовувати різні наближені методи. Нижче наведено обґрунтування застосування до поставленої задачі ітераційного методу. Суть методу стосовно задачі (4), (5) полягає у тому, що послідовні наближення $z_k(s)$ визначаються із задачі

$$Q(s)\frac{dz_k}{ds} + H(s)z_k(s) = y_k(s) + E(s)\lambda_k, \tag{17}$$

$$z_k(0) = \beta + Dz_k(T), \quad \int\limits_0^T V(s)z_k(s)ds = \alpha, \tag{18}$$

де вектор-функція $y_k(s)$ має вигляд

$$y_k = [H(s) - P(s)]z_{k-1}(s) + U(s, z_{k-1}(s)). \tag{19}$$

У задачі (17), (18) вектор-функція $y_k \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$ є заданою, а вектор-функція $z_k \in W_2^1\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$ та вектор $\lambda_k \in \mathbb{R}^l$ — шуканими.

Початкове наближення $z_0(s)$ визначаємо із задачі (17), (18) при $k = 0$ і заданій вектор-функції $y_0 \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^{m(K+1)}\right)$.

Наближені розв'язки задачі (4), (5), побудовані за формулами (17) – (19), дають змогу отримати явний вигляд наближених розв'язків задачі (1) – (3), побудованих за методом послідовних наближень

$$x_k(t) = z_k^i(s), \quad z_k^i(s) = x_k(ds + \tau_i), \tag{20}$$

де $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, K}$, $s \in [0, T]$ і $z_k^i(T) = z_k^{i+1}(0)$, $i = \overline{0, K-1}$.

5. Умови збіжності методу. Встановимо умови збіжності запропонованого методу. Для цього покажемо, що метод (17) – (19) можна звести до методу послідовних наближень для системи інтегральних рівнянь (14).

Справді, задача (17), (18), як зазначалось у п. 3, має єдиний розв'язок

$$z_k(s) = h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)y_k(\xi)d\xi. \tag{21}$$

Підставивши розв'язок (21), в якому індекс k замінено на $k-1$, у співвідношення (19), отримаємо метод послідовних наближень для системи інтегральних рівнянь (14):

$$y_k(s) = p(s) + \int\limits_0^T K(s,\xi)y_{k-1}(\xi)d\xi + U\left(s, h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)y_{k-1}(\xi)d\xi\right). \tag{22}$$

Отже, питання встановлення умов збіжності методу (17) – (19) звелося до відповідного питання для ітераційного методу (22), що достатньо добре досліджено у літературі.

6. Приклад. Проілюструємо наведену вище методику дослідження сумісності задачі (1)–(3) та метод (17)–(19) на задачі

$$\frac{d}{dt}x(t) + \frac{1}{10}x(t) = \frac{1}{10}(t+11), \quad t \in [-1,0],$$

$$\frac{d}{dt}x(t) + t\frac{d}{dt}x(t-1) + \frac{1}{10}(t-10)x(t) = t + \frac{1}{10}x(t)x(t-1), \quad t \in [0,1], \tag{23}$$

$$x(-1) = 0, \quad \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt = \frac{5}{6}.$$

У розглядуваній задачі $m = 1$, $l = 1$, $\Delta = 1$, $a = -1$, $c = 0$, $b = 1$, $R(t) = \dfrac{1}{10}$, $L(t) = \dfrac{1}{10}(t-10)$, $N(t) = t$, $M(t) = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = \dfrac{5}{6}$, $g(t, x(t)) = \dfrac{1}{10}(t+11)$, $f(t, x(t), x(t - -\Delta)) = t + \dfrac{1}{10}x(t)x(t-1)$, $S(t) = t$.

Поклавши $T = 1$, врахувавши, що $d = 1$, $K = 1$, $\tau_0 = -1$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$, виконавши заміну $t = s-1$, $t \in (-1,0)$, $t = s$, $t \in (0,1)$, $s \in (0,1)$, ввівши позначення $z_1(s) = x(s-1)$, $z_2(s) = x(s)$ та врахувавши неперервність функції $x(t)$ в точці $t = 0$, задачу (23) можна переписати у вигляді

$$\frac{dz_1}{ds} + \frac{1}{10}z_1(s) = \frac{1}{10}(s+10), \quad \frac{dz_2}{ds} + s\frac{dz_1}{ds} + \frac{1}{10}(s-10)z_2(s) = s + \frac{1}{10}z_2(s)z_1(s),$$

$$z_1(0) = 1, \quad z_1(1) = z_2(0), \quad \int\limits_0^1 ((s-1)z_1(s) + sz_2(s))\,ds = \frac{5}{6}. \tag{24}$$

Тут $\beta = 0$,

$$Q(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, \quad P(s) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U(s, z(s)) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10+s \\ 10s + z_2(s)z_1(s) \end{pmatrix}, \quad V(s) = \begin{pmatrix} s-1 & s \end{pmatrix}.$$

Розглянемо задачу з керуванням

$$\frac{dv_1}{ds} + \frac{1}{10}v_1(s) = \frac{1}{10}(s+10) + \lambda,$$

$$\frac{dv_2}{ds} + s\frac{dv_1}{ds} + \frac{1}{10}(s-10)v_2(s) = s + \frac{1}{10}v_2(s)v_1(s) + \lambda,$$

$$v_1(0) = 1, \quad v_1(1) = v_2(0), \quad \int\limits_0^1 ((s-1)v_1(s) + sv_2(s))ds = \frac{5}{6}.$$

Введемо до розгляду допоміжну задачу

$$\frac{dv_1}{ds} = y_1(s) + \lambda, \quad \frac{dv_2}{ds} + s\frac{dv_1}{ds} = y_2(s) + \lambda,$$
$$v_1(0) = 1, \quad v_1(1) = v_2(0), \quad \int_0^1 ((s-1)v_1(s) + sv_2(s))\,ds = \frac{5}{6}. \tag{25}$$

Отже, $H(s) = 0$, $E(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задача (25) має єдиний розв'язок вигляду (11), де

$$r(s) = \frac{20}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R(s,\tau) = \frac{12}{13}\begin{pmatrix} \tau^3 - \tau^2 + \tau & 1-\tau^2 \\ \tau^3 - \tau^2 + \tau & 1-\tau^2 \end{pmatrix},$$

$$h(s) = \frac{10}{13}\begin{pmatrix} 2s \\ 2+2s-s^2 \end{pmatrix}, \quad G(s,\tau) = \begin{pmatrix} g_{11}(s,\tau) & g_{12}(s,\tau) \\ g_{21}(s,\tau) & g_{22}(s,\tau) \end{pmatrix},$$

$$g_{11}(s,\tau) = \theta(s,\tau) - \frac{12}{13}s(\tau^3 - \tau^2 + \tau), \quad g_{12}(s,\tau) = \frac{12}{13}s(\tau^2 - 1),$$

$$g_{21}(s,\tau) = 1 - \tau\theta(s,\tau) + \frac{6}{13}(s^2 - 2s - 2)(\tau^3 - \tau^2 + \tau),$$

$$g_{22}(s,\tau) = \theta(s,\tau) - \frac{6}{13}(s^2 - 2s - 2)(\tau^2 - 1), \quad \theta(s,\tau) = \begin{cases} 0, & s < \tau, \\ 1, & s \geq \tau. \end{cases}$$

Скориставшись згаданим вище зображенням для розв'язку задачі (25) та зображенням (13), що у даному випадку матиме вигляд

$$y_1(s) = 1 + \frac{1}{10}s - \frac{1}{10}v_1(s), \quad y_2(s) = s + \frac{1}{10}(10-s)v_2(s) + \frac{1}{10}v_2(s)v_1(s),$$

побудуємо систему інтегральних рівнянь (14):

$$y_1(s) = 1 - \frac{7}{130}s - \frac{1}{10}\int_0^1 (g_{11}(s,\tau)y_1(\tau) + g_{12}(s,\tau)y_2(\tau))d\tau,$$
$$y_2(s) = \frac{1}{13}(s^3 - 12s^2 + 31s + 20) + \frac{1}{10}(10-s)\int_0^1 (g_{21}(s,\tau)y_1(\tau) + g_{22}(s,\tau)y_2(\tau))d\tau +$$
$$+\frac{1}{1690}\left(20s + 13\int_0^1 (g_{11}(s,\tau)y_1(\tau) + g_{12}(s,\tau)y_2(\tau))d\tau\right) \times$$
$$\times \left(10(2+2s-s^2) + 13\int_0^1 (g_{21}(s,\tau)y_1(\tau) + g_{22}(s,\tau)y_2(\tau))d\tau\right). \tag{26}$$

Згідно з теоремою 2, задача (23) є сумісною тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок $y_1^*(s)$, $y_2^*(s)$ системи інтегральних рівнянь (26) і виконуються умови

$$3\int_0^1((\tau^3-\tau^2+\tau)y_1^*(\tau)+(1-\tau^2)y_2^*(\tau))d\tau = 5. \tag{27}$$

Підставивши у (27) розв'язок системи рівнянь (26)

$$y_1^*(s) = 1, \quad y_2^*(s) = s + e^s,$$

переконуємось у сумісності задачі (23). Справді, неважко переконатись у тому, що її розв'я-зок має вигляд

$$x^*(t) = \begin{cases} t+1, & t \in [-1,0], \\ e^t, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Застосуємо до задачі (24) ітераційний метод (17) – (19), згідно з яким наближення до шуканого розв'язку будуються за формулами

$$\frac{dz_1^k}{ds} = y_1^k(s) + \lambda_k, \quad \frac{dz_2^k}{ds} + s\frac{dz_1^k}{ds} = y_2^k(s) + \lambda_k,$$

$$z_1^k(0) = 1, \quad z_1^k(1) = z_2^k(0), \quad \int_0^1((s-1)z_1^k(s)+sz_2^k(s))ds = \frac{5}{6}, \tag{28}$$

$$y_1^k(s) = 1 + \frac{1}{10}s - \frac{1}{10}z_1^{k-1}(s), \quad y_2^k(s) = s + \frac{1}{10}(10-s)z_2^{k-1}(s) + \frac{1}{10}z_2^{k-1}(s)z_1^{k-1}(s).$$

Поклавши $y_0(t) = 0$, знайдемо початкове наближення із задачі

$$\begin{gathered} \frac{dz_1^0}{ds} = \lambda_0, \quad \frac{dz_2^0}{ds} + s\frac{dz_1^0}{ds} = \lambda_0, \\ z_1^0(0) = 1, \quad z_1^0(1) = z_2^0(0), \quad \int_0^1((s-1)z_1^0(s)+sz_2^0(s))\,ds = \frac{5}{6}. \end{gathered} \tag{29}$$

Розв'язавши задачу (29), отримаємо

$$\lambda_0 = \frac{20}{13}, \quad z_1^0(s) = \frac{20}{13}s, \quad z_2^0(s) = \frac{10}{13}(2+2s-s^2).$$

Згідно з (20) наближення $x_0(t)$ матиме вигляд

$$x_0(t) = \frac{10}{13}\begin{cases} 2(t+1), & t \in [-1,0], \\ 2+2t-t^2, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Продовживши обчислення за формулами (28), можна аналогічно побудувати й наступні наближення $x_k(t)$, близькість яких до точного розв'язку задачі (23)

$$x^*(t) = \begin{cases} t+1, & t \in [-1, 0], \\ e^t, & t \in [0, 1], \end{cases}$$

відображено у таблиці.

t	$\lvert x^*(t) - x_0(t)\rvert$	$\lvert x^*(t) - x_3(t)\rvert$	$\lvert x^*(t) - x_6(t)\rvert$
– 1,00	0,000000	0,000000	0,000000
– 0,75	0,134615	0,013013	0,000971
– 0,50	0,269231	0,026842	0,002001
– 0,25	0,403846	0,041526	0,003094
0,00	0,538462	0,057119	0,004254
0,25	0,590975	0,039137	0,002927
0,50	0,466663	0,026091	0,001920
0,75	0,142615	0,013887	0,001021
1,00	0,410590	0,000518	0,000085

Отже, в результаті проведених в даній статті досліджень:

1) встановлено умову сумісності систем парних нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь із обмеженнями;

2) обґрунтовано метод послідовних наближень до таких задач.

Отримані результати можуть бути основою для аналогічних досліджень парних функціонально-диференціальних рівнянь із обмеженнями більш складного вигляду та обґрунтування застосування до розглядуваної задачі низки наближених методів, зокрема проекційного та проекційно-ітеративного.

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.
2. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 120 с.
3. *Хейл Дж. К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1983. — 431 с.
4. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
6. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язування систем функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2006. — Вип. 13. — С. 134 – 152.
7. *Лучка А. Ю.* Парні системи функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями і методи їх розв'язання // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 1. — С. 113 – 125.
8. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із загаюванням та обмеженнями // Там же. — 2003. — **6**, № 2. — С. 206 – 232.
9. *Ферук В. А.* Один варіант проекційно-ітеративного методу для систем лінійних диференціальних рівнянь із запізненням нейтрального типу та обмеженням // Там же. — 2006. — **9**, № 4. — С. 564 – 573.

Одержано 26.11.07