УДК 517.5

НАЙКРАЩІ ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ОБМЕЖЕНИХ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ*

В. В. Савчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We construct a best linear method for approximations harmonic functions on compact subsets of the unit disk. We show that a system of functions, which are orthonormal on the unit circle and optimal for constructing the best linear approximation method, is a Takenaka – Malmquist system.

Построен наилучший линейный метод приближения ограниченных гармонических функций на компактных подмножествах единичного круга. Показано, что оптимальной ортонормированной на единичной окружности системой функций для построения наилучшего линейного метода приближения является система Такенаки – Мальмквиста.

1. Позначення. Постановка задачі. Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, h_∞ — простір обмежених дійснозначних гармонічних функцій f, визначених у крузі $\mathbb{D}$ з нормою $\|f\|_{h_\infty} = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty$ і $Uh_\infty := \{f \in h_\infty : \|f\|_{h_\infty} \leq 1\}$. Позначимо через $\overline{Uh}_\infty$ клас гармонічних у крузі $\mathbb{D}$ функцій, спряжених до функцій з Uh_∞, тобто $\overline{Uh}_\infty :=$ $:= \{f$ гармонічна в $\mathbb{D} : \widetilde{f} \in Uh_\infty\}$.

Відомо, що кожна функція f із простору h_∞ має майже скрізь на колі $\mathbb{T}$ радіальні граничні значення $f^*(w) := \lim_{\varrho\to 1} f(\varrho w)$, причому $\operatorname{ess\,sup}\limits_{w\in\mathbb{T}} |f^*(w)| < \infty$.

Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ – послідовність точок у крузі $\mathbb{D}$, серед яких можуть бути точки скінченної і навіть нескінченної кратності. Системою функцій Такенаки – Мальмквіста, породженою послідовністю $\mathbf{a}$, називається [1] (§10.7) система $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ функцій вигляду

$$\varphi_0(z) = \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{1-\overline{a_0}z}, \quad \varphi_k(z) = \frac{\sqrt{1-|a_k|^2}}{1-\overline{a_k}z} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{-|a_j|}{a_j} \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де при $a_j = 0$ покладено $|a_j|/a_j = -1$.

Відомо, що система Такенаки – Мальмквіста є ортонормованою системою на колі $\mathbb{T}$ (див., наприклад, [1], §10.7), тобто

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle := \int\limits_{\mathbb{T}} \varphi_k \overline{\varphi_l} d\sigma = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, 2 \ldots,$$

де δ_{kl} — символ Кронекера.

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант № GP/F13/0018).

Нехай TM — множина всіх систем Такенаки – Мальмквіста і $\varphi \in TM$. Тоді для будь-якої функції $f \in h_\infty$ послідовність чисел

$$\widehat{f}(k) := \widehat{f}_\varphi(k) := \begin{cases} \langle f, \varphi_k \rangle, & k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \overline{\langle f, \varphi_{-k} \rangle}, & k = -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

існує і утворює послідовність коефіцієнтів Фур'є функції f за системою $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty \cup \{\overline{\varphi}_k\}_{k=1}^\infty$.

Кожному елементу φ_k системи φ поставимо у відповідність добуток Бляшке B_k степеня k. Нагадаємо, що так називають функцію вигляду

$$B_0(z) = 1, \quad B_n(z) = \tau \prod_{j=0}^{n-1} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $a_j \in \mathbb{D}$, $j = \overline{0, n-1}$, і $|\tau| = 1$.

Нехай $\mathscr{B}_n$ — множина всіх добутків Бляшке степеня не більше n. Будь-який добуток Бляшке $B_n \in \mathscr{B}_n$, нулі якого збігаються з нулями функції φ_n вигляду (1), будемо називати n-добутком Бляшке системи Такенаки – Мальмквіста φ.

Позначимо через $\mathscr{L}$ множину всіх нескінченних нижньотрикутних матриць $\Lambda := (\lambda_{k,n})$, $n = 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n-1$, елементами яких є функції $\lambda_{k,n}(\cdot)$, визначені та неперервні в $\mathbb{D}$. Для даної матриці $\Lambda \in \mathscr{L}$ і системи $\varphi \in TM$ визначимо на h_∞ послідовність лінійних операторів $U_{n,\Lambda,\varphi}$ правилом

$$U_{n,\Lambda,\varphi}(f) = -f(0)\,\mathrm{Re}(\lambda_{0,n}\varphi_0) + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,n} \widehat{f}(k) \varphi_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Нехай K — компактна підмножина круга $\mathbb{D}$ і $\|f\|_K := \max_{z \in K} |f(z)|$.

У даній роботі будемо досліджувати величину

$$\mathcal{E}_n(X; K; \varphi) := \inf_{\Lambda \in \mathscr{L}} \sup_{f \in X} \|f - U_{n,\Lambda,\varphi}(f)\|_K, \quad n \in \mathbb{N}, \quad X = Uh_\infty \vee \overline{Uh}_\infty, \tag{2}$$

яку називають величиною найкращого лінійного наближення на компакті K за системою $\varphi \in TM$ класу X. Зокрема, вказано формулу, за якою будуються елементи матриці Λ, для якої досягається нижня межа в (2). Про таку матрицю Λ кажуть, що вона породжує найкращий лінійний метод наближення класу X за системою φ на компакті K.

Поряд із величиною (2) досліджується також величина

$$L_n(X; K) := \inf_{\varphi \in TM} \mathcal{E}_n(X; K; \varphi), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Систему $\varphi^* \in TM$, для якої досягається точна нижня межа в (3), називатимемо оптимальною системою Такенаки – Мальмквіста в сенсі найкращого наближення.

Теорема. *Нехай $\varphi \in TM$ і $\{B_n\}_{n=0}^\infty$ — послідовність n-добутків Бляшке системи φ. Тоді для будь-якого $\zeta \in \mathbb{D}$ і кожного натурального n справджуються рівності*

$$\inf_{\Lambda \in \mathscr{L}} \sup_{f \in Uh_\infty} |f(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(\zeta)| = \max_{f \in Uh_\infty} |f(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)(\zeta)| = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |B_n(\zeta)|, \tag{4}$$

$$\inf_{\Lambda\in\mathscr{L}}\sup_{f\in\overline{Uh}_\infty}|f(\zeta)-U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(\zeta)| = \max_{f\in Uh_\infty}\left|\widetilde{f}(\zeta)-U_{n,\Lambda^{**},\varphi}(\widetilde{f})(\zeta)\right| = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+|B_n(\zeta)|}{1-|B_n(\zeta)|}, \qquad (5)$$

де $\Lambda^*,\Lambda^{**}\in\mathscr{L}$ *— матриці, елементи яких обчислюються відповідно за формулами*

$$\lambda^*_{k,n}(\zeta) = \frac{1}{1+|B_n(\zeta)|^2}\left(1-\overline{\zeta}\frac{1-\overline{a_k}\zeta}{\overline{\zeta}-\overline{a_k}}\left|\prod_{j=k}^{n-1}\frac{\zeta-a_j}{1-\overline{a_j}\zeta}\right|^2\right),$$

$$\lambda^{**}_{k,n}(\zeta) = \frac{1+|B_n(\zeta)|^2}{1-|B_n(\zeta)|^2}\lambda^*_{k,n}(\zeta).$$

Для кожного фіксованого $\zeta\in\mathbb{D}$ *і даного* $n\in\mathbb{N}$ *максимуми у (4) і (5) досягаються відповідно для функцій*

$$f_{1,\zeta}(z) = \frac{2}{\pi}\arg\frac{1+iB_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}{1-iB_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))},$$

$$f_{2,\zeta}(z) = \frac{2}{\pi}\arg\frac{1+B_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}{1-B_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}.$$

Наслідок 1. *Нехай* K *— компактна підмножина круга* $\mathbb{D}$. *Тоді за умов теореми 1 справджуються рівності*

$$\mathcal{E}_n(Uh_\infty;K;\varphi) = \max_{f\in Uh_\infty}\|f-U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)\|_K = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\|B_n\|_K\right), \qquad (6)$$

$$\mathcal{E}_n(\overline{Uh}_\infty;K;\varphi) = \max_{f\in Uh_\infty}\left\|\widetilde{f}-U_{n,\Lambda^{**},\varphi}(\widetilde{f})\right\|_K = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+\|B_n\|_K}{1-\|B_n\|_K}. \qquad (7)$$

Максимуми в (6) і (7) досягаються відповідно для функцій $f_{1,\zeta}$ *і* $f_{2,\zeta}$, *в яких* ζ *— точка на* K *така, що* $|B_n(\zeta)| = \|B_n\|_K$.

Наслідок 2. *Нехай* K *— компактна підмножина круга* $\mathbb{D}$. *Тоді для будь-якого натурального* n *справджується рівності*

$$L_n(Uh_\infty;K) = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\|B^*_n\|_K\right)$$

і

$$L_n(\overline{Uh}_\infty;K) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1+\|B^*_n\|_K}{1-\|B^*_n\|_K},$$

в яких B^*_n *— добуток Бляшке, що задовольняє рівняння*

$$\|B^*_n\|_K = \inf_{B_n\in\mathscr{B}_n\setminus\mathscr{B}_{n-1}}\|B_n\|_K. \qquad (8)$$

Справді, нехай $a_1^*, \ldots, a_{n-1}^*$ – нулі мінімального добутку Бляшке B_n^* у (8) (такий добуток, як відомо, існує для будь-якого компакту K). Тоді система φ, побудована за системою точок $a_1^*, \ldots, a_{n-1}^*, a_n, a_{n+1}, \ldots$, де $a_j, j \geq n$, — довільні точки в $\mathbb{D}$, є оптимальною для $L_n(X;K)$, $X = Uh_\infty \vee \overline{Uh}_\infty$ при даному n.

Зауваження 1. Для того щоб для системи φ, породженої послідовністю точок $\{a_k\}_{k=0}^\infty$, справджувалося співвідношення $\lim_{n\to\infty} |B_n(z)| = 0$ рівномірно по z на будь-якій замкненій підмножині круга $\mathbb{D}$, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1 - |a_k|) = \infty.$$

За цієї умови система φ є повною в просторі h_2, який складається з усіх гармонічних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких

$$\sup_{0<\varrho<1} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(\varrho w)|^2 d\sigma(w) < \infty \tag{9}$$

(див., наприклад, [1], гл. 10, [2], §1).

Зауваження 2. За умов теореми $\lambda_{k,n}^*(a_l) = \lambda_{k,n}^{**}(a_l) = 1$ і $B_n(a_l) = 0$, якщо $k \leq l \leq$ $\leq n-1$. Тому

$$U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)(a_l) = U_{n,\Lambda^{**},\varphi}(f)(a_l) = f(a_l), \quad l = \overline{0, n-1},$$

тобто значення операторів $U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)$ і $U_{n,\Lambda^{**},\varphi}(f)$ збігаються між собою та інтерполюють функцію f у точках a_l, $l = \overline{0, n-1}$, з відповідною їм кратністю.

Зауваження 3. Нехай $K = \overline{\mathbb{D}}_\varrho := \{z : |z| \leq \varrho\}$, $0 \leq \varrho < 1$. Тоді функція $B_n^*(z) =$ $= z^n$ — єдиний з точністю до унімодулярного множника добуток Бляшке степеня n, для якого виконується (8). У цьому випадку система Такенаки – Мальмквіста набуває вигляду $\varphi_k(z) = z^k$, $k = 0, 1, \ldots$, а співвідношення (6) і (7) перетворюються відповідно в рівності

$$\mathcal{E}_n(Uh_\infty; \overline{\mathbb{D}}_\varrho; \varphi) = \max_{f \in Uh_\infty} \|f - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)\|_{\overline{\mathbb{D}}_\varrho} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varrho^n, \tag{10}$$

$$\mathcal{E}_n(\overline{Uh}_\infty; \overline{\mathbb{D}}_\varrho; \varphi) = \max_{f \in Uh_\infty} \left\| \widetilde{f} - U_{n,\Lambda^{**},\varphi}(\widetilde{f}) \right\|_{\overline{\mathbb{D}}_\varrho} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+\varrho^n}{1-\varrho^n}. \tag{11}$$

При цьому елементи матриць Λ^* і Λ^{**} набирають вигляду

$$\lambda_{k,n}^*(\zeta) = \frac{1-\varrho^{2(n-k)}}{1+\varrho^{2n}} \quad \text{і} \quad \lambda_{k,n}^{**}(\zeta) = \frac{1-\varrho^{2(n-k)}}{1-\varrho^{2n}}, \quad \varrho = |\zeta|.$$

Уперше рівності (10) і (11) отримано в роботах [3, 4]. При $n = 1$ вони є класичними рівностями Шварца та Кьобе [5]. До цих результатів примикають результати роботи [6], де вказано низку властивостей функції, екстремальних в (10) і (11).

2. Доведення результатів. Нехай H_2 — простір Гарді, який складається з усіх голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій, для яких виконується (9). Радіальні граничні значення на $\mathbb{T}$ функції $f \in H_2$, заради спрощення викладок, позначатимемо так само через f. Доведемо спочатку таке твердження.

Лема 1. *Нехай $\varphi \in TM$ і B_n — n-добуток системи φ, $n \in \mathbb{N}$. Якщо функція f належить H_2 і $\widehat{f}(k) = \langle f, \varphi_k \rangle = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то*

$$f(\zeta) = B_n(\zeta) \int\limits_{\mathbb{T}} f(w)\overline{B_n(w)} \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w) \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{D}.$$

Доведення леми. Зафіксуємо $\zeta \in \mathbb{D}$ і розглянемо функцію g, означену в $\mathbb{D}$ за правилом

$$g(w) = f(w) \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \overline{\zeta} w}.$$

Зрозуміло, що $g \in H_2$.

Нехай $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність точок, яка породжує систему φ, і

$$R_0(w) = \frac{\sqrt{1 - |a_0|^2}}{w - a_0}, \quad R_k(w) = \frac{\sqrt{1 - |a_k|^2}}{w - a_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{-|a_j|}{\overline{a_j}} \frac{1 - \overline{a_j} w}{w - a_j}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\overline{\varphi_k(w)} = w R_k(w)\ \forall w \in \mathbb{T}$, то за теоремою про лишки маємо формули

$$\widehat{f}(0) = f(a_0) = 0,$$

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} f(w) R_k(w) dw = \sum_{\nu=0}^{k} \left(\operatorname*{res}_{w = a_\nu} f(w) R_k(w) \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \left(\frac{1}{(k_\nu - 1)!} \lim_{w \to a_\nu} \frac{d^{k_\nu - 1}}{dw^{k_\nu - 1}} \Big((w - a_\nu)^{k_\nu} f(w) R_k(w) \Big) \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

в яких k_ν — кратність множника $(1 - \overline{a_\nu} w)/(w - a_\nu)$ у виразі $R_k(w)$, причому $\sum_{\nu=0}^{k-1} k_\nu = k$. З цих формул послідовно для кожного $k = 0, 1, \ldots, n-1$ отримуємо значення $f(a_k) = 0$. Тому $g(a_k) = 0,\ k = \overline{0, n-1}$.

Отже, обчислюючи коефіцієнти Фур'є функції g за системою φ в той самий спосіб, як це зроблено для функції f, знаходимо, що і $\widehat{g_\varphi}(k) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$. З урахуванням цього факту за формулою Коші маємо рівність

$$f(\zeta) = g(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(w) \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \overline{\zeta} w} \left(\frac{1}{1 - \overline{w}\zeta} - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi_k(w)} \varphi_k(\zeta) \right) d\sigma(w).$$

На завершення доведення леми залишається скористатися тотожністю [2]: для кожного фіксованого $\zeta \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{1-\overline{w}\zeta} - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi_k(w)}\varphi_k(\zeta) = \overline{B_n(\zeta)} B_n(w) \frac{1}{1-\overline{\zeta} w} \quad \forall\, w \in \mathbb{T}.$$

Доведення теореми. Нехай $f \in Uh_\infty$ і $\widetilde{f}$ — функція, спряжена до f. Оскільки $f \in h_2$, то і $\widetilde{f} \in h_2$ (див., наприклад, [7, с. 380]). Отже, функція $f_+ := (f + i\widetilde{f})/2$ належить простору H_2. За відомими теоремами про граничні значення $f^*(w) = f_+(w) + \overline{f_+(w)}$ майже скрізь на $\mathbb{T}$.

Оскільки добуток $f_+ B_n$ належить H_2, то за теоремою Фіхтенгольца (див., наприклад, [7, с. 392]) справджується рівність

$$|B_n(\zeta)|^2 f_+(\zeta) = \overline{B_n(\zeta)} \int_{\mathbb{T}} f_+(w) B_n(w) \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w) =$$

$$= |B_n(\zeta)| \int_{\mathbb{T}} f_+(w) \exp(-i\theta_{n,\zeta}(w)) \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w) \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{D}, \tag{12}$$

де

$$\theta_{n,\zeta}(w) := \arg \frac{B_n(\zeta)}{B_n(w)}.$$

Покладаючи

$$T_n(f_+)(\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,n}(\zeta) \widehat{f}_+(k) \varphi_k(\zeta),$$

де

$$\alpha_{k,n}(\zeta) = 1 - \frac{B_n(\zeta)}{\varphi_k(\zeta)} \int_{\mathbb{T}} \overline{B_n(w)} \varphi_k(w) \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{\zeta} w|^2} d\sigma(w) =$$

$$= 1 - (1-\overline{a_k}\zeta) \prod_{j=k}^{n-1} \frac{\zeta - a_j}{1-\overline{a_j}\zeta} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1-\overline{a_k} w} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{1-\overline{a_j} w}{w - a_j} \left(\frac{1}{w-\zeta} - \frac{1}{w - \dfrac{1}{\overline{\zeta}}} \right) \frac{dw}{2\pi i} =$$

$$= 1 - \overline{\zeta} \frac{1-\overline{a_k}\zeta}{\overline{\zeta} - \overline{a_k}} \left| \prod_{j=k}^{n-1} \frac{\zeta - a_j}{1-\overline{a_j}\zeta} \right|^2, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

за допомогою леми отримуємо низку рівностей

$$f_+(\zeta) - T_n(f_+)(\zeta) =$$

$$= f_+(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_+(k)\varphi_k(\zeta) + \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_+(k) \int\limits_{\mathbb{T}} B_n(\zeta)\overline{B_n(w)}\varphi_k(w)\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}d\sigma(w) =$$

$$= B_n(\zeta)\int\limits_{\mathbb{T}} \left(f_+(w) - \sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}_+(k)\varphi_k(w)\right)\overline{B_n(w)}\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}d\sigma(w)+$$

$$+B_n(\zeta)\int\limits_{\mathbb{T}} \left(\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}_+(k)\varphi_k(w)\right)\overline{B_n(w)}\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}d\sigma(w) =$$

$$= B_n(\zeta)\int\limits_{\mathbb{T}} f_+(w)\overline{B_n(w)}\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}d\sigma(w) =$$

$$= |B_n(\zeta)|\int\limits_{\mathbb{T}} f_+(w)\exp(i\theta_{n,\zeta}(w))\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}d\sigma(w) \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{D}. \tag{13}$$

Додаючи до рівності (12) рівність (13), після елементарного перетворення знаходимо формули

$$f_+(\zeta) - \frac{T_n(f_+)(\zeta)}{1+|B_n(\zeta)|^2} = \frac{2|B_n(\zeta)|}{1+|B_n(\zeta)|^2}\int\limits_{\mathbb{T}} f_+(w)\cos\left(\theta_{n,\zeta}(w)\right)\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}d\sigma(w),$$

$$\overline{f_+(\zeta)} - \frac{\overline{T_n(f_+)(\zeta)}}{1+|B_n(\zeta)|^2} = \frac{2|B_n(\zeta)|}{1+|B_n(\zeta)|^2}\int\limits_{\mathbb{T}} \overline{f_+(w)}\cos\left(\theta_{n,\zeta}(w)\right)\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}d\sigma(w).$$

Додавши останні дві рівності, з урахуванням того, що $\widehat{f}_+(k) = \widehat{f}(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ і $\widehat{f}_+(0) = \widehat{f}(0) - \sqrt{1-|a_0|^2}f(0)/2$, одержимо вираз

$$f(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)(\zeta) = \frac{2|B_n(\zeta)|}{1+|B_n(\zeta)|^2}\int\limits_{\mathbb{T}} f^*(w)\cos\left(\theta_{n,\zeta}(w)\right)\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}\,d\sigma(w) \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{D}, \tag{14}$$

де елементи матриці Λ^* визначаються правилом $\lambda^*_{k,n}(\zeta) = \alpha_{k,n}(\zeta)/(1+|B_n(\zeta)|^2)$.

З (14) випливає оцінка

$$\inf_{\Lambda\in\mathscr{L}}\sup_{f\in Uh_\infty}|f(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(\zeta)| \le \sup_{f\in Uh_\infty}|f(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)(\zeta)| \le$$

$$\le \frac{2|B_n(\zeta)|}{1+|B_n(\zeta)|^2}\int\limits_{\mathbb{T}} \left|\cos\left(\theta_{n,\zeta}(w)\right)\right|\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2}d\sigma(w). \tag{15}$$

Візьмемо функцію

$$f_{1,\zeta}(z) = \frac{2}{\pi} \arg \frac{1 + iB_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}{1 - iB_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2|B_n(z)|\cos(\theta_{n,\zeta}(z))}{1 - |B_n(z)|^2}.$$

Легко бачити, що $\|f_{1,\zeta}\|_{h_\infty} \le 1$ і

$$f_{1,\zeta}(\zeta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2|B_n(\zeta)|}{1 - |B_n(\zeta)|^2} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |B_n(\zeta)|.$$

Для радіальних граничних значень функції $f_{1,\zeta}$ для майже всіх $w \in \mathbb{T}$ маємо вираз

$$f^*_{1,\zeta}(w) = \lim_{\varrho \to 1} f_{1,\zeta}(\varrho w) = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & \cos(\theta_{n,\zeta}(w)) > 0 \\ 0, & \cos(\theta_{n,\zeta}(w)) = 0 \\ -1, & \cos(\theta_{n,\zeta}(w)) < 0 \end{array} \right\} = \operatorname{sign}\left(\cos(\theta_{n,\zeta}(w))\right).$$

Розглянемо функцію

$$F_{1,\zeta}(z) := \frac{2}{\pi} \ln \frac{1 + iB_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}{1 - iB_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}.$$

Зрозуміло, що $f_{1,\zeta} = \operatorname{Im} F_{1,\zeta}$ (тут $f_{1,\zeta}$ розглядається як головне значення логарифма). Оскільки $f_{1,\zeta} \in h_2$, то і $\widetilde{f_{1,\zeta}} = \operatorname{Re} F_{1,\zeta} \in h_2$. Отже, функція $F_{1,\zeta}$ належить H_2 і тому її можна розкласти в ряд Фур'є за системою φ. Оскільки функція $F_{1,\zeta}$ має n нулів у крузі $\mathbb{D}$ і вони збігаються з нулями добутку Бляшке B_n, то перші n коефіцієнтів Фур'є функції $F_{1,\zeta}$ за системою φ дорівнюють нулеві (див. доведення леми): $\widehat{F_{1,\zeta}}(k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Такі міркування приводять до висновку, що $\widehat{f_{1,\zeta}}(k) = \operatorname{Im} \widehat{F_{1,\zeta}}(k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Отже, $U_{n,\Lambda,\varphi}(f_{1,\zeta}) = 0$, якою б не була матриця Λ. Тому

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |B_n(\zeta)| = |f_{1,\zeta}(\zeta)| = \inf_{\Lambda \in \mathscr{L}} |f_{1,\zeta}(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(f_{1,\zeta})(\zeta)| = f_{1,\zeta}(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f_{1,\zeta})(\zeta) =$$

$$= \frac{2|B_n(\zeta)|}{1 + |B_n(\zeta)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} |\cos(\theta_{n,\zeta}(w))| \, \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w). \tag{16}$$

Об'єднуючи співвідношення (15) і (16), отримуємо рівність (4).

Розглянемо тепер спряжену функцію $\widetilde{f}$. Віднявши від рівності (13) рівність (12), знаходимо формули

$$f_+(\zeta) - \frac{T_n(f_+)(\zeta)}{1 - |B_n(\zeta)|^2} = \frac{2i|B_n(\zeta)|}{1 - |B_n(\zeta)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} f_+(w) \sin(\theta_{n,\zeta}(w)) \, \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w),$$

$$\overline{f_+(\zeta)} - \frac{\overline{T_n(f_+)(\zeta)}}{1 - |B_n(\zeta)|^2} = \frac{-2i|B_n(\zeta)|}{1 - |B_n(\zeta)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} \overline{f_+(w)} \sin(\theta_{n,\zeta}(w)) \, \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w),$$

з яких випливає вираз

$$\widetilde{f}(\zeta) - U_{n,\Lambda^{**},\varphi}(\widetilde{f})(\zeta) = \frac{2|B_n(\zeta)|}{1-|B_n(\zeta)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} f^*(w) \sin(\theta_{n,\zeta}(w)) \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w) \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{D}, \tag{17}$$

де елементи матриці Λ^* визначаються правилом $\lambda^{**}_{k,n}(\zeta) = \alpha_{k,n}(\zeta)/(1-|B_n(\zeta)|^2)$.

Отже,

$$\inf_{\Lambda\in\mathscr{L}} \sup_{f\in\overline{Uh}_\infty} |f(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(\zeta)| \le \sup_{f\in Uh_\infty} \left|\widetilde{f}(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(\widetilde{f})(\zeta)\right| \le$$

$$\le \frac{2|B_n(\zeta)|}{1-|B_n(\zeta)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} |\sin(\theta_{n,\zeta}(w))| \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w). \tag{18}$$

Для радіальних граничних значень функції

$$f_{2,\zeta}(z) = \frac{2}{\pi} \arg \frac{1+B_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}{1-B_n(z)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}$$

майже скрізь на $\mathbb{T}$ маємо вираз

$$f^*_{2,\zeta}(w) = \lim_{\varrho\to1} f_{2,\zeta}(\varrho w) = \lim_{\varrho\to1} \frac{2}{\pi} \arg \frac{1+B_n(\varrho w)\exp(-i\arg B_n(\zeta))}{1-B_n(\varrho w)\exp(-i\arg B_n(\zeta))} =$$

$$= \lim_{\varrho\to1} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2|B_n(\varrho w)|\sin(\theta_{n,\zeta}(w))}{1-|B_n(\varrho w)|^2} = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & \sin(\theta_{n,\zeta}(w)) > 0 \\ 0, & \sin(\theta_{n,\zeta}(w)) = 0 \\ -1, & \sin(\theta_{n,\zeta}(w)) < 0 \end{array} \right\} = \operatorname{sign}(\sin(\theta_{n,\zeta}(w))).$$

Отже, аналогічно до попереднього знаходимо

$$\frac{2}{\pi} \ln \frac{1+|B_n(\zeta)|}{1-|B_n(\zeta)|} = |\widetilde{f}_{2,\zeta}(\zeta)| = \inf_{\Lambda\in\mathscr{L}} |\widetilde{f}_{2,\zeta}(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(\widetilde{f}_{2,\zeta})(\zeta)| = \widetilde{f}_{2,\zeta}(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(\widetilde{f}_{2,\zeta})(\zeta) =$$

$$= \frac{2|B_n(\zeta)|}{1-|B_n(\zeta)|^2} \int\limits_{\mathbb{T}} |\sin(\theta_{n,\zeta}(w))| \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\overline{w}\zeta|^2} d\sigma(w). \tag{19}$$

Об'єднуючи співвідношення (18) і (19), отримуємо рівність (5).

1. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 508 с.
2. *Джрбашян М. М.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. — 1967. — **2**, № 1. — С. 3–51.
3. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. — 1938. — **18**, № 4–5. — С. 245–249.
4. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall // Ber. math.-phys. Kl. Acad. Wiss. Leipzig. — 1938. — **90**. — S. 103–134.

5. *Koebe P.* Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie // Math. Z. — 1920. — **6**. — S. 52–84.

6. *Тиман А. Ф., Трофимов В. Н.* Разностные неравенства для гармонических в круге функций // Докл. АН СССР. — 1967. — **173**, № 4. — С. 777–780.

7. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 623 с.

Одержано 11.09.07