УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We find new properties of solutions of the differential-functional equation $x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + cx'(t-r) + px(qt) + hx'(qt)$ *in a neighbourhood of the singular point* $t = +\infty$.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння $x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + cx'(t-r) + px(qt) + hx'(qt)$ *в околі особливої точки* $t = +\infty$.

В данной работе рассматривается уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + cx'(t-r) + px(qt) + hx'(qt), \tag{1}$$

где $\{a, b, c, p, h\} \subset \mathbb{R}$, $r > 0$, $0 < q < 1$, которое было предметом исследований многих математиков (см. работы [1–14] и приведенную в них библиографию). При этом особое внимание уделялось изучению вопросов существования различного рода решений таких уравнений и исследованию их свойств. В частности, при исследовании асимптотических свойств решений уравнения (1) в [12] доказана следующая теорема (все обозначения, используемые в этой статье, взяты также из [12]).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) $\alpha_0 < 0$;

2) параметры $\alpha, \nu \in \mathbb{R}$ *и* $j \in N \cup \{0\}$ *удовлетворяют неравенствам* $\alpha_0 < \alpha < 0$,

$$\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln \left| \frac{p}{a+b} \right| < \nu, \quad \left(\left| \frac{h}{q} \right| + |p| \frac{k_1(\alpha)}{|\alpha|} + \left| \frac{h}{q} \right| k_2(\alpha) \frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r} - 1} \right) q^{\nu + j} < 1$$

и

$$|c| + |h| q^{\nu + j} < 1;$$

3) $t_0 > \dfrac{r}{1-q}$.

Тогда существует константа $K \geq 0$ *такая, что для* $j+1$ *раз непрерывно дифференцируемых решений* $x(t)$ *уравнения (1) имеет место оценка*

$$\max \left\{ |x(t)|, \left|x'(t)\right|, \ldots, \left|x^{(j+1)}(t)\right| \right\} \leq$$

$$\leq K \max \left\{ \sup_{s \in [qt_0, t_0]} |x(s)|, \sup_{s \in [qt_0, t_0]} \left|x'(s)\right|, \ldots, \sup_{s \in [qt_0, t_0]} \left|x^{(j+1)}(s)\right| \right\} t^{\nu}$$

при любом $t \in [qt_0, +\infty)$.

В настоящей статье продолжается исследование асимптотических свойств решений уравнения (1), начатое в [9]. Основным ее результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) $\alpha_0 < 0, p \neq 0$;

2) параметры $\alpha \in \mathbb{R}$ *и* $j \in N \cup \{0\}$ *удовлетворяют неравенствам* $\alpha_0 < \alpha < 0$,

$$\left(|h| + |pq|\frac{k_1(\alpha)}{|\alpha|} + |h|k_2(\alpha)\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r} - 1}\right)\left|\frac{a+b}{p}\right| q^j < 1$$

и

$$|c| + \left|\frac{h(a+b)}{p}\right| q^{j+1} < 1;$$

3) $t_0 > \dfrac{r}{1-q}$.

Тогда существует константа $l \geq 0$ *такая, что для* $j+2$ *раз непрерывно дифференцируемых решений* $x(t)$ *уравнения (1) имеет место оценка*

$$|x(t)| \leq l \max\left\{\sup_{s\in[qt_0,t_0]}|x(s)|, \sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x'(s)\right|, \ldots, \sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x^{(j+2)}(s)\right|\right\} t^{\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left|\frac{p}{a+b}\right|}$$

при любом $t \in [qt_0, +\infty)$.

Доказательство. Выполнив замену переменных $x(t) = t^\nu y(t)$ при $t \geq qt_0$, получим уравнение

$$y'(t) = ay(t) + by(t-r) + cy'(t-r) + pq^\nu y(qt) + g(t), \tag{2}$$

где

$$g(t) = -\frac{\nu}{t}y(t) + \left(b\left(\left(1-\frac{r}{t}\right)^\nu - 1\right) + c\nu\left(1-\frac{r}{t}\right)^{\nu-1}\frac{1}{t}\right)y(t-r) +$$

$$+ c\left(\left(1-\frac{r}{t}\right)^\nu - 1\right)y'(t-r) + h\nu q^{\nu-1}\frac{1}{t}y(qt) + hq^\nu y'(qt).$$

Поскольку при достаточно больших t имеет место соотношение

$$\left(1-\frac{r}{t}\right)^\nu - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} C_\nu^n\left(-\frac{r}{t}\right)^n = -\frac{r}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} C_\nu^n\left(-\frac{r}{t}\right)^{n-1}, \quad \left|\frac{r}{t}\right| < 1,$$

где $C_\nu^n = \dfrac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-n+1)}{n!}$, $n \geq 1$, то слагаемые выражения $g(t)$ являются величинами порядка $\dfrac{1}{t}y(t)$ и $y'(t)$. Следовательно, доказав ограниченность этих функций при некотором ν, мы докажем ограниченность функции $g(t)$. В силу теоремы 1 для

$$\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left|\frac{p}{a+b}\right| - 1 < \nu < \frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left|\frac{p}{a+b}\right| \tag{3}$$

при достаточной гладкости решения функции $t^{-\nu}x'(t)$ и $t^{-\nu-1}x(t)$ ограничены в окрестности точки $t=+\infty$. Для доказательства следует, очевидно, лишь последовательно применить это утверждение к уравнению (1) и

$$x''(t)=ax'(t)+bx'(t-r)+cx''(t-r)+pqx'(qt)+hqx''(qt).$$

Иными словами, для некоторого параметра $\nu\in\mathbb{R}$, удовлетворяющего неравенству (3), и для параметра $j\in N\cup\{0\}$ из второго условия теоремы $j+2$ раза непрерывно дифференцируемые решения $x(t)$ уравнения (1) удовлетворяют оценкам

$$|x(t)|\le K\max\left\{\sup_{s\in[qt_0,t_0]}|x(s)|,\ \sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x'(s)\right|,\ldots,\ \sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x^{(j+1)}(s)\right|\right\}t^{\nu+1},$$

$$|x'(t)|\le K\max\left\{\sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x'(s)\right|,\ \sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x''(s)\right|,\ldots,\ \sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x^{(j+2)}(s)\right|\right\}t^{\nu}$$

при любом $t\in[qt_0,+\infty)$, где K — некоторая константа.

Из равенств $x(t)=t^{\nu}y(t)$ и $x'(t)=\nu t^{\nu-1}y(t)+t^{\nu}y'(t)$ следует ограниченность $\dfrac{1}{t}y(t)$ и $y'(t)$, а следовательно, и ограниченность $g(t)$.

Запишем уравнение (2) в интегральной форме

$$y(t)=-pq^{\nu}(a+b)^{-1}y(qt)+X(t-t_0)(y(t_0)-cy(t_0-r))+pq^{\nu}W(t-t_0)y(qt_0)+$$

$$+b\int\limits_{t_0-r}^{t_0}X(t-\theta-r)y(\theta)d\theta-c\int\limits_{t_0-r}^{t_0}y(\theta)dX(t-\theta-r)+pq^{\nu+1}\int\limits_{t_0}^{t}W(t-s)y'(qs)ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}X(t-s)g(s)ds=-pq^{\nu}(a+b)^{-1}y(qt)+F(t),\quad t\ge t_0.$$

Поскольку

$$|F(t)|\le L\max\left\{\sup_{s\in[qt_0,t_0]}|x(s)|,\ \sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x'(s)\right|,\ldots,\ \sup_{s\in[qt_0,t_0]}\left|x^{(j+2)}(s)\right|\right\}=M_1,\quad t\ge t_0,$$

где $L\ge 1$ — некоторая константа, то при $q^nt\in[qt_0,t_0)$ получаем

$$|y(t)|\le\left|pq^{\nu}(a+b)^{-1}\right||y(qt)|+M_1=d|y(qt)|+M_1\le d^2|y(q^2t)|+dM_1+M_1\le\ldots$$

$$\ldots\le d^n|y(q^nt)|+d^{n-1}M_1+\ldots+dM_1+M_1\le d^n\sup_{s\in[qt_0,t_0]}|y(s)|+\frac{d^n-1}{d-1}M_1\le$$

$$\le\frac{d^{n+1}-1}{d-1}\max\left\{q^{-\nu}t_0^{-\nu},t_0^{-\nu},1\right\}M_1=\frac{d^{n+1}-1}{d-1}M_2,$$

$$qt_0 \le q^n t \Rightarrow q^{-n} \le \frac{1}{qt_0} \Rightarrow n \le \frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left(\frac{t}{qt_0}\right).$$

Заметим, что согласно выбору ν имеем $d = \left|\dfrac{pq^{\nu}}{a+b}\right| > 1$, и тогда оценку $y(t)$ можно уточнить

$$|y(t)| \le d^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left(\frac{t}{qt_0}\right)} \frac{d}{d-1} M_2 = e^{\ln d \frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left(\frac{t}{qt_0}\right)} M_3 =$$

$$= e^{\ln d \frac{1}{\ln q^{-1}} \ln t} e^{\ln d \frac{1}{\ln q^{-1}} (-\ln qt_0)} M_3 =$$

$$= t^{\ln d \frac{1}{\ln q^{-1}}} M_4 = t^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\frac{p}{a+b}\right| - \nu} M_4.$$

Отсюда находим

$$|x(t)| = t^{\nu} |y(t)| \le t^{\frac{1}{\ln q^{-1}} \ln\left|\frac{p}{a+b}\right|} M_4, \quad t \ge t_0.$$

Теорема доказана.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891 – 937.
2. *De Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = \exp^{\alpha x + \beta} F(x-1)$. I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. Math. — 1953. —**15**. — P. 449 – 464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. — 1971. — **243**. — P. 249 – 254.
4. *Frederickson P. O.* Global solutions to certain nonlinear functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. — 1971. — **33**. — P. 355 – 358.
5. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 192 с.
6. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10. — С. 1483 – 1491.
7. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1973. — **9**, № 9. — С. 1627 – 1645.
8. *Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 1. — С. 24 – 28.
9. *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1993. — **29**, № 5. — С. 751 – 758.
10. *Гребенщиков Б. Г., Ложников А. Б.* Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывания // Там же. — 2004. — **40**, № 12. — С. 1587 – 1595.
11. *Гребенщиков Б. Г.* Об асимптотических свойствах некоторых систем с двумя запаздываниями // Изв. вузов. Математика. — 2006. — **528**, № 5. — С. 27 – 37.
12. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, № 1. — С. 144 – 160.
13. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**. — 267 p.
14. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

Получено 27.06.07