УДК 517.983

ОБОБЩЕНИЕ ЛЕММЫ ШМИДТА НА СЛУЧАЙ n (d)-НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Ф. Журавлев

Житомир. нац. агроэкол. ун-т
Украина, 10008, Житомир, бульв. Старый, 7
e-mail: vfz2008@ukr.net

We generalize the known Schmidt lemma to the case of a linear bounded normally solvable operator on an infinite dimensional Banach space that is n- or d-normal with the assumption that the kernel and the image of the operator have complements in the space.

Узагальнено відому лему Шмідта на випадок лінійних обмежених нормально розв'язних операторів у нескінченновимірних банахових просторах, які є n- або d-нормальними. Припускається, що ядро й образ оператора доповнювані в цих просторах.

Лемма Шмидта [1] наиболее полно изучена и широко применяется для обобщенного обращения линейных ограниченных нормально разрешимых операторов, являющихся фредгольмовыми (с ненулевыми ядрами), в виде так называемой конструкции Шмидта [2]. Ее аналог для нетеровых операторов в конечномерных банаховых и гильбертовых пространствах рассмотрен в [3].

Целью данной работы является доказательство утверждений, обобщающих лемму Шмидта на случай линейных ограниченных нормально разрешимых операторов, являющихся n- или d-нормальными и действующих в бесконечномерных банаховых пространствах.

Постановка задачи. Пусть L — линейный ограниченный нормально разрешимый оператор, действующий из банахового пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$. Обозначим через $\dim N(L) = \mu$ и $\dim N(L^*) = \nu$ размерности нуль-пространств оператора L и ему сопряженного L^* соответственно. По классификации С. Г. Крейна [4] нормально разрешимый оператор L является n-нормальным, если μ конечно, а ν бесконечно, и d-нормальным, если, наоборот, μ бесконечно, а ν конечно.

Если $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — линейный ограниченный n-нормальный оператор, то будем предполагать, что его образ $R(L)$ дополняем [5] в пространстве $\mathbf{B}_2$, т. е.

$$B_2 = Y \oplus R(L), \tag{1}$$

а если $L : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_2$ — линейный ограниченный d-нормальный оператор, то его ядро $N(L)$ дополняемо в пространстве $\mathbf{B}_1$, т. е.

$$B_1 = N(L) \oplus X. \tag{2}$$

Основной результат. Проведем все рассуждения сначала для n-нормальных операторов. Подпространство $N(L)$ вследствие конечномерности ($\mu < \infty$) имеет полную систему базисных элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\mu} \subset N(L)$, $f_i = \operatorname{col}(f_i^{(1)}, f_i^{(2)}, f_i^{(3)}, \ldots)$. Пусть пространство

$\mathbf{B}_2$ имеет базис. Известно [6, с. 131], что $\mathbf{B}_2^*$ также имеет базис. Следовательно, подпространство $N^*(L) \subset \mathbf{B}_2^*$ имеет полную систему базисных элементов (функционалов) $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty} \subset N(L^*)$, $\varphi_s(\cdot) = \operatorname{col}(\varphi_s^{(1)}(\cdot), \varphi_s^{(2)}(\cdot), \varphi_s^{(3)}(\cdot), \ldots)$. Для элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\mu}$ и функционалов $\{\varphi_s(\cdot)\}_{s=1}^{\infty}$ существуют сопряженно биортогональные [7] система функционалов $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^{\mu} \subset \mathbf{B}_1^*$, $\gamma_j(\cdot) = \operatorname{col}(\gamma_j^{(1)}(\cdot), \gamma_j^{(2)}(\cdot), \gamma_j^{(3)}(\cdot), \ldots)$ и полная система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{B}_2$, $\psi_k = \operatorname{col}(\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \psi_k^{(3)}, \ldots)$. Заметим, что каждый из функционалов $\{\gamma_j(\cdot)\}_{j=1}^{\mu}$, определенный на подпространстве $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ (по теореме Хана – Банаха), может быть продолжен, с сохранением нормы, на все пространство $\mathbf{B}_1$.

Обозначим через

$$X = (f_1, f_2, \ldots, f_\mu), \quad \Gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \ldots, \gamma_\mu(\cdot))^T$$
$$\Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_k(\cdot), \ldots)^T, \quad \Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k, \ldots) \tag{3}$$

соответственно $(\infty \times \mu)$-, $(\mu \times \infty)$-, $(\infty \times \infty)$- и $(\infty \times \infty)$-мерные матрицы, причем $\Gamma(X) = E_\mu$, $\Phi(\Psi) = E_\infty$, E_μ, E_∞ — единичные матрицы.

Оператор проектирования $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{B}_1 \to N(L)$ построим по формуле

$$\mathcal{P}_{N(L)}(\cdot) = X\Gamma(\cdot), \quad \mathcal{P}_{N(L)} : B_1 \to B_1.$$

Для построения оператора проектирования $\mathcal{P}_Y : B_2 \to B_2$ поступим следующим образом. Определим последовательность проекторов

$$\mathcal{P}_{Y(j)}(\cdot) = \Psi_j \Phi_j(\cdot) \tag{4}$$

пространства $\mathbf{B}_2$ на подпространства $Y_j \subset Y$, натянутые на элементы $\{\psi_k\}_{k=1}^{j}$.

Лемма 1. *Последовательность (4) проекторов $\mathcal{P}_{Y(j)}$ сильно (поточечно) сходится к проектору*

$$\mathcal{P}_Y(\cdot) = \Psi\Phi(\cdot) = \lim_{j \to \infty} \Psi_j \Phi_j(\cdot), \quad \mathcal{P}_Y : B_2 \to Y,$$

где $Y \subset \mathbf{B}_2$ — бесконечномерное пространство, натянутое на полную систему элементов $\{\psi_s\}_{s=1}^{\infty}$.

Доказательство. Согласно определению сильной сходимости по норме пространства $\mathbf{B}_2$, с учетом определения матриц Φ и Ψ имеем

$$\|\mathcal{P}_Y y - \mathcal{P}_{Y_j} y\| = \left\| \sum_{\xi=1}^{\infty} \varphi_\xi(y)\psi_\xi - \sum_{\xi=1}^{j} \varphi_\xi(y)\psi_\xi \right\| =$$
$$= \left\| \sum_{\xi=j+1}^{\infty} \varphi_\xi(y)\psi_\xi \right\| \le \sum_{\xi=j+1}^{\infty} \|\varphi_\xi(y)\psi_\xi\| \quad \forall y \in Y \subset \mathbf{B}_2.$$

Величина $\sum_{\xi=j+1}^{\infty} \|\varphi_\xi(y)\psi_\xi\|$ стремится к нулю при $j \to \infty$ как остаток сходящегося ряда $\sum_{\xi=1}^{\infty} \varphi_\xi(y)\psi_\xi$ разложения элемента $y \in Y$ по системе элементов $\{\psi_\xi\}_{\xi=1}^{\infty}$. А так как функционалы $\{\varphi_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ продолжаемы с сохранением нормы на все пространство $\mathbf{B}_2$, то $\sum_{\xi=j+1}^{\infty}\|\varphi_\xi(y)\psi_\xi\| \to 0$ при $j \to \infty$ для любого $y \in \mathbf{B}_2$.

Лемма доказана.

Покажем, что именно построенные проекторы разбивают пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ на взаимно дополняющие подпространства по формулам (1), (2).

Лемма 2. *Операторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_Y$ являются ограниченными проекторами в банаховых пространствах $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ и разбивают их в прямые суммы замкнутых подпространств по формулам (1), (2).*

Доказательство. Прежде всего докажем, что операторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_Y$ являются проекторами, т. е. удовлетворяют условиям $\mathcal{P}_{N(L)}^2 = \mathcal{P}_{N(L)}$, $\mathcal{P}_Y^2 = \mathcal{P}_Y$, определяющим проекторы

$$\mathcal{P}_{N(L)}^2(\cdot) = \mathcal{P}_{N(L)}(\mathcal{P}_{N(L)}(\cdot)) = X\Gamma(X\Gamma(\cdot)) = X\Gamma(X)\Gamma(\cdot) = X\Gamma(\cdot) = \mathcal{P}_{N(L)}(\cdot),$$

так как $\Gamma(X) = E_\mu$, и

$$\mathcal{P}_Y^2(\cdot) = \mathcal{P}_Y(\mathcal{P}_Y(\cdot)) = \Psi\Phi(\Psi\Phi(\cdot)) = \Psi\Phi(\Psi)\Phi(\cdot) = \Psi\Phi(y\cdot) = \mathcal{P}_Y(\cdot),$$

так как $\Phi(\Psi) = E_\nu$.

Таким образом, проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_Y$ разбивают пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ в прямые топологические суммы замкнутых подпространств:

$$\mathbf{B}_1 = N(\mathcal{P}_{N(L)}) \oplus R(\mathcal{P}_{N(L)}), \quad \mathbf{B}_2 = N(\mathcal{P}_Y) \oplus R(\mathcal{P}_Y).$$

Далее покажем, что

$$\begin{gathered} N(L) = R(\mathcal{P}_{N(L)}), \quad R(L) = N(\mathcal{P}_Y), \\ Y = R(\mathcal{P}_Y), \quad X = N(\mathcal{P}_{N(L)}). \end{gathered} \tag{5}$$

Поскольку $L\mathcal{P}_{N(L)}x = LX\Gamma(x) = 0$, $x \in \mathbf{B}_1$ то $R(\mathcal{P}_{N(L)}) \subset N(L)$. Пусть $x \in N(L)$, тогда $x = Xc$. Применив к последнему равенству матрицу функционалов Γ, получим $c = \Gamma(x)$, т. е. $x = X\Gamma(x)$. Значит, $x = \mathcal{P}_{N(L)}x$ и $x \in R(\mathcal{P}_{N(L)})$. Таким образом, $N(L) \subset \subset R(\mathcal{P}_{N(L)})$ и первое равенство из (5) доказано.

Поскольку $\mathcal{P}_Y Lx = \Psi\Phi(Lz) = \Psi(L^*\Phi)(z) = 0$ (φ_s — базисные векторы нуль-пространства оператора L^*), то $R(L) \subset N(\mathcal{P}_Y)$. С другой стороны, если $y \in N(\mathcal{P}_Y)$, то

$$\mathcal{P}_Y y = \Psi\Phi(y) = 0,$$

т. е. $\varphi_s(y) = 0$, $s = 1, 2, \ldots, \infty$. А это в силу нормальной разрешимости оператора L означает, что $y \in R(L)$. Значит, $N(\mathcal{P}_Y) \subset R(L)$ и доказательство второго равенства из (5) завершено.

Третье и четвертое равенства из (5) доказываются аналогично.

Таким образом, проекторы $\mathcal{P}_{N(L)}$ и $\mathcal{P}_Y$ разбивают банаховы пространства B_1 и B_2 в прямые суммы замкнутых подпространств по формулам (1), (2).

Ограниченность проектора $\mathcal{P}_{N(L)}$ следует из его конечномерности, а проектора $\mathcal{P}_Y$ — из дополняемости образа $R(L)$ оператора L [8].

Лемма доказана.

Поскольку системы базисных элементов $\{\varphi(\cdot)_s\}_{s=1}^{\nu} \subset B_2^*$ нуль-пространства $N(L^*)$ и элементов $\{\psi_s\}_{s=1}^{\nu} \subset Y \subset B_2$ сопряженно биортогональны $\varphi_s(\psi_k) = \delta_{sk}$, между ними существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, подпространства $N(L^*)$ и Y изоморфны и имеют одинаковые размерности, $\dim N(L^*) = \dim Y$. Вследствие того, что μ конечно, а ν бесконечно, можно установить изоморфизм между $N(L)$ и некоторым подпространством $Y_1 \subset Y$.

Построим этот изоморфизм.

Обозначим через

$$\overline{\Phi}(\cdot) = (\overline{\varphi}_1(\cdot), \overline{\varphi}_2(\cdot), \ldots, \overline{\varphi}_\mu(\cdot))^T \quad \text{и} \quad \overline{\Psi} = (\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_\mu) \tag{6}$$

соответственно $(\mu \times \infty)$- и $(\infty \times \mu)$-мерные матрицы, составленные из μ строк и столбцов матриц Φ и Ψ соответственно. Матрица $\overline{\Psi}$ составлена из системы элементов $\{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^{\nu} \subset \subset \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, на которую натянуто подпространство Y_1, а матрица $\overline{\Phi}$ — из функционалов $\{\overline{\varphi}_s\}_{s=1}^{\nu} \subset \{\varphi_s\}_{s=1}^{\infty}$, которые удовлетворяют соотношению $\overline{\Phi}(\overline{\Psi}) = E_\mu$. Линейный ограниченный обратимый оператор $J : N(L) \to Y_1 \subseteq Y$, осуществляющий изоморфизм $N(L)$ на Y_1, и ему обратный $J^{-1} : Y_1 \to N\,(L)$ построим по формулам

$$J(\cdot) = \overline{\Psi}\,\Gamma(\cdot), \quad (\cdot) \in N(L),$$

$$J^{-1}(\cdot) = X\,\overline{\Phi}(\cdot), \quad (\cdot) \in Y_1.$$

По теореме Хана – Банаха каждый из линейных функционалов γ_i с сохранением нормы может быть продолжен на все пространство $\mathbf{B}_1$, а каждый из линейных функционалов $\overline{\varphi}_s$ — на все пространство $\mathbf{B}_2$. В связи с этим обозначим расширение оператора $J : N(L) \to Y$ на все пространство $\mathbf{B}_1$ через $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$, а расширение ему обратного J^{-1} на пространство $\mathbf{B}_2$ через $\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}$, т. е.

$$\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}(\cdot) = \overline{\Psi}\Gamma(\cdot), \quad (\cdot) \in B_1,$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{N(L)}(\cdot) = X\overline{\Phi}(\cdot), \quad (\cdot) \in B_2.$$

Использовав обозначения (6), проектирующий оператор $\mathcal{P}_{Y_1} : \mathbf{B}_2 \to Y_1 \subset Y$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_{Y_1}(\cdot) = \overline{\Psi}\,\overline{\Phi}(\cdot).$$

Этот оператор разбивает подпространство Y в прямую топологическую сумму подпространств

$$Y = Y_1 \oplus Y_2, \tag{7}$$

где $Y_2 = \mathcal{P}_{Y_2}\mathbf{B}_2 = (\mathcal{P}_Y - \mathcal{P}_{Y_1})\mathbf{B}_2$ и является ограниченным.

Для класса нормально разрешимых операторов, являющихся n-нормальными, докажем утверждение, аналогичное лемме Шмидта.

Лемма 3. *Пусть* $L : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ — *линейный ограниченный* n*-нормальный оператор, причем образ* $R(L)$ *дополняем в пространстве* $\mathbf{B_2}$. *Тогда оператор* $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ *имеет ограниченный левый обратный*

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})_l^{-1}.$$

Общий вид обратных слева операторов $\overline{L}_{l_0}^{-1}$ *определяется формулой*

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}).$$

Доказательство. Пусть L — n-нормальный оператор. Для обратимости слева оператора $\overline{L}$ необходимо и достаточно, чтобы [9]:

а) $\ker \overline{L} = \{0\}$;

б) линейное многообразие $R(\overline{L})$ являлось подпространством, имеющим прямое дополнение в $\mathbf{B_2}$.

Покажем, что $\ker \overline{L} = \{0\}$. Предположим, что существует $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbf{B_1}$, такое, что

$$(L + \overline{\mathcal{P}}_{Y_1})\, x_0 = Lx_0 + \overline{\Psi}\,\Gamma(x_0) = 0.$$

Очевидно, что $Lx_0 \in R(L)$, а из определения оператора $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}$ следует, что $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 \in Y_1 \subset \subset Y$. Но подпространства $R(L)$ и Y взаимно дополняют друг друга до всего пространства $\mathbf{B_2}$, следовательно, $R(L) \bigcap Y = \{0\}$, т. е. они имеют только один общий элемент — нулевой. Таким образом, $Lx_0 = 0$ и $\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}x_0 = 0$. Из этого следует, что $x_0 \in N(L)$ и $x_0 \in N(\overline{\mathcal{P}}_{Y_1}) \subset X$. Но подпространства $N(L)$ и X также взаимно дополняют друг друга до пространства $\mathbf{B_1}$, следовательно, $N(L) \bigcap X = \{0\}$. Отсюда следует, что $x_0 = 0$.

Дополняемость образа $R(\overline{L})$ в пространстве $\mathbf{B_2}$ следует из (7) и дополняемости подпространства $R(L)$

$$\mathbf{B_2} = R(L) \oplus Y_1 \oplus Y_2 = R(\overline{L}) \oplus Y_2. \tag{8}$$

Следовательно, оператор $\overline{L}$ имеет левый обратный оператор. Оператор $\overline{L}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие банахова пространства $\mathbf{B_1}$ на подпространство $\mathbf{B_2} \ominus Y_2$, тогда по теореме Банаха [10] оператор $\overline{L}_l^{-1}$ ограничен. Известно [9, с. 61], что если оператор проектирования $\mathcal{P}$ имеет свойство $R(\mathcal{P}) = R(\overline{L})$, то общий вид левых обратных операторов имеет представление $\overline{L}_{l_0}^{-1}\mathcal{P}$. Как следует из (8), такое свойство имеет оператор $I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}$, т. е. $R(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}) = R(\overline{L})$, значит, общее представление левых обратных операторов можно записать в виде

$$\overline{L}_{l_0}^{-1} = \overline{L}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{Y_2}).$$

Лемма доказана.

Замечания. 1. Если $\dim\ker L < \dim\ker L^* < \infty$, т. е. L — нетеров оператор отрицательного индекса, то лемма 3 переходит в лемму 2.4 [3, с. 47].

2. Если $\dim\ker L = \dim\ker L^* = n < \infty$, т. е. L — фредгольмов оператор ненулевого индекса, то лемма 3 переходит в лемму Шмидта [2, с. 340].

Пусть теперь $L : B_1 \to B_2$ — линейный ограниченный d-нормальный оператор. В этом случае подпространство $N(L)$ бесконечномерно ($\mu = \infty$), а подпространство $N(L^*)$ конечномерно ($\nu < \infty$). Пусть пространство $\mathbf{B}_1$ имеет базис. Следовательно, $N(L)$ также имеет базис. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset N(L)$ — полная система базисных элементов. Подпространство $N(L^*)$ имеет конечномерный базис $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu} \subset N(L^*)$. Для элементов $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и функционалов $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu}$ существуют сопряженно биортогональные [7] система функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbf{B}_1^*$ и полная система элементов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\nu} \subset \mathbf{B}_2$. Каждый из функционалов $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu}$, определенный на подпространстве $N(L) \subset \mathbf{B}_1$ и $Y \subset \mathbf{B}_2$ (по теореме Хана – Банаха), может быть продолжен, с сохранением нормы, на пространства $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ соответственно.

Аналогично (3) обозначим через

$$X = (f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots), \quad \Gamma(\cdot) = (\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot), \ldots, \gamma_s(\cdot), \ldots)^T,$$

$$\Phi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \ldots, \varphi_\nu(\cdot))^T, \quad \Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu)$$

соответственно $(\infty\times\infty)$-, $(\infty\times\infty)$-, $(\nu\times\infty)$- и $(\infty\times\nu)$-мерные матрицы, причем $\Gamma(X) = E_\infty$, $\Phi(\Psi) = E_\nu$, E_∞, E_ν — единичные матрицы.

Для построения оператора проектирования $\mathcal{P}_{N(L)} : B_1 \to N(L)$ определим последовательность проекторов

$$\mathcal{P}_{N^{(i)}(L)}(\cdot) = X_i\Gamma_i(\cdot), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

пространства B_1 на подпространства $N_i(L)$ нуль-пространства $N(L)$.

Лемма 4. *Последовательность (9) проекторов $\mathcal{P}_{N^{(i)}(L)}$ сильно (поточечно) сходится к проектору*

$$\mathcal{P}_{N(L)}(\cdot) = X\Gamma(\cdot) = \lim_{i\to\infty} X_i\Gamma_i(\cdot), \quad \mathcal{P}_{N(L)} : B_1 \to N(L). \tag{10}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Оператор проектирования $\mathcal{P}_Y : \mathbf{B}_2 \to Y$ пространства $\mathbf{B}_2$ на подпространство Y определим по формуле

$$\mathcal{P}_Y(\cdot) = \Psi\Phi(\cdot) \tag{11}$$

Для операторов проектирования (10) и (11) справедливы утверждения леммы 2.

Поскольку μ бесконечно, а ν конечно, можно установить изоморфизм между $N_1(L) \subset \subset N(L)$ и Y.

Построим этот изоморфизм. Обозначим через

$$\overline{X} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_\nu), \quad \overline{\Gamma}(\cdot) = (\overline{\gamma}_1(\cdot), \overline{\gamma}_2(\cdot), \ldots, \overline{\gamma}_\nu(\cdot))^T \tag{12}$$

соответственно $(\infty\times\nu)$- и $(\nu\times\infty)$-мерные матрицы. Тогда линейный ограниченный обратимый оператор $J : N_1(L) \to Y$, осуществляющий изоморфизм $N_1(L)$ на Y, и ему обратный $J^{-1} : Y \to N_1(L)$ построим по формулам

$$J(\cdot) = \Psi\,\overline{\Gamma}(\cdot), \quad (\cdot) \in N_1(L),$$

$$J^{-1}(\cdot) = \overline{X}\,\Phi(\cdot), \quad (\cdot) \in Y.$$

Матрица $\overline{X}$ составлена из ν столбцов матрицы X, а матрица $\overline{\Gamma}(\cdot)$ — из функционалов матрицы $\Gamma(\cdot)$, которые удовлетворяют соотношению $\overline{\Gamma}(\overline{X}) = E_\nu$.

Обозначим расширение оператора $J : N(L) \to Y$ на все пространство B_1 через $\overline{\mathcal{P}}_Y$, а расширение ему обратного J^{-1} на пространство B_2 — через $\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}$, т. е.

$$\overline{\mathcal{P}}_Y(\cdot) = \Psi\overline{\Gamma}(\cdot), \quad (\cdot) \in B_1,$$

$$\overline{\mathcal{P}}_{N_1(L)}(\cdot) = \overline{X}\Phi(\cdot), \quad (\cdot) \in B_2.$$

По аналогии с (11) проектирующий оператор $\mathcal{P}_{N_1(L)} : \mathbf{B}_1 \to N_1(L) \subset N(L)$ определим по формуле

$$\mathcal{P}_{N_1(L)}(\cdot) = \overline{X}\,\overline{\Gamma}(\cdot). \tag{13}$$

Этот оператор ограничен и разбивает подпространство $N(L)$ в прямую топологическую сумму подпространств

$$N(L) = N_1(L) \oplus N_2(L), \quad N_2(L) = \mathcal{P}_{N_2(L)}\mathbf{B}_1, \tag{14}$$

где $\mathcal{P}_{N_2(L)} = \mathcal{P}_{N(L)} - \mathcal{P}_{N_1(L)}$ — ограниченный проектор.

Для класса нормально разрешимых операторов, являющихся d-нормальными, докажем утверждение, аналогичное лемме Шмидта.

Лемма 5. *Пусть $L : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ — линейный ограниченный d-нормальный оператор, причем ядро $N(L)$ дополняемо в пространстве $\mathbf{B_1}$. Тогда оператор $\overline{L} = L + \overline{\mathcal{P}}_Y$ имеет ограниченный правый обратный*

$$\overline{L}_{r_0}^{-1} = (L + \overline{\mathcal{P}}_Y)_r^{-1}.$$

Общий вид обратных справа операторов $\overline{L}_{r_0}^{-1}$ определяется формулой

$$\overline{L}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{-1}.$$

Доказательство. Для обратимости справа оператора $\overline{L}$ необходимо и достаточно, чтобы [9]:

а) $R(\overline{L}) = \mathbf{B}_2$;

б) подпространство $N(\overline{L})$ имело прямое дополнение в $\mathbf{B_1}$.

Из второго равенства в (5) имеем $R(L) = N(\mathcal{P}_Y)$, т. е. условие $R(\overline{L}) = \mathbf{B}_2$ эквивалентно условию

$$\mathcal{P}_Y(\cdot) = \Psi\,\Phi(\cdot) = 0.$$

Поскольку система элементов $\{\psi_s\}_{s=1}^{\nu}$ линейно независима, то последнее соотношение будет иметь место тогда и только тогда, когда все $\{\varphi_s\}_{s=1}^{\nu} = 0$. А это, в свою очередь, означает, что нуль-пространство сопряженного оператора является нулевым, т. е. $N(L^*) = \{0\}$.

Покажем, что $N(\overline{L}^{\,*}) = \{0\}$. Пусть существует функционал $\varphi_0, \varphi_0 \neq 0, \varphi \in \mathbf{B}_2^*$ такой, что $\overline{L}^{\,*}\varphi_0 = (L + \overline{\mathcal{P}}_Y)^*\varphi_0 = 0$. С учетом определения оператора $\overline{\mathcal{P}}_Y$ имеем

$$L^*\varphi_0 = -\overline{\mathcal{P}}_Y^{\,*}\varphi_0.$$

Применив функционалы $L^*\varphi_0 \in \mathbf{B}_1^*$ и $\overline{\mathcal{P}}_Y^{\,*}$ к матрице X, получим: с одной стороны,

$$(L^*\varphi_0)(X) = \varphi_0(LX) = 0,$$

так как $LX = 0$, а с другой —

$$\overline{\mathcal{P}}_Y^{\,*}\varphi_0(X) = \varphi_0(\overline{\mathcal{P}}_Y X) = \varphi_0(\Psi)\overline{\Gamma}(X) = \varphi_0(\Psi),$$

поскольку $\overline{\Gamma}(X) = \delta_{ij}$. Так как система элементов $\{\psi_i\}_{i=1}^{\nu}$ линейно независима, равенство $\varphi_0(\Psi) = 0$ возможно только при $\varphi_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $N(\overline{L}^{\,*}) = \{0\}$, а это, в свою очередь, означает, что $R(\overline{L}) = \mathbf{B}_2$.

Дополняемость нуль-пространства $N(\overline{L})$ следует из определения проектора $\mathcal{P}_{N_1(L)}$ (13) и разбиения (14) нуль-пространства $N(L)$ оператора L.

Известно [9, с. 62], что если оператор проектирования $\mathcal{P}$ имеет свойство $N(\mathcal{P}) = N(\overline{L})$, то общий вид правых обратных операторов имеет представление $\mathcal{P}\,\overline{L}_{r_0}^{\,-1}$. Как следует из (14), такое свойство имеет оператор $I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}$, т. е. $N(I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)}) = N(\overline{L})$, значит, общее представление левых обратных операторов можно записать в виде

$$\overline{L}_{r_0}^{\,-1} = (I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N_2(L)})\overline{L}_r^{\,-1}.$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Если $\dim\ker L^* < \dim\ker L < \infty$, т. е. L — нетеров оператор положительного индекса, то лемма 5 переходит в лемму 2.4 [3, с. 47].

1. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teil 3. Uber die Auflosungen der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Losungen // Math. Ann. — 1908. — № 65.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 527 с.
3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
4. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
6. *Люстерник Л. А.,Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.
7. *Гринблюм М. М.* Биортогональные системы в пространстве Банаха // Докл. АН СССР. — 1945. — **47**, № 2. — С. 79 – 82.
8. *Кадец М. И., Митягин Б. С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. — 1973. — **28**, вып. 6. — С. 77 – 94.
9. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.
10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 495 с.

Получено 06.04.09