УДК 517.9

НАБЛИЖЕНИЙ ОБМЕЖЕНИЙ СИНТЕЗ ДЛЯ ОДНІЄЇ СЛАБКОНЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ*

О. В. Капустян, О. А. Капустян, А. В. Сукретна

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We construct and substantiate an approximate control in a feedback form for an approximate bounded synthesis problem, with a semi-definite quality criterion, for a parabolic equation containing a nonlinear term that regularly depends on a small parameter.

Для задачи приближенного ограниченного синтеза для параболического уравнения с полуопределенным критерием качества, где уравнение содержит нелинейное слагаемое, регулярно зависящее от малого параметра, построено и обосновано приближенное управление в форме обратной связи.

В теорії оптимального керування існують дві форми оптимального керування: програмне керування, тобто керування, що залежить лише від часу і початкових умов, та синтезоване, або керування за принципом зворотного зв'язку, тобто керування, яке у поточний момент часу залежить від значення фазової змінної в даний момент часу. Зрозуміло, що така форма керування має певні переваги у порівнянні з програмною, оскільки дає змогу врахувати можливі відхилення поведінки системи від наперед заданого закону, що зумовлені, наприклад, зовнішніми збуреннями або неточністю виміру початкових даних. Таким чином, керування у формі зворотного зв'язку дозволяє здійснювати більш гнучке управління системою, враховуючи її поточне положення.

Однак, незважаючи на актуальність і важливість, задача побудови оптимального обмеженого синтезу для нескінченновимірних систем ще далека від свого остаточного розв'язання. Виділимо наступні напрямки досліджень у цій галузі.

Ж.-Л. Ліонсом [1] за допомогою методу варіаційних нерівностей фактично було створено теорію оптимального керування лінійними системами з квадратичним функціоналом. Разом зі строгістю цей метод виявився достатньо гнучким при врахуванні обмежень і побудові різноманітних апроксимуючих методів. Узагальненню цих методів на нелінійні системи присвячено монографію [2]. На жаль, використаний у цих роботах підхід хоч і дозволяє виписувати ефективні необхідні умови оптимальності, що можуть бути основою різноманітних (в тому числі й наближених) методів побудови оптимальних керувань, але, як правило, не дозволяє отримати оптимальні керування у замкненій формі навіть для лінійних систем.

У класичних монографіях [3, 4] метод динамічного програмування Р. Беллмана було поширено на системи з розподіленими параметрами, при цьому виникала потреба в дослідженні інтегро-диференціальної крайової задачі типу Ріккаті. Проте для кожної конкретної задачі оптимального керування розподіленою системою згадана крайова задача типу Ріккаті має певні властивості, використовуючи які, іноді вдається побудува-

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України.

ти її розв'язок. Подібні дослідження для параболічного рівняння з післядією проведені В. О. Капустяном [5], задачі оптимальної стабілізації систем, що описуються параболічними рівняннями, розглянуто у роботах [6–11]. Крім того, в роботах [10, 11] наведено кілька прикладів побудови синтезу задач оптимального керування хвильовими процесами. Різноманітні задачі оптимального керування, в яких системи описуються гіперболічними рівняннями і немає обмежень на керування, детально розглянуто в роботах [12, 13]. В усіх цих роботах істотною є лінійність задачі та відсутність обмежень на керування.

У даній роботі для задачі оптимального керування параболічним рівнянням з напіввизначеним критерієм якості, де рівняння містить нелінійний доданок, що регулярно залежить від малого параметра, запропоновано й обґрунтовано наближене керування у формі зворотного зв'язку, побудоване на базі оптимального синтезу для відповідної лінійної задачі.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою межею. Для $\varepsilon \in (0,1)$ у циліндрі $\bar{Q}_T = [0,T] \times \bar{\Omega}$ розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{aligned} &y_t^\varepsilon(x,t) = \Delta y^\varepsilon(x,t) - \varepsilon f(y^\varepsilon(x,t)) + g(x)v(t), \quad (t,x) \in Q_T, \\ &y^\varepsilon(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T], \\ &y^\varepsilon(x,0) = y_0^\varepsilon(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L_2([0,T]) : |v(t)| \le \xi \quad \text{майже скрізь на} \quad [0;T]\}, \tag{2}$$

$$J^\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega q(x) y^\varepsilon(x,T)dx \right)^2 + \gamma \int_0^T v^2(t)dt \to \inf, \tag{3}$$

де g, y_0^ε, $q \in L_2(\Omega)$, $\gamma > 0$, ε — малий параметр.

Нехай $f \in C(\mathbb{R})$ і знайдуться такі сталі $C_1, C_2 > 0$, $\alpha > 0$ та $p \ge 2$, що для всіх $y \in \mathbb{R}$ справджуються оцінки

$$|f(y)| \le C_1 \left(1 + |y|^{p-1}\right), \quad yf(y) \ge \alpha |y|^p - C_2.$$

Тоді [14] для кожного значення параметра $\varepsilon \in (0,1)$, довільного керування $v(\cdot) \in U$ і початкової функції $y_0^\varepsilon \in L_2(\Omega)$ крайова задача (1) має розв'язок $y^\varepsilon = y^\varepsilon(x,y)$, до того ж

$$y^\varepsilon \in W^T = L_2([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L_p([0,T]; L_p(\Omega)) \cap C([0,T]; L_2(\Omega)).$$

Лема. *Для довільного* $\varepsilon \in (0,1)$ *задача оптимального керування (1)–(3) має розв'язок.*

Доведення. Нехай $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset U$ — мінімізуюча послідовність, $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset U$ — відповідні розв'язки крайової задачі (1). Тоді $d = \inf\limits_{v \in U} J(v) = \lim\limits_{n\to\infty} J(v_n)$, а тому послідовність

$\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ обмежена в $L_2([0,T])$. Отже, з точністю до підпослідовності, $v_n \to \widetilde{v},\ n \to \infty$ слабко в $L_2([0,T])$ і $\widetilde{v} \in U$.

Тоді маємо наступні збіжності при $n \to \infty$ по деякій підпослідовності [14]:

$$\begin{aligned}
&y_n \to \widetilde{y} \quad \text{слабко в} \quad L_2([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap L_p([0,T];L_p(\Omega)),\\
&y_n \to \widetilde{y} \quad \text{сильно в} \quad L_2([0,T];L_2(\Omega)),\\
&y_n(t) \to \widetilde{y}(t) \quad \text{сильно в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{для довільного} \quad t \in [\delta,T], \quad \text{де} \quad 0<\delta<T,\\
&y_n(t) \to \widetilde{y}(t) \quad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{для довільного} \quad t \in [0,T],\\
&y_n(x,t) \to \widetilde{y}(x,t) \quad \text{майже скрізь в} \quad Q_T,
\end{aligned}$$

де $\widetilde{y}(x,t)$ — розв'язок крайової задачі (1) з керуванням $\widetilde{v}$.

Звідси, використовуючи слабку напівнеперервність знизу квадрата норми, отримуємо

$$\varliminf_{n\to\infty} J(v_n) = \varliminf_{n\to\infty}\left((q,y_n(T))^2 + \gamma\int_0^T v_n^2(t)dt\right) \geq$$

$$\geq (q,\widetilde{y}(T))^2 + \gamma\varliminf_{n\to\infty}\int_0^T v_n^2(t)dt \geq (q,\widetilde{y}(T))^2 + \gamma\int_0^T \widetilde{v}^2(t)dt = J(\widetilde{v})$$

(тут і далі $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $L_2(\Omega)$), але

$$\varliminf_{n\to\infty} J(v_n) = \lim_{n\to\infty} J(v_n) = \inf_{v\in U} J(v) = d,$$

тому $\widetilde{v}$ — оптимальне керування.

Лему доведено.

Таким чином, для кожного $\varepsilon \in (0,1)$ задача оптимального керування (1)–(3) має розв'язок $\widehat{v}^{\varepsilon}(t)$ і відповідну оптимальну траєкторію $\widehat{y}^{\varepsilon}(x,t)$.

Нехай $y_0^{\varepsilon} \to y_0$ слабко в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Тоді має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\{\widehat{v}^{\varepsilon},\widehat{y}^{\varepsilon}\}$ — деякий оптимальний процес задачі оптимального керування (1)–(3) при $\varepsilon \in (0,1)$. Тоді маємо наступні збіжності при $\varepsilon \to 0$:*

$$\begin{aligned}
&J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \to J(\widehat{v}),\\
&\widehat{y}^{\varepsilon} \to \widehat{y} \quad \text{в} \quad C([\delta,T];L_2(\Omega)) \quad \forall\,\delta>0,\\
&\widehat{v}^{\varepsilon} \to \widehat{v} \quad \text{в} \quad L_2([0,T]),
\end{aligned}$$

де $\{\widehat{v},\widehat{y}\}$ — оптимальний процес задачі оптимального керування (1)–(3) при $\varepsilon = 0$.

Доведення. Нехай $\{\widehat{v}^{\varepsilon},\widehat{y}^{\varepsilon}\}$ — деякий оптимальний процес задачі оптимального керування (1)–(3). Тоді з (1) неважко отримати оцінку для $\widehat{y}^{\varepsilon}$ (тут і далі $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$)

$$\|\widehat{y}^{\varepsilon}(t)\|^2 + \int_0^t \|\widehat{y}^{\varepsilon}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}ds + 2\varepsilon\alpha\int_0^t \|\widehat{y}^{\varepsilon}(s)\|^p_{L_p(\Omega)}ds \leq$$

$$\leq \|\widehat{y}^{\varepsilon}(0)\|^2 + C_3\int_0^t (\|g\|^2|\widehat{v}^{\varepsilon}(s)|+1)ds. \qquad (4)$$

Таким чином,

$$\begin{array}{l} \{\widehat{y}^{\varepsilon}\} \quad \text{обмежена в} \quad L_2([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap L_\infty([0,T];L_2(\Omega)), \\ \left\{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\,\widehat{y}^{\varepsilon}\right\} \quad \text{обмежена в} \quad L_p([0,T];L_p(\Omega)), \end{array} \tag{5}$$

але тоді для $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

$$\left\{\varepsilon^{\frac{1}{q}}\, f(\widehat{y}^{\varepsilon})\right\} \quad \text{обмежена в} \quad L_q([0,T];L_q(\Omega))$$

і, отже,

$$\{\widehat{y}_t^{\varepsilon}\} \quad \text{обмежена в} \quad L_2([0,T];H^{-1}(\Omega)) + L_q([0,T];L_q(\Omega)) \subset L_q([0,T];H^{-s}(\Omega)),$$

де $s \geq \max\left\{1, \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right)n\right\}$.

Тепер за лемою про компактність по підпослідовності при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{array}{l} \widehat{y}^{\varepsilon} \to \widehat{y} \quad \text{слабко в} \quad L_2([0,T];H_0^1(\Omega)), \\ \widehat{y}^{\varepsilon} \to \widehat{y} \quad \text{сильно в} \quad L_2([0,T];L_2(\Omega)), \\ \widehat{y}^{\varepsilon}(t) \to \widehat{y}(t) \quad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega) \quad \text{при кожному} \quad t \in [0,T]. \end{array} \tag{6}$$

Звідси $\widehat{y}^{\varepsilon}(x,t) \to \widehat{y}(x,t)$ майже скрізь в Q_T, а тому і $f(\widehat{y}^{\varepsilon}(x,t)) \to f(\widehat{y}(x,t))$ майже скрізь.

Нам потрібно перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ у співвідношенні

$$-\int_0^T (\widehat{y}^{\varepsilon}, w)\eta_t dt + \int_0^T (\widehat{y}^{\varepsilon}, w)_{H_0^1(\Omega)}\eta dt + \varepsilon \int_0^T (f(\widehat{y}^{\varepsilon}), w)\eta dt - \int_0^T (g\widehat{v}^{\varepsilon}, w)\eta dt = 0 \tag{7}$$

при фіксованих $w \in H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)$ і $\eta \in C_0^{\infty}([0,T])$.

Оскільки $\{\widehat{v}^{\varepsilon}\} \subset U$, то $\widehat{v}^{\varepsilon} \to \widehat{v}$ слабко в $L_2([0,T])$, крім того,

$$\varepsilon \int_0^T (f(\widehat{y}^{\varepsilon}), w)\eta dt \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}} \|\varepsilon^{\frac{1}{q}} f(\widehat{y}^{\varepsilon})\|_{L_q([0,T];L_q(\Omega))} \|w\eta\|_{L_p([0,T];L_p(\Omega))} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отже, після переходу до границі в (7) отримуємо, що $\widehat{y}(x,t)$ — розв'язок крайової задачі

$$\begin{gathered} y_t(x,t) = \Delta y(x,t) + g(x)v(t), \quad (t,x) \in Q_T, \\ y(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \\ y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \end{gathered} \tag{8}$$

При цьому для $J(\widehat{v}^{\varepsilon})$ маємо

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) = \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left((q, \widehat{y}^{\varepsilon}(T))^2 + \gamma \int\limits_0^T (\widehat{v}^{\varepsilon}(t))^2 \, dt \right) \geq$$

$$\geq \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} (q, \widehat{y}^{\varepsilon}(T))^2 + \gamma \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_0^T (\widehat{v}^{\varepsilon}(t))^2 \, dt = (q, \widehat{y}(T))^2 + \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \gamma \int\limits_0^T (\widehat{v}^{\varepsilon}(t))^2 \, dt \geq$$

$$\geq (q, \widehat{y}(T))^2 + \gamma \int\limits_0^T \widehat{v}^{\,2}(t) dt = J(\widehat{v}).$$

З іншого боку, оскільки $\{\widehat{v}^{\varepsilon}, \widehat{y}^{\varepsilon}\}$ — оптимальний процес в (1) – (3), то для довільного керування $v \in U$ і будь-якого розв'язку y^{ε} крайової задачі (1) з цим керуванням маємо

$$J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \leq (q, y^{\varepsilon}(T))^2 + \gamma \int\limits_0^T v^2(t) dt.$$

Повторюючи попередні міркування, переконуємось, що $y^{\varepsilon} \to y$ в сенсі збіжностей (6), де y — розв'язок задачі (8) з керуванням v. Отже,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \leq (q, y(T))^2 + \gamma \int\limits_0^T v^2(t) dt = J(v).$$

Таким чином,

$$J(\widehat{v}) \leq \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \leq J(v).$$

Звідси $J(\widehat{v}) \leq J(v)$ для всіх керувань $v \in U$, отже, $\{\widehat{v}, \widehat{y}\}$ — оптимальний процес в (1) – (3) при $\varepsilon = 0$.

Крім того, при $v = \widehat{v}$ з попередніх міркувань маємо

$$J(\widehat{v}) \leq \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) \leq J(\widehat{v}),$$

отже, існує границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J(\widehat{v}^{\varepsilon}) = J(\widehat{v})$ і внаслідок єдиності оптимального керування задачі (1) – (3) при $\varepsilon = 0$ збіжність відбувається по всій послідовності $\varepsilon \to 0$ (а не по підпослідовності). При цьому з [14] випливає, що $\widehat{y}^{\varepsilon} \to \widehat{y}$ в $C([\delta, T]; L_2(\Omega))$ для довільного малого $\delta > 0$ та $\widehat{v}^{\varepsilon} \to \widehat{v}$ в $L_2([0, T])$.

Теорему доведено.

Відомо (аналогічно до [1]), що при $\varepsilon = 0$ задача оптимального керування (1) – (3) має єдиний розв'язок.

У роботі [15] при додаткових припущеннях на параметри задачі у випадку $\varepsilon = 0$ побудовано оптимальне керування задачі (1) – (3) у формі зворотного зв'язку. А саме, позначимо

$$b(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{(\lambda_i)^2(t-T)} q_i g_i \in C([0,T]),$$

$$\Re(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i e^{(\lambda_i)^2(t-T)} X_i(x) \in C([0,T]; L_2(\Omega)),$$

де $g_i = (g, X_i)$, $q_i = (q, X_i)$, $\{(\lambda_i)^2\}_{i=1}^{\infty}$ та $\{X_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ — відповідно власні значення і власні функції оператора $-\Delta$.

Нехай виконано наступні припущення.

Припущення 1. *Функція $b(t)$ додатна і строго монотонно зростає на $[0;T]$.*

Припущення 2. *Виконується система нерівностей*

$$\frac{|(\Re(0), y_0)|\ b(0)}{\gamma + \int_0^T b^2(s)ds} < \xi,$$

$$\frac{|(\Re(0), y_0)|\ b(T)}{\gamma + \int_0^T b^2(s)ds} > \xi,$$

$$(\Re(0), y_0) + \xi \int\limits_0^T b(s)ds < 0.$$

Тоді оптимальний синтез задачі (1) – (3) у випадку $\varepsilon = 0$ має вигляд

$$u[t,y] = \begin{cases} -\dfrac{(\Re(t), y(t)) + \xi \int_\tau^T b(s)ds}{\gamma + \int_t^\tau b^2(s)ds}\, b(t), & t \in [0,\tau], \\ \xi, & t \in [\tau, T], \end{cases} \tag{9}$$

де точка перемикання τ визначається з рівняння

$$\frac{(\Re(0), y_0) + \xi \int_\tau^T b(s)ds}{\gamma + \int_0^\tau b^2(s)ds}\, b(\tau) = -\xi. \tag{10}$$

Основною метою даної роботи є доведення того факту, що формула (9) задає наближений синтез вихідної задачі оптимального керування (1) – (3).

Тепер розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} & y_t^\varepsilon(x,t) = \Delta y^\varepsilon(x,t) - \varepsilon f(y^\varepsilon(x,t)) + g(x) u^\varepsilon[t, y^\varepsilon], \quad (t,x) \in Q_T, \\ & y^\varepsilon(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T], \\ & y^\varepsilon(x,0) = y_0^\varepsilon(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{11}$$

де $u^\varepsilon[t,\cdot]$ задається формулою (9) з точкою перемикання $\tau = \tau^\varepsilon$, яка є розв'язком рівняння

$$\frac{(\Re(0), y_0^\varepsilon) + \xi \int_{\tau^\varepsilon}^T b(s)ds}{\gamma + \int_0^{\tau^\varepsilon} b^2(s)ds}\, b(\tau^\varepsilon) = -\xi. \tag{12}$$

Теорема 2. *Крайова задача (11) має розв'язок* $y^\varepsilon \in W^T$ *і на цьому розв'язку* $J(u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]) \to J(\widehat{v})$, $\varepsilon \to 0$.

Доведення. За виглядом $u^\varepsilon[t,\cdot]$ аналогічно [14] можна показати, що для кожного $\varepsilon > > 0$ існує розв'язок $y^\varepsilon = y^\varepsilon(x,t)$ крайової задачі (11). Крім того, справджується оцінка

$$\|y^\varepsilon(t)\|^2 + 2\int_0^t \|y^\varepsilon(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}ds + 2\varepsilon\alpha\int_0^t \|y^\varepsilon(s)\|^p_{L_p(\Omega)}ds \le$$

$$\le \|y^\varepsilon(0)\|^2 + C_4 + C_5\int_0^t \|y^\varepsilon(s)\|ds. \tag{13}$$

З (13) за лемою Гронуолла – Беллмана

$$\|y^\varepsilon(t)\|^2 \le (\|y^\varepsilon(0)\|^2 + C_4)e^{C_5 T}. \tag{14}$$

Зокрема, $|u^\varepsilon[t, y^\varepsilon]| \le \widetilde{C}$. Звідси також маємо, що для $\{y^\varepsilon\}$ справедливі обмеження (5), що отримуються, як і при доведення теореми 1 (оцінка типу (4) нами встановлена — це (13) з урахуванням (14) і $y^\varepsilon \to \overline{y}$ у сенсі збіжностей (6).

Звідси випливає, що для кожного $t \in [0,T]$ $u^\varepsilon[t, y^\varepsilon] \to u[t,\overline{y}]$ при $\varepsilon \to 0$, де $u[t,\overline{y}]$ має форму (9) з точкою перемикання $\tau = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tau^\varepsilon$, яка є розв'язком рівняння (10), до того ж збіжність точок перемикання випливає з єдиності розв'язку рівнянь (10), (12) [15], а $\overline{y}$ — це розв'язок (11) з керуванням $u[t,\overline{y}]$. Але крайова задача

$$\begin{aligned} &z_t(x,t) = \Delta z(x,t) + g(x)u[t,z],\ (t,x) \in Q_T,\\ &z(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T],\\ &z(x,0) = y_0(x),\ x \in \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

має єдиний розв'язок, отже, $\overline{y} = \widehat{y}$ і $u[t,\overline{y}] = \widehat{v}$ — оптимальний процес у (1) – (3) при $\varepsilon = 0$.

Теорему доведено.

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.

2. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 288 с.

3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 463 с.

4. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 479 с.

5. *Капустян В. Е.* Оптимальное управление параболическими уравнениями с последействием // Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами / Лигун А. А., Капустян В. Е., Волков Ю. И. — Киев: Вища шк., 1990. — С. 75 – 154.

6. *Егоров А. И., Михайлова Т. Ф.* Синтез оптимального управления тепловим процессом с ограниченным управлением. Ч. 1 // Автоматика. — 1990. — № 3. — С. 57 – 61.

7. *Егоров А. И., Михайлова Т. Ф.* Синтез оптимального управления тепловим процессом с ограниченным управлением. Ч. 2 // Там же. — 1990. — № 4. — С. 31 – 39.

8. *Бублик Б. Н., Невидомский А. И.* Синтез оптимального сосредоточенного управления для уравнения теплопроводности // Модели и системы обработки информации. — 1982. — Вып. 1. — С. 78 – 87.

9. *Бублик Б. М., Невідомський О. І.* Оптимальний регулятор для рівняння теплопровідності зі змінним ваговим коефіцієнтом в функціоналі // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. — 1985. — № 10. — С. 56 – 58.

10. *Капустян В. Е.* Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 6. — С. 58 – 67.

11. *Белозеров В. Е., Капустян В. Е.* Геометрические методы модального управления. — Киев: Наук. думка, 1999. — 259 с.

12. *Рахимов М. Р.* О некоторых задачах квадратического регулятора для линейных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 1987. — **23**, № 1. — С. 143 – 154.

13. *Рахимов М. Р.* О применении метода динамического программирования к задачам квадратического регулятора для линейных гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. — 1987. — **292**, № 3. — С. 553 – 558.

14. *Kapustyan O. V., Mel'nik V. S., Valero J., Yasinsky V. V.* Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. — Kyiv: Naukova Dumka, 2008. — 215 p.

15. *Сукретна А. В., Капустян О. А.* Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 10. — С. 1384 – 1394.

Одержано 15.04.09