УДК 517.988.63

МЕТОД ЛОКАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В ТЕОРІЇ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

We obtain new conditions for existence of bounded solutions of nonlinear difference equations using a local linear approximation of these equations.

Получены новые условия существования ограниченных решений нелинейных разностных уравнений с использованием локальной линейной аппроксимации этих уравнений.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай E — скінченновимірний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, X і Y — довільні банахові простори і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$. Позначимо через $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $x_n \in X$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},X)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_X.$$

Розглянемо різницеві оператори $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$, що діють у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і визначаються формулами

$$(\mathcal{F}\mathbf{x})_n = x_n + f_{n-1}(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$(\mathcal{G}\mathbf{x})_n = x_n + g(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де відображення $f_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, і $g : E \to E$ неперервні і для кожного $r \in (0, +\infty)$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x\|_E \le r} \|f_n(x)\|_E < +\infty. \tag{3}$$

Метою цієї статті є з'ясування умов, за яких множини значень $R(\mathcal{F})$ і $R(\mathcal{G})$ операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ збігаються з $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$. Зазначимо, що така задача для нелінійних різницевих рівнянь є складною проблемою (див., наприклад, [1–8]), яку розв'язати важко. Тому ми обмежимося розглядом лише достатніх умов, що забезпечують виконання співвідношень $R(\mathcal{F}) = l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і $R(\mathcal{G}) = l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і в деяких окремих випадках збігаються з необхідними умовами виконання цих співвідношень.

В основу досліджень операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ у цій статті покладено метод, що використовує локальну лінійну апроксимацію цих операторів.

2. Формулювання основних результатів. Позначимо через $\mathcal{E}_1$ множину елементів $\mathbf{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ простору $l_\infty(\mathbb{Z}, L(E,E))$, для кожного з яких оператор $\mathcal{L}_\mathbf{A} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, що визначається формулою

$$(\mathcal{L}_\mathbf{A}\mathbf{x})_n = x_n + A_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

має обернений неперервний оператор $\mathcal{L}_\mathbf{A}^{-1} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$. Через $\mathcal{E}_2$ позначимо множину операторів $B \in L(E,E)$, для кожного з яких спектр $\sigma(B)$ не має спільних точок з колом $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Для кожного такого оператора оператор $\mathcal{L}_B : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, що визначається формулою

$$(\mathcal{L}_B\mathbf{x})_n = x_n + Bx_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

має обернений неперервний оператор $\mathcal{L}_B^{-1}$ [9].

Основними в статті є наступні дві теореми.

Теорема 1. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $\mathbf{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$, що*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x\|_E\le r} \|f_n(x) - A_n x\|_E \le \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_\mathbf{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H. \tag{6}$$

Тоді для кожного $\mathbf{h} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ рівняння

$$\mathcal{F}\mathbf{x} = \mathbf{h} \tag{7}$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Окремим випадком цієї теореми є наступна.

Теорема 2. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $B \in \mathcal{E}_2$, що*

$$\max_{\|x\|_E\le r} \|g(x) - Bx\|_E \le \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_B^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H. \tag{8}$$

Тоді для кожного $\mathbf{h} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ рівняння

$$\mathcal{G}\mathbf{x} = \mathbf{h} \tag{9}$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Ці теореми покладено в основу методу, за допомогою якого з'ясовуються умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь. Ми доведемо ці твердження, використавши ряд допоміжних результатів.

Зазначимо, що при використанні теорем 1 і 2 потрібно знати норми операторів $\mathcal{L}_\mathbf{A}^{-1}$ і $\mathcal{L}_B^{-1}$. Тому наведемо деяку інформацію про ці оператори. Нагадаємо, що оператор $\mathcal{L}_\mathbf{A}^{-1}$, який розглядається в теоремі 1, можна записати у вигляді рівності

$$\left(\mathcal{L}_\mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}\right)_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_{n,m}h_m,$$

в якій для елементів $G_{n,m} \in L(E,E)$, $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|G_{n,m}\|_{L(E,E)} < +\infty$$

(див., наприклад, [10, 11]). Отже, для норми оператора $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}$ справджується оцінка

$$\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|G_{n,m}\|_{L(E,E)},$$

яку можна використати в (6). Оператор $\mathcal{L}_B^{-1}$, що розглядається в теоремі 2, також записується у вигляді аналогічної рівності, в якій

$$G_{n,m} = \begin{cases} (-B)^{n-m}P_1, & \text{якщо} \quad n \ge m, \\ -(-B)^{n-m}P_2, & \text{якщо} \quad n < m, \end{cases}$$

де P_1 і P_2 — спектральні проектори, що відповідають спектральним множинам $\sigma_1(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < 1\}$ і $\sigma_2(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| > 1\}$ (див., наприклад, [12]).

3. Допоміжні твердження. Наведемо результати про c-неперервні оператори, необхідні для доведення теорем 1 и 2.

Позначимо через $\mathcal{P}_m$, де $m \in \mathbb{Z}$, лінійний неперервний оператор, що діє у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},E)$ і визначається рівністю

$$(\mathcal{P}_m\mathbf{x})_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \quad |n| \le m, \\ 0, & \text{якщо} \quad |n| > m. \end{cases} \tag{10}$$

Послідовність $(\mathbf{x}_k)_{k\ge1}$ елементів простору $l_\infty(\mathbb{Z},E)$ називатимемо *локально збіжною* до $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$\mathbf{x_k} \xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(\mathbb{Z},E)} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathbf{x}_k\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} < +\infty$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{P}_m(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0$$

для кожного числа $m \in \mathbb{N}$.

Оператор $\mathcal{H} : l_\infty(\mathbb{Z},E) \longrightarrow l_\infty(\mathbb{Z},E)$ називається *c-неперервним*, якщо для довільних $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$ і $\mathbf{x_k} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(\mathbb{Z},E)} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathcal{H}\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\ l_\infty(\mathbb{Z},E)} \mathcal{H}\mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поняття c-неперервного оператора (на мові „ε, δ") введено до розгляду Е. Мухамадієвим [13]. Вивчення цих понять було продовжено у роботах [14–20]. Визначення c-неперервного оператора, що використовує локально збіжні послідовності, запропоновано автором (див., наприклад, [21, 22]).

Прикладами c-неперервних операторів є оператори $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$, $\mathcal{L}_B$ і $\mathcal{P}_m$, що визначаються відповідно рівностями (1), (2), (4), (5) і (10).

Легко перевірити, що якщо $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ — c-неперервні оператори, то для довільних чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ оператори $\alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{B}$ і $\mathcal{AB}$ також є c-неперервними. Також легко перевірити, що якщо збіжна послідовність $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 1}$ c-неперервних елементів простору $L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))$ збігається до оператора $\mathcal{A} \in L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{A}_k - \mathcal{A}\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))} = 0,$$

то оператор $\mathcal{A}$ є c-неперервним. Отже, множина $\mathfrak{A}$ всіх c-неперервних елементів банахової алгебри $L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))$ є банаховою підалгеброю цієї алгебри.

Важливими для подальшого є наступні два твердження про c-неперервні оператори.

Теорема 3 [11, 14]. *Нехай лінійний неперервний і c-неперервний оператор* $\mathcal{A} : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to$ $\to l_\infty(\mathbb{Z},E)$ *має обернений неперервний оператор* $\mathcal{A}^{-1}$. *Тоді оператор* $\mathcal{A}^{-1}$ *є c-неперервним.*

Теорема 4 [8]. *Нехай* $\mathcal{B}$ *— замкнена куля з центром у точці* 0 *у банаховому просторі* $l_\infty(\mathbb{Z},E)$ *і оператор* $\mathfrak{C} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *є c-неперервним. Тоді* $\mathfrak{C}$ *має нерухому точку.*

Зауважимо, що за теоремою 3 підалгебра $\mathfrak{A}$ алгебри $L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))$ є наповненою [23].

При дослідженні нелінійних операторів, що діють у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},E)$, потрібно мати на увазі, що ні c-неперервність не випливає з неперервності, ні неперервність не випливає з c-неперервності (див. [6]).

4. Доведення теорем 1 і 2. Розглянемо у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},E)$ замкнену кулю $\mathcal{B}_R = \{x : \|x\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \leq R\}$ радіуса R з центром у точці 0.

Доведемо твердження, з якого випливатиме теорема 1.

Лема 1. *Нехай для деяких чисел* $H > 0$, $r > 0$ *і елемента* $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_1$ *справджується нерівність (6) і* $\mathbf{h} \in \mathcal{B}_H$.

Тоді рівняння (7) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in l_\infty(\mathbb{Z},E) \cap \mathcal{B}_r$.

Доведення. Запишемо рівняння (7) у вигляді

$$x_n + A_{n-1}x_{n-1} = A_{n-1}x_{n-1} - f_{n-1}(x_{n-1}) + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

і розглянемо c-неперервний оператор $\mathcal{W} : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to l_\infty(\mathbb{Z},E)$, що визначається формулою

$$(\mathcal{W}\mathbf{x})_n = A_{n-1}x_{n-1} - f_{n-1}(x_{n-1}) + h_n.$$

Оскільки оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$, що визначається рівністю (4), має неперервний обернений $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}$, то рівняння (11) можна подати у вигляді

$$x_n = \left(\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}\mathbf{x}\right)_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ на підставі теореми 3 є c-неперервним. Тому завдяки c-неперервності оператора $\mathcal{W} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}$ також буде c-неперервним.

Крім того, виконується співвідношення

$$\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}\ \mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r.$$

Справді, якщо $\|\mathbf{y}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le r$ і $\|\mathbf{h}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le H$, то згідно з нерівністю (6)

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{W}\mathbf{y}\right\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} &\le \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} \|\mathcal{W}\mathbf{y}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le \\ &\le \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} \sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x\|_E\le r} \|A_{n-1}x - f_{n-1}(x) + h_n\|_E \le \\ &\le \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}\left(\sup_{n\in\mathbb{Z},\|x\|_E\le r} \|A_{n-1}x - f_{n-1}(x)\|_E + \|\mathbf{h}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)}\right)\le \\ &\le \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}\left(\frac{r}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H + \|\mathbf{h}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)}\right)\le r. \end{aligned}$$

Тому завдяки теоремі 4 рівняння (12) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{B}_r$. На підставі рівносильності рівнянь (12) і (11)

$$x_n^* + f_{n-1}(x_{n-1}^*) \equiv h_n.$$

Отже, рівняння (7) має розв'язок $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}_r$.

Лему 1 доведено.

Аналогічним чином доводиться наступна лема.

Лема 2. *Нехай для деяких чисел $H > 0$, $r > 0$ і елемента $B \in \mathcal{E}_2$ справджується нерівність (8) і $\mathbf{h} \in \mathcal{B}_H$.*

Тоді рівняння (9) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_r$.

Очевидно, що теореми 1 і 2 є наслідками лем 1 і 2.

Зауважимо, що виконання умов теорем 1 і 2 недостатньо для єдиності розв'язків рівнянь (7) і (9), що підтверджується наступним прикладом різницевого рівняння.

Приклад 1. Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$x_n + f(x_{n-1}) = h_n, \tag{13}$$

де $\mathbf{h} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що визначається рівністю

$$f(x) = \begin{cases} kx, \quad \text{якщо} \quad x \le 0, \\ x, \quad \text{якщо} \quad 0 < x \le 1, \\ k(x-1)+1, \quad \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Тут $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Визначимо рівністю

$$(\mathcal{K}\mathbf{x})_n = x_n + kx_{n-1}$$

оператор $\mathcal{K}$, що діє у просторі $l_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Цей оператор має неперервний обернений $\mathcal{K}^{-1}$: $l_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, який можна подати у вигляді

$$(\mathcal{K}^{-1}\mathbf{y})_n = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{+\infty}(-k)^m y_{n-m}, & \text{якщо} \quad |k| < 1, \\ -\sum\limits_{m=1}^{+\infty}(-k)^{-m} y_{n+m}, & \text{якщо} \quad |k| > 1, \end{cases}$$

де $\mathbf{y} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$.

Очевидно, що

$$\left\|\mathcal{K}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}),l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))} = \frac{1}{\big||k|-1\big|}. \tag{14}$$

Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Очевидно, що для кожного числа $r > 0$

$$\max_{|x|\le r}|f(x) - kx| \le |k-1| \tag{15}$$

і, отже, для числа

$$r \ge \frac{H + |k-1|}{\big||k|-1\big|} \tag{16}$$

виконується нерівність

$$\max_{|x|\le r}|f(x) - kx| \le \frac{r}{\|\mathcal{K}^{-1}\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}),l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R}))}} - H,$$

аналогічна (8), що на підставі 14 і (16) збігається з (15). Тому за теоремою 1 рівняння (13) для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$. Таких розв'язків може бути нескінченно багато. Справді, якщо $h_n \equiv 0$, то це рівняння має розв'язки $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, де $x_n \equiv c$ і $c \in [0,1]$.

5. Застосування основних теорем. Наведемо застосування теорем 1 і 2 до дослідження лінійних і нелінійних різницевих рівнянь.

5.1. Випадок лінійних різницевих рівнянь. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{Q} = (Q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ простору $l_\infty(\mathbb{Z}, L(E,E))$. Розглянемо лінійне різницеве рівняння

$$x_n + Q_{n-1}x_{n-1} = h_n,$$

де $\mathbf{h} \in l_\infty(\mathbb{Z},E)$, та відповідний різницевий оператор $\mathcal{L}_\mathbf{Q} : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to l_\infty(\mathbb{Z},E)$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{L}_\mathbf{Q}\mathbf{x})_n = x_n + Q_{n-1}x_{n-1}.$$

Справджується наступне твердження.

Теорема 5. *Для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $\mathbf{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$, що*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x\|_E\le r} \|Q_n x - A_n x\|_E \le \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H \tag{17}$$

тоді і тільки тоді, коли різницевий оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ має обернений неперервний оператор.

Очевидно, що нерівність (17) рівносильна нерівності

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|Q_n - A_n\|_{L(E,E)} \le \frac{1}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - \frac{H}{r}. \tag{18}$$

Тут і в теоремі 5 $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ — оператор, що визначається рівністю (4).

Доведення. *Необхідність.* Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_1$, що виконується нерівність (17). Тоді на підставі теореми 1 для оператора $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ виконується співвідношення

$$R(\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}) = l_\infty(\mathbb{Z}, E). \tag{19}$$

Покажемо, що

$$\ker \mathcal{L}_{\mathbf{Q}} = \{0\}, \tag{20}$$

тобто різницеве рівняння

$$x_n + Q_{n-1} x_{n-1} = 0 \tag{21}$$

має тільки нульовий обмежений розв'язок. Запишемо це рівняння у вигляді

$$x_n + A_{n-1} x_{n-1} = (A_{n-1} - Q_{n-1}) x_{n-1}.$$

Оскільки оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ має неперервний обернений, то у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ рівняння (21) рівносильне рівнянню

$$x_n = \left(\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{z}\right)_n, \tag{22}$$

де $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ і $z_n = (A_{n-1} - Q_{n-1}) x_{n-1}$.

Нехай $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ — обмежений розв'язок рівняння (22), тобто

$$x_n^* \equiv \left(\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{z}^*\right)_n, \tag{23}$$

де $\mathbf{z}^* = (z_n^*)_{n\in\mathbb{Z}}$ і $z_n^* = (A_{n-1} - Q_{n-1}) x_{n-1}^*$. На підставі (18) і (23)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} &= \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{z}^*\right\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} \|\mathbf{z}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le \\
&\le \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|Q_n - A_n\|_{L(E,E)} \|\mathbf{x}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le \\
&\le \left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))} \left(\frac{1}{\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - \frac{H}{r}\right) \|\mathbf{x}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} \le \\
&\le \left(1 - \frac{H}{r}\left\|\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E),l_\infty(\mathbb{Z},E))}\right) \|\mathbf{x}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)}.
\end{aligned}$$

Звідси та з того, що

$$0 \le 1 - \frac{H}{r} \left\| \mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))} < 1,$$

випливає рівність

$$\|\mathbf{x}^*\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = 0,$$

тобто співвідношення (20) виконується. Отже, з рівності (19) і теореми Банаха про обернений оператор [24] випливає, що оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}}$ має неперервний обернений.

Достатність. Нехай оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}} : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to l_\infty(\mathbb{Z},E)$ має неперервний обернений. Тоді $\mathbf{Q}$ є елементом множини $\mathcal{E}_1$. Зафіксуємо довільне число $H > 0$ і виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{r}{\left\| \mathcal{L}_{\mathbf{Q}}^{-1} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H > 0.$$

Поклавши $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$, отримаємо нерівність (17).

Теорему 5 доведено.

Наслідок 1. *Різницевий оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}} : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to l_\infty(\mathbb{Z},E)$ має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді, коли існує елемент $\mathbf{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$, для якого*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|Q_n - A_n\|_{L(E,E)} < \frac{1}{\left\| \mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}}. \tag{24}$$

Доведення. Нехай для деякого елемента $\mathbf{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$ виконується нерівність (24). Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Виберемо число $r > 0$ так, щоб

$$\frac{1}{\left\| \mathcal{L}_{\mathbf{A}}^{-1} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|Q_n - A_n\|_{L(E,E)} > \frac{H}{r}.$$

Тоді справджуватиметься нерівність (18), а отже, і нерівність (17). Тому за теоремою 5 оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}} : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to l_\infty(\mathbb{Z},E)$ має обернений неперервний оператор.

Навпаки, якщо оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}} : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to l_\infty(\mathbb{Z},E)$ має обернений неперервний оператор, то за теоремою 5 для кожного числа $H > 0$ існують число $r > 0$ і елемент $\mathbf{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{E}_1$, для яких виконується нерівність (17) і, отже, нерівність (18). Із (18) випливає (24).

Наслідок 1 доведено.

Наслідок 2. *Різницевий оператор $\mathcal{L}_A : l_\infty(\mathbb{Z},E) \to l_\infty(\mathbb{Z},E)$, що визначається рівністю*

$$(\mathcal{L}_A \mathbf{x})_n = x_n + A x_{n-1},$$

де $A \in L(E,E)$, має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді, коли існує елемент $B \in \mathcal{E}_2$, для якого

$$\|A - B\|_{L(E,E)} < \frac{1}{\left\| \mathcal{L}_B^{-1} \right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}}.$$

У цьому твердженні $\mathcal{L}_B^{-1}$ — оператор, що визначається рівністю (5).

Зазначимо, що наведені умови оборотності лінійних різницевих операторів є новими.

5.2. Малі на нескінченності збурення лінійних різницевих рівнянь. Наведемо ще одне твердження, яке можна отримати за допомогою теореми 1.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n + A_{n-1}x_{n-1} + f_{n-1}(x_{n-1}) = h_n, \tag{25}$$

де $\mathbf{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, L(E,E))$, $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і $f_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, — неперервні відображення, що задовольняють співвідношення (3).

Використаємо лінійний оператор $\mathcal{L}_\mathbf{A} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, що визначається формулою (4).

Окремим випадком теореми 1 є наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай оператор $\mathcal{L}_\mathbf{A} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ має неперервний обернений $(\mathcal{L}_\mathbf{A})^{-1}$ і*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{Z},\ \|x\|_E\le r} \|f_n(x)\|_E}{r} < \frac{1}{\left\|\mathcal{L}_\mathbf{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}}. \tag{26}$$

Тоді різницеве рівняння (25) для кожної послідовності $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Справді, завдяки умовам теореми для кожного числа $H > 0$ існує таке число $r > 0$, що виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},\ \|x\|_E\le r} \|f_n(x)\|_E \le \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_\mathbf{A}^{-1}\right\|_{L(l_\infty(\mathbb{Z},E), l_\infty(\mathbb{Z},E))}} - H,$$

аналогічне нерівності (6). Тому на підставі теореми 1 справджується теорема 6.

Наслідок 3. *Нехай оператор $\mathcal{L}_\mathbf{A} : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ має неперервний обернений $(\mathcal{L}_\mathbf{A})^{-1}$ і $f_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, — неперервні відображення, для яких*

$$\sup_{(n,x)\in\mathbb{Z}\times E} \|f_n(x)\|_E < +\infty.$$

Тоді різницеве рівняння (25) для кожної послідовності $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Наслідок 4. *Нехай відображення $f_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, неперервні, задовольняють співвідношення (3) і*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{Z},\ \|x\|_E\le r} \|f_n(x)\|_E}{r} < 1.$$

Тоді для кожної послідовності $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ різницеве рівняння

$$x_n + f_{n-1}(x_{n-1}) = h_n$$

має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E)$.

Більш загальне твердження, ніж теорема 6, міститься в [7].

Зауважимо, що нерівність (26) не можна покращити навіть у випадку лінійного різницевого рівняння (25). Також у цьому рівнянні неперервні відображення $f_n : E \to E$, $n \in \in \mathbb{Z}$, можуть бути такими, що c-неперервний оператор $F : l_\infty(\mathbb{Z}, E) \to \to l_\infty(\mathbb{Z}, E)$, який визначається рівністю

$$(F\mathbf{x})_n = f_{n-1}(x_{n-1}),$$

є розривним у кожній точці простору $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ і, отже, є неліпшицевим оператором, як у наступному прикладі.

Приклад 2. Нехай $\{r_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — довільна скрізь щільна на $\mathbb{R}$ множина дійсних чисел (такою множиною може бути множина всіх раціональних чисел). Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$x_n + kx_{n-1} + f_{n-1}(x_{n-1}) = h_n, \tag{27}$$

де $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ і $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що визначається рівністю

$$f_n(x) = \sin\left(n\sqrt{|x - r_n|} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Визначимо c-неперервний оператор $F : l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ формулою

$$(F\mathbf{x})_n = \sin\left((n-1)\sqrt{|x_{n-1} - r_{n-1}|} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Кожному дійсному числу δ поставимо у відповідність елемент $\mathbf{z}_\delta = (z_n + \delta)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Оскільки для неперервних функцій $\sin\left(n\sqrt{|x - r_n|} + \frac{\pi}{4}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, немає жодного інтервалу $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, на якому б ці функції були рівностепенево неперервними [24], то

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \|F\mathbf{z}_\delta - F\mathbf{z}\|_{l_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \neq 0,$$

тобто оператор $F : l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ не є неперервним у точці $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Завдяки довільності вибору $\mathbf{z}$ оператор F не є неперервним у всіх точках простору $l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ і, отже, є неліпшицевим.

На підставі прикладу 1 та наслідку 3 для кожної послідовності $\mathbf{h} \in l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ різницеве рівняння (27) має у просторі $l_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ хоча б один розв'язок.

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 311 с.
2. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1972. — 246 с.
3. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.
4. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — Киев: Вища шк., 1992. — 319 с.

5. *Самойленко А. М., Теплінський Ю. В.* Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах // Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **72**. — 496 с.

6. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. — Рівне: Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, 2006. — 233 с.

7. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 660 – 662.

8. *Слюсарчук В. Ю.* Теорема про нерухому точку для c-цілком неперервних операторів у просторах обмежених на зліченній групі функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. — 2008. — Вип. 421. — С. 105 – 108.

9. *Слюсарчук В. Е.* Об ограниченных и почти периодических решениях неявных разностных уравнений в банаховом пространстве // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1975. — № 6. – С. 503 – 509.

10. *Слюсарчук В. Е.* О представлении ограниченных решений линейных дискретных уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 2. — С. 210 – 215.

11. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Там же. — 1983. — **35**, № 1. — С. 109 – 115.

12. *Слюсарчук В. Е.* Устойчивость решений разностных уравнений в банаховом пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Черновцы, 1972. — 98 с.

13. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.

14. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116 (158)**, № 4 (12). — С. 483 – 501.

15. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер.А. — 1981. — № 8. — С. 34 – 37.

16. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально- функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130 (172)**, № 1 (5). — С. 86 – 104.

17. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262 – 267.

18. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 2. – С. 201 – 205.

19. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. — 168 с.

20. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев, 1993. — 255 с.

21. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и прил. функционально-дифференц. уравнений. — Душанбе, 1987. — С. 102 – 103.

22. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейн. механика. — 1991. — Вып. 15 (49). — С. 32 – 35.

23. *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972. — 183 с.

24. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.

Одержано 03.12.08