УДК 517.91/943

ПРО ЛОКАЛЬНІ АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ У ТОЧЦІ

М. І. Шкіль

Нац. пед. ун-т
Україна, 01030, Київ, вул. Пирогова, 9

We propose an algorithm for constructing asymptotic solutions of singularly perturbed systems of differential equations in the case where the characteristic equation has simple roots. As opposed to previous studies of the case where the matrix at the derivative becomes degenerate on the entire interval, we study the case where the degeneration occurs in one point.

Предложен алгоритм построения асимптотических решений сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в случае простых корней характеристического уравнения. В отличие от предыдущих исследований, когда матрица при производных становится вырожденной на всем промежутке, исследуется случай, когда вырожденность происходит в одной точке.

1. Останнім часом все більше математиків займаються дослідженням сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь, як лінійних, так і нелінійних, у яких матриця при похідних може бути виродженою. Бібліографію з цих досліджень можна знайти в монографії [1], а також у роботах [2–4]. При цьому розглядалися випадки, коли матриця є виродженою на всьому проміжку, на якому досліджується система диференціальних рівнянь.

У даній роботі розглядається випадок, коли виродженість у системі настає в одній точці, і, отже, наведені вище результати не можуть бути застосовними.

2. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\varepsilon E(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

у якій $x = x(t)$, x_0 — n-вимірні вектори, $A(t)$ — $(n \times n)$-матриця, ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, — малий параметр, $t \in [0; L]$ — дійсна змінна, $E(t)$ — діагональна $(n \times n)$-матриця вигляду

$$E(t) = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-r}, \underbrace{t^{p_1}, t^{p_2}, \ldots, t^{p_r}}_{r}), \tag{2}$$

$p_1 \ge 1, \ldots, p_r \ge 1$ — натуральні числа, $1 \le r \le n$.

Як випливає з (2), матриця $E(t)$ при $t = 0$ стає виродженою.

На матрицю $A(t)$ накладемо умови:

1^0) на відрізку $[0; L]$ вона є неперервною;

2^0) існує скінченна границя

$$\lim_{\substack{t\to 0\\(t>0)}} (E^{-1}(t)A(t)) = K \ne 0, \tag{3}$$

де $E^{-1}(t)$ — обернена матриця до матриці $E(t)$ (при $t > 0$ $E^{-1}(t)$ існує), 0 — нульова матриця.

3. Вивчатимемо асимптотику (за параметром ε) на відрізку $0 \le t \le \delta$ ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ — число, яке буде визначено нижче). Систему диференціальних рівнянь (1) при $t \in (0; L]$ можна записати у вигляді

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = B(t)\,x, \tag{4}$$

де

$$B(t) = E^{-1}(t)A(t). \tag{5}$$

При виконанні умови 2^0 існує $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\(t>0)}} B(t)$ і

$$\lim_{\substack{t\to 0\\(t>0)}} B(t) = K. \tag{6}$$

Тоді $B(t)$ у точці $t = 0$ можна довизначити за принципом неперервності [5], ввівши матрицю

$$C(t) = \begin{cases} B(t), & t \in (0; L], \\ K, & t = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отже, далі розглядатимемо довизначену в точці $t = 0$ систему диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = C(t)x, \quad x(0) = x_0, \tag{8}$$

у якій матриця $C(t)$, згідно з умовою 1^0, є неперервною на відрізку $[0; L]$.

Введемо до розгляду матрицю

$$D(t) = C(t) - K. \tag{9}$$

Згідно з (6) і (7), існує окіл точки $t = 0$, $0 \le t \le \delta$ (цим самим визначено число $0 < \delta = \delta(\varepsilon) \le L$), такий, що для будь-яких $t \in [0; \delta]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ норма $\| D(t) \|$ матриці $D(t)$ задовольняє нерівність

$$\| D(t) \| \le \varepsilon^{\alpha} b, \tag{10}$$

де $\alpha > 1$ — довільне дійсне число, $b > 0$ — дійсне число, яке не залежить від ε.

Тоді систему диференціальних рівнянь (8) можна записати у вигляді

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Kx + D(t)x, \quad x(0) = x_0. \tag{11}$$

Введемо підстановку

$$x = Xy, \tag{12}$$

де $X = X(t,\varepsilon)$ — розв'язок початкової задачі $X(0,\varepsilon) = E$ (E — одинична матриця) для матричного рівняння

$$\varepsilon\frac{dX}{dt} = KX. \tag{13}$$

Рівняння (13) має нормальну фундаментальну систему розв'язків

$$X = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right). \tag{14}$$

Тоді підстановка (12) зводить систему диференціальних рівнянь (11) до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$x = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)x_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}K(t-t_1)\right)D(t_1)x(t_1,\varepsilon)dt_1. \tag{15}$$

Далі припускатимемо виконання умови:

3^0) характеристичні числа матриці K прості і їх дійсні частини недодатні. Тоді існують числа $c_1 > 0, c_2 > 0$, які не залежать від ε і такі, що для будь-яких $t, t_1 \in [0;\delta]$ і $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, мають місце оцінки

$$\left\|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)x_0\right\| \le c_1, \tag{16}$$

$$\left\|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}K(t-t_1)\right)D(t_1)\right\| \le c_2\varepsilon^{\alpha}. \tag{17}$$

Тому із співвідношення (15) отримуємо нерівність

$$\|x\| \le c_1 + \varepsilon_0^{\alpha-1}c_2\int\limits_0^t \|x(t_1,\varepsilon)\|dt_1, \quad 0 \le t \le \delta \le L. \tag{18}$$

Застосовуючи до нерівності (18) відому лему Беллмана [6], отримуємо

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le c_1 e^{\varepsilon_0^{\alpha-1}c_2 L}, \tag{19}$$

$0 \le t \le \delta \le L$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, $\|x\|$ — норма вектора x. Отже, розв'язок $x(t,\varepsilon)$ системи диференціальних рівнянь (8) з початковою умовою $x(0) = x_0$ є обмеженим для будь-яких $t \in [0;\delta]$, $0 < \delta < L$, і $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$.

Тоді для другого доданка в рівності (15) маємо оцінку

$$\left\| \int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}K(t-t_1)\right) D(t_1)x(t_1,\varepsilon)dt_1 \right\| \le \varepsilon^{\alpha-1}c_2\, c_1 e^{\varepsilon_0^{\alpha-1}c_2 L}L. \tag{20}$$

Отримані вище результати можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 1. *Якщо матриця $A(t)$ задовольняє умови 1^0 –3^0, то існує відрізок $[0;\delta] \subset \subset [0;L]$ ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ — число, яке визначається співвідношенням (10)) такий, що для будь-яких $t \in [0;\delta]$ і $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, розв'язок системи диференціальних рівнянь (8) можна зобразити у вигляді асимптотичної (за параметром ε) формули*

$$x(t,\varepsilon) = \left(\exp\left(K\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^{\alpha-1})\right)x_0. \tag{21}$$

4. Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розглянемо окремий випадок, коли в системі (1) $E(t)$ є скалярною матрицею

$$E(t) = t^p E, \tag{22}$$

E — одинична матриця, $p \ge 1$ — натуральне число, а від матриці $A(t)$ вимагатимемо, щоб вона в околі точки $t = 0$ мала неперервні похідні до порядку p включно і щоб виконувались умови

$$A(0) = A'(0) = \ldots = A^{(p-1)}(0) = 0, \quad A^{(p)}(0) \ne 0, \tag{23}$$

де 0 — нульова матриця, $A'(0), \ldots, A^{(p)}(0)$ — відповідні похідні матриці $A(t)$ в точці $t = 0$.

Тоді $A(t)$ можна розвинути за формулою Тейлора, яка при виконанні умов (23) має вигляд

$$A(t) = \frac{A^{(p)}(\theta t)}{p!}\,t^p, \quad 0 < \theta < 1. \tag{24}$$

Для розглядуваного випадку існує границя (3) і дорівнює

$$K = \frac{A^{(p)}(0)}{p!}. \tag{25}$$

Отже, згідно з теоремою 1, правильною є формула

$$x(t,\varepsilon) = \left(\exp\left(\frac{A^{(p)}(0)}{p!}\,\frac{t}{\varepsilon}\right) + 0(\varepsilon^{\alpha-1})\right)x_0. \tag{26}$$

Зауваження 1. Асимптотичні формули (21), (26) мають локальний характер (вони є правильними в околі $0 \le t \le \delta \subset [0;L]$ точки $t = 0$). Однак, якщо матриця $A(t)$ на відрізку $[0; L]$ має похідні до порядку $m+1$ $(m \geq p)$ включно і виконуються умови (23), до системи (1) у розглядуваному випадку можна застосувати методи автора [7] і асимптотичну формулу для розв'язку можна отримати на всьому відрізку $[0; L]$. Увагу автора на такий можливий випадок звернув академік А. М. Самойленко.

Зауваження 2. Отримані результати в даному прикладі можна узагальнити на той випадок, коли при похідній змінна t входить з дробовим додатним показником $\dfrac{p}{q}$, $q \geq 2$. Тоді, виконуючи заміну $t = \tau^q$, систему зводимо до вигляду

$$\varepsilon \tau^{p+1} \frac{dx}{d\tau} = L(\tau)x, \quad x(0) = x_0,$$

де

$$L(\tau) = q\tau^q A(\tau^q). \tag{27}$$

Від матриці $L(\tau)$ вимагатимемо, щоб її похідні до порядку $p+1$ включно задовольняли умови

$$L(0) = \ldots = L^{(p)}(0) = 0, \quad L^{(p+1)}(0) \neq 0. \tag{28}$$

Тоді існує

$$\lim_{\tau \to 0} (\tau^{-(p+1)} L(\tau)) = \frac{1}{(p+1)!} L^{(p+1)}(0) = K'. \tag{29}$$

Згідно з теоремою 1, для розв'язку розглядуваної системи на відрізку $[0; \sqrt[q]{\delta}\,]$ правильною є формула

$$x(t, \varepsilon) = \left(\exp\left(K' \frac{\sqrt[q]{t}}{\varepsilon} \right) + 0(\varepsilon^{\alpha-1}) \right) x_0. \tag{30}$$

Приклад 2. Розглянемо задачу Коші для скалярного диференціального рівняння

$$\varepsilon^2 t^p \frac{d^2 y}{dt^2} + a(t)y = 0 \tag{31}$$

з початковими умовами

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \tag{32}$$

де $y'(0) = \dfrac{dy}{dt}$ при $t = 0, \varepsilon > 0$ — малий параметр, $p \geq 1$ — натуральне число.

Припускатимемо, що функція $a(t)$ є неперервною на відрізку $[0; L]$ і задовольняє таку умову: існує границя

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ (t>0)}} (t^{-p} a(t)) = b \neq 0. \tag{33}$$

Тоді рівняння (31) підстановками

$$y = x_1, \quad \varepsilon y' = x_2 \tag{34}$$

зводиться до системи (1), в якій

$$x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|, \quad A(t) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$E(t) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & t^p \end{matrix} \right\|, \quad x_0 = \left\| \begin{matrix} y_0 \\ \varepsilon y_0' \end{matrix} \right\|. \tag{35}$$

Матриця $B(t)$ в формулі (5) і $\lim\limits_{t\to 0} B(t)$ відповідно дорівнюють

$$B(t) = E^{-1}(t)A(t) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ t^{-pa(t)} & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$K = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{matrix} \right\| \neq 0, \tag{36}$$

0 — нульова матриця.

Отже, для системи (1), у якій матриці задані формулами (35), (36), виконуються умови теореми 1. Тому для розв'язку даної системи правильною є асимптотична формула (21).

5. Узагальнимо результати на системи більш загального вигляду. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon B_1(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x(0) = x_0, \tag{37}$$

де $x = x(t)$ і x_0 — n-вимірні вектори, $B_1(t)$ і $A(t)$ — $(n \times n)$-матриці, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Нехай виконуються умови:

1) матриці $A(t)$, $B_1(t)$ є неперервними на відрізку $[0; L]$;

2) матриця $B_1(t)$ стає особливою в одній внутрішній точці $t = c$ інтервалу $(0; L)$ ($c \in \in (0; L)$), тобто рівняння

$$\det B_1(t) = 0 \tag{38}$$

має лише один ізольований корінь $t = c \in (0; L)$;

3) існує границя матриці $\Pi(t) = B_1^{-1}(t)A(t)$:

$$\lim_{\substack{t\to c \\ (t>c)}} \Pi(t) = \widetilde{K} \neq 0, \tag{39}$$

де $B_1^{-1}(t)$ — обернена матриця до $B_1(t)$ ($B_1^{-1}(t)$ існує при $t \in (c; L)$), 0 — нульова матриця.
Тоді, як наслідок із теореми 1, випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1–3, то існує окіл* $[c; c+\delta]$, $0 < \delta \leq L-c$, *точки* c *такий, що для всіх* $t \in [c; c+\delta]$ *правильною є асимптотична формула*

$$x(t,\ \varepsilon) = \exp\left(\left(\widetilde{K}\frac{t}{\varepsilon}\right) + O\left(\varepsilon^{\alpha-1}\right)\right)x_0. \tag{40}$$

Зауваження 3. Теорема 2 дає можливість будувати „праву" $(t \geq c)$ асимптотику за параметром ε для розв'язку системи (37). Однак якщо матриця $\Pi(t)$ має в точці $t = c$ ліву границю:

$$\lim_{\substack{t \to c \\ (t<c)}} \Pi(t) = \widetilde{K}' \neq 0, \tag{41}$$

то методом теореми 1 можна побудувати „ліву" $(t < c)$ асимптотику. Якщо настане випадок $\widetilde{K} = \widetilde{K}'$, то „права" і „ліва" асимптотики в точці $t = c$ збігаються і є неперервними.

1. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
2. *Шкіль М. І., Рашевський М. О.* Асимптотичне інтегрування лінійних диференціальних рівнянь при наявності точок повороту // Доп. НАН України. — 1998. — № 8. — С. 46–50.
3. *Шкиль Н. И., Завизион Г. В.* Системы сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 12. — С. 1694–1703.
4. *Шкіль М. І., Самусенко П. Ф.* Зведення певного класу систем диференціальних рівнянь до L-діагонального вигляду // Вісн. нац. ун-ту „Львів. політехніка". Прикл. математика. — 2000. — № 411. — С. 349–354.
5. *Фихтенгольц Г. И.* Основы математического анализа: В 3 т. — М.: Гостехтеориздат, 1955. — Т. 1. — 215 с.
6. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иност. лит., 1954. — 215 с.
7. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. — Київ: Вища шк., 1971. — 225 с.

Одержано 25.09.07