УДК 517.929

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

А. В. Вельгач

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We establish sufficient conditions for existence of solutions, which are continuously differentiable and bounded together with their first derivatives for $t \in \mathbb{R}$ of a system of nonlinear neutral type differential-functional equations, and study asymptotic properties of the solutions.

Установлены достаточные условия существования непрерывно дифференцируемых и ограниченных при $t \in \mathbb{R}$ (вместе с первой производной) решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа и исследованы их асимптотические свойства.

Розглянемо систему нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$x'(t+1) = Ax'(t) + f(t, x(t), x(t+1), x'(t)), \tag{1}$$

де A — неособлива $(n\times n)$-матриця, функція $f\colon R^+\times R^n\times R^n\times R^n \to R^n$, яка була об'єктом досліджень багатьох математиків (див. [1–3] і наведену в них літературу). Зокрема, в [4–6] вивчалася структура множини неперервно диференційовних при $t \geq 0$ розв'язків, що задовольняють умову

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t+1) - Ax(t)] = 0. \tag{2}$$

У даній роботі продовжуємо дослідження цієї задачі у випадку, коли виконуються наступні умови:

1) $\det A \neq 0$;

2) вектор-функція $f(t,x,y,z)$ є неперервною при $t \geq 0$, $x,y,z \in R^n$, $f(t,0,0,0) \equiv 0$, і задовольняє співвідношення

$$|f(t,x',y',z') - f(t,x'',y'',z'')| \leq w(t)(|x'-x''| + |y'-y''| + |z'-z''|),$$

де $w(t)$ — деяка неперервна, невід'ємна функція, $x',y',z',x'',y'',z'' \in R^n$;

3) ряди

$$W_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} w(t+i),$$

$$W_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \int_t^{\infty} w(\tau+i)\,d\tau$$

рівномірно збігаються при всіх $t \geq 0$ і $3W_1(t) \leq \Delta_1 < 1$, $3W_2(t) \leq \Delta_2 < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1–3 і $x(t)$ — деякий неперервно диференційовний і обмежений (разом із першою похідною) розв'язок задачі (1), (2), то існує неперервно диференційовний і обмежений при $t \geq 0$ (разом із першою похідною) розв'язок $\gamma(t)$ системи*

$$\gamma(t+1) = A\gamma(t) \tag{3}$$

такий, що при $t \to +\infty$ виконується співвідношення

$$x(t) = \gamma(t) + o(1). \tag{4}$$

Доведення. Нехай $x(t)$ — довільний неперервно диференційовний і обмежений при $t \geq 0$ (разом із першою похідною) розв'язок задачі (1), (2). Тоді згідно з умовами 1–3 маємо тотожність

$$x(t) = \gamma(t) + \sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}\int_t^{\infty} f(\tau+i, x(\tau+i), x(\tau+1+i), x'(\tau+i))d\tau,$$

де

$$\gamma(t) = x(t) - \sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}\int_t^{\infty} f(\tau+i, x(\tau+i), x(\tau+1+i), x'(\tau+i))d\tau.$$

Звідси безпосередньо випливає, що співвідношення (4) виконується. Крім цього, векторфункція $\gamma(t)$ є, очевидно, неперервно диференційовною і обмеженою (разом із першою похідною) при всіх $t \geq 0$. Покажемо, що вона задовольняє систему рівнянь (3). Дійсно, оскільки внаслідок (1), (2) маємо

$$x(t+1) = Ax(t) - \int_t^{\infty} f(\tau, x(\tau), x(\tau+1), x'(\tau))d\tau,$$

то

$$\gamma(t+1) = x(t+1) - \sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}\int_{t+1}^{\infty} f(\tau+i, x(\tau+i), x(\tau+1+i), x'(\tau+i))d\tau =$$

$$= x(t+1) - \sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}\int_t^{\infty} f(\tau+1+i, x(\tau+1+i), x(\tau+2+i), x'(\tau+1+i))d\tau =$$

$$= Ax(t) - \int_t^{\infty} f(\tau, x(\tau), x(\tau+1), x'(\tau))d\tau -$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty}(A^{-1})^i\int\limits_t^{\infty}f(\tau+i,x(\tau+i),x(\tau+1+i),x'(\tau+i))d\tau=$$

$$=Ax(t)-\sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^i\int\limits_t^{\infty}f(\tau+i,x(\tau+i),x(\tau+1+i),x'(\tau+i))d\tau=$$

$$=A\left(x(t)-\sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}\int\limits_t^{\infty}f(\tau+i,x(\tau+i),x(\tau+1+i),x'(\tau+i))d\tau\right)=A\gamma(t),$$

тобто вектор-функція

$$\gamma(t)=x(t)-\sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}\int\limits_t^{\infty}f(\tau+i,x(\tau+i),x(\tau+1+i),x'(\tau+i))d\tau$$

задовольняє систему рівнянь (3).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1–3 і $\gamma(t)$ — деякий неперервно диференційовний і обмежений при $t\geq 0$ (разом із першою похідною) розв'язок системи (3), то існує неперервно диференційовний і обмежений при $t\geq 0$ (разом із першою похідною) розв'язок задачі (1), (2) такий, що при $t\to+\infty$ виконується співвідношення (4).*

Доведення. Оскільки довільний неперервно диференційовний і обмежений при $t\geq 0$ (разом із першою похідною) розв'язок $x(t)$ системи рівнянь

$$x(t)=\gamma(t)+\sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}\int\limits_t^{\infty}f(\tau+i,x(\tau+i),x(\tau+1+i),x'(\tau+i))d\tau \tag{5}$$

є розв'язком задачі (1), (2) (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (5) в (1)), то для доведення теореми достатньо показати, що система рівнянь (5) має єдиний неперервно диференційовний і обмежений при $t\geq 0$ (разом із першою похідною) розв'язок.

За допомогою співвідношень

$$x_0(t)=\gamma(t),$$

$$x_0'(t)=\gamma'(t),$$

$$x_{m+1}(t)=\gamma(t)+\sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}\int\limits_t^{\infty}f(\tau+i,x_m(\tau+i),x_m(\tau+1+i),x_m'(\tau+i))\,d\tau, \tag{6}$$

$$x_{m+1}'(t)=\gamma'(t)-\sum_{i=0}^{\infty}(A^{-1})^{i+1}f(t+i,x_m(t+i),x_m(t+1+i),x_m'(t+i)),\quad m=0,1,\ldots,$$

визначимо послідовність вектор-функцій $x_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, і їх похідних і покажемо, що вона рівномірно збігається до деякого неперервно диференційовного і обмеженого (разом із першою похідною) розв'язку системи рівнянь (5).

Використовуючи умови $1-3$, за індукцією покажемо, що вектор-функції $x_m(t)$ є неперервно диференційовними при $t \geq 0$ і для всіх $m \geq 0$ виконуються нерівності

$$|x_m(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}, \quad |x'_m(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta}, \tag{7}$$

де $M = \max\left\{\sup\limits_{t\in R^+} |\gamma(t)|, \sup\limits_{t\in R^+} |\gamma'(t)|\right\}$, $\Delta = \max\{\Delta_1, \Delta_2\}$.

Справедливість оцінок (7) при $m = 0$ є очевидною. Припустимо, що вони виконуються у випадку $m \geq 0$, і покажемо їх виконання при $m+1$. Дійсно,

$$|x_{m+1}(t)| \leq |\gamma(t)| + \left|\sum_{i=0}^{\infty} \left(A^{-1}\right)^{i+1} \int\limits_t^{\infty} f(\tau+i, x_m(\tau+i), x_m(\tau+1+i), x'_m(\tau+i))d\tau\right| \leq$$

$$\leq |\gamma(t)| + \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \int\limits_t^{\infty} w(\tau+i)\left(|x_m(\tau+i)| + |x_m(\tau+1+i)| + |x'_m(\tau+i)|\right)d\tau \leq$$

$$\leq M + 3\frac{M}{1-\Delta}\sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \int\limits_t^{\infty} w(\tau+i)d\tau = M + 3W_2(t)\frac{M}{1-\Delta} \leq$$

$$\leq M + \Delta\frac{M}{1-\Delta} = \frac{M}{1-\Delta},$$

$$|x'_{m+1}(t)| \leq \left|\gamma'(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \left(A^{-1}\right)^{i+1} f(t+i, x_m(t+i), x_m(t+1+i), x'_m(t+i))\right| \leq$$

$$\leq |\gamma'(t)| + \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} w(t+i)\left(|x_m(t+i)| + |x_m(t+1+i)| + |x'_m(t+i)|\right) \leq$$

$$\leq M + 3\frac{M}{1-\Delta}\sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} w(t+i) = M + 3W_1(t)\frac{M}{1-\Delta} \leq$$

$$\leq M + \Delta\frac{M}{1-\Delta} = \frac{M}{1-\Delta}.$$

Тепер покажемо, що для всіх $m \geq 1$ і $t \geq 0$ мають місце оцінки

$$\begin{aligned} |x_m(t) - x_{m-1}(t)| &\leq M\Delta^m, \\ |x'_m(t) - x'_{m-1}(t)| &\leq M\Delta^m. \end{aligned} \tag{8}$$

Справді, при $m = 1$ маємо

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \left| \left(A^{-1}\right)^{i+1} \int_t^{\infty} f(\tau+i, x_0(\tau+i), x_0(\tau+1+i), x_0'(\tau+i)) d\tau \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \int_t^{\infty} w(\tau+i) \left(|\gamma(\tau+i)| + |\gamma(\tau+1+i)| + |\gamma'(\tau+i)|\right) d\tau \le$$

$$\le 3M \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \int_t^{\infty} w(\tau+i) d\tau \le 3MW_2(t) \le M\Delta_2 \le M\Delta,$$

$$|x_1'(t) - x_0'(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \left|(A^{-1})^{i+1} f(t+i, x_0(t+i), x_0(t+1+i), x_0'(t+i))\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} w(t+i) \left(|\gamma(t+i)| + |\gamma(t+1+i)| + |\gamma'(t+i)|\right) \le$$

$$\le 3M \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} w(t+i) \le 3MW_1(t) \le M\Delta_1 \le M\Delta.$$

Припустимо, що оцінки (8) виконуються для деякого $m \ge 1$, і покажемо, що вони не зміняться при переході від m до $m+1$. Дійсно, згідно з (6), (7) і умовами $1-3$ отримуємо

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \left| \left(A^{-1}\right)^{i+1} \int_t^{\infty} \left(f(\tau+i, x_m(\tau+i), x_m(\tau+1+i), x_m'(\tau+i)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \; f(\tau+i, x_{m-1}(\tau+i), x_{m-1}(\tau+1+i), x_{m-1}'(\tau+i))\right) d\tau \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \int_t^{\infty} w(\tau+i) \left(|x_m(\tau+i) - x_{m-1}(\tau+i)| + |x_m(\tau+1+i) - \right.$$

$$\left. - \; x_{m-1}(\tau+1+i)| + |x_m'(\tau+i)) - x_{m-1}'(\tau+i)|\right) d\tau \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \int_t^{\infty} w(\tau+i) \left(M\Delta^m + M\Delta^m + M\Delta^m\right) d\tau \le$$

$$\le 3M\Delta^m \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \int_t^{\infty} w(\tau+i) d\tau \le 3M\Delta^m W_2(t) \le M\Delta^{m+1},$$

$$
\begin{aligned}
|x'_{m+1}(t) - x'_m(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \Big| \left(A^{-1}\right)^{i+1} \big(& f(t+i, x_m(t+i), x_m(t+1+i), x'_m(t+i)) - \\
& -f(t+i, x_{m-1}(t+i), x_{m-1}(t+1+i), x'_{m-1}(t+i))\big)\Big| \le \\
& \le \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} w(t+i)\left(|x_m(t+i) - x_{m-1}(t+i)| + |x_m(t+1+i) - \right. \\
& - x_{m-1}(t+1+i)| + |x'_m(t+i)) - x'_{m-1}(t+i)|\big) \le \\
& \le \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} w(t+i)\left(M\Delta^m + M\Delta^m + M\Delta^m\right) \le \\
& \le 3M\Delta^m \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} w(t+i) \le 3M\Delta^m W_1(t) \le M\Delta^{m+1}.
\end{aligned}
$$

Таким чином, оцінки (8) виконуються при $t \ge 0$ і всіх $m \ge 1$. Оскільки $0 < \Delta < 1$, то із (8) безпосередньо випливає, що послідовності вектор-функцій $x_m(t)$, $m = 0, 1, 2 \ldots$, і їх похідних рівномірно збігаються при $t \ge 0$. Більш того, вектор-функція $x(t) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t)$ є неперервно диференційовним розв'язком системи рівнянь (5) і мають місце нерівності

$$
|x(t)| \le \frac{M}{1-\Delta}, \quad |x'(t)| \le \frac{M}{1-\Delta}
$$

(в цьому легко переконатись, якщо перейти в (6), (7) до границі при $m \to \infty$).

Покажемо тепер, що система рівнянь (5) не має інших неперервно диференційовних і обмежених при $t \ge 0$ (разом із першою похідною) розв'язків. Дійсно, нехай система (5) має ще один неперервно диференційовний і обмежений при $t \ge 0$ (разом із першою похідною) розв'язок $y(t)$. Тоді на підставі умов теореми і (5) отримаємо

$$
\begin{aligned}
|x(t) - y(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \Bigg| \left(A^{-1}\right)^{i+1} \int_t^{\infty} \big(& f(\tau+i, x(\tau+i), x(\tau+1+i), x'(\tau+i)) - \\
& - f(\tau+i, y(\tau+i), y(\tau+1+i), y'(\tau+i))\big)\, d\tau \Big| \le \\
& \le \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} \int_t^{\infty} w(\tau+i)\left(|x(\tau+i) - y(\tau+i)| + |x(\tau+1+i) - \right. \\
& -y(\tau+1+i)| + |x'(\tau+i)) - y'(\tau+i)|\big)\, d\tau \le \\
& \le 3\|x(t) - y(t)\| \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \int_t^{\infty} w(\tau+i) d\tau \le \\
& \le 3W_2(t)\|x(t) - y(t)\| \le \Delta\|x(t) - y(t)\|,
\end{aligned}
$$

$$|x'(t) - y'(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} \Big| \left(A^{-1}\right)^{i+1} \left(f(t+i, x(t+i), x(t+1+i), x'(t+i)) \, - \right.$$

$$\left. - \; f(t+i, y(t+i), y(t+1+i), y'(t+i)) \right) \Big| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^{i+1} w(t+i) \left(|x(t+i) - y(t+i)| + |x(t+1+i) \, - \right.$$

$$\left. - \; y(t+1+i)| + |x'(t+i)) - y'(t+i)| \right) \le$$

$$\le 3\|x(t) - y(t)\| \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} w(t+i) \le$$

$$\le 3W_1(t)\|x(t) - y(t)\| \le \Delta \|x(t) - y(t)\|,$$

де

$$\|x(t) - y(t)\| = \max \left\{ \sup_{t \in R^+} |x(t) - y(t)|, \sup_{t \in R^+} |x'(t) - y'(t)| \right\}.$$

Звідси випливає

$$\|x(t) - y(t)\| \le \Delta \|x(t) - y(t)\|,$$

де $0 < \Delta < 1$, що можливо лише у випадку $x(t) \equiv y(t)$. Отримана суперечність завершує доведення теореми 2.

1. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
2. *Хейл Дж.* Теория дифференциально-функциональных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737 – 747.
4. *Пелюх Г. П.* Асимптотичні властивості розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з нелінійним відхиленням аргументу // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Пр. Укр. мат. конгр. – 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 94 – 100.
5. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 1. — С. 45 – 49.
6. *Пелюх Г. П.* О структуре множества решений одного класса систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 1. — С. 58 – 65.

Одержано 03.03.08