УДК 517.9

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ*

О. А. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua

Є. В. Панасенко

Запоріз. нац. ун-т
Україна, 69600, Запоріжжя, вул. Жуковського, 66
e-mail: innovatory@rambler.ru

We obtain a criterion for existence of solutions to linear inhomogeneous boundary-value problems in a Banach space. We also find conditions for normal solvability of such problems and consider particular cases, e.g., countably dimensional boundary-value problems.

Получен критерий существования решений линейных неоднородных краевых задач в банаховом пространстве. Найдены условия нормальной разрешимости таких задач и рассмотрены их частные случаи, а именно, счетномерные краевые задачи.

1. Постановка задачі. Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x(t) + f(t), \tag{1}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[a;b]$ у банахів простір $\mathbf{B}_1 : f(t) \in C([a;b], \mathbf{B_1}) :=$ $:= \left\{ f(\cdot) : [a;b] \to \mathbf{B_1},\ \|\mathbf{f}\| = \sup_{t\in[a;b]} |\mathbf{f}(\mathbf{t})| \right\}$, $C([a;b], \mathbf{B_1})$ — банахів простір неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій; оператор-функція $A(t)$, що діє з банахового простору $\mathbf{B}_1$ в себе, є сильно неперервною [1, с. 141] з нормою $|||A||| = \sup_{t\in[a;b]} \|A(t)\| < \infty$. Тоді розв'язок $x(t)$ рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_a^t (A(s)\,x(s) + f(s))\,ds$$

є неперервно диференційовним у кожній точці $t \in [a;b]$ і задовольняє рівняння (1) скрізь на $[a;b]$. Отже, розв'язок $x(t)$ рівняння (1) будемо шукати у просторі $C^1([a;b], \mathbf{B_1})$ неперервно диференційовних на $[a;b]$ функцій зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$.

Разом з операторним рівнянням (1) розглянемо крайову умову

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

* Підтримано грантом 1/0771/08 (VEGA) Грантової агенції Словацької Республіки.

де оператор ℓ є лінійним неперервним на $[a;b]$ векторним функціоналом, що діє з простору $C[a;b]$ у банахів простір $\mathbf{B}_2 : \ell : C[a;b] \to \mathbf{B_2}$; α — елемент простору $\mathbf{B}_2$. В залежності від вигляду (2) оператора ℓ отримаємо різні крайові задачі, деякі аспекти теорії яких вивчались раніше. Знайдемо умови існування та структуру розв'язків неоднорідної крайової задачі (1), (2). Вирішенню цієї проблеми у випадку $\mathbf{B}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^m$ присвячено роботи [2–4], а для зліченновимірних некритичних крайових задач — монографію [5].

2. Основний результат. Використовуючи апарат теорії узагальнено-обернених операторів [3, 4], знайдемо необхідні та достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) у банаховому просторі. Позначимо через $U(t,\tau)$ еволюційний оператор [1, с. 147], який задовольняє операторне рівняння

$$\frac{dU(t,\tau)}{dt} = A(t)\,U(t,\tau);$$

$U(\tau,\tau) = I$ — одиничний оператор, оператор $U(t,\tau)$ можна знайти у вигляді рівномірно збіжного за операторною нормою ряду методом послідовних наближень [1, 6]. Загальний розв'язок операторного рівняння має вигляд [1, с. 147]

$$x(t) = U(t)\,x_0 + \overline{x}(t), \quad U(t) = U(t,a), \tag{3}$$

де $x_0 = x(a)$ — елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, а $\overline{x}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), який можна записати у вигляді

$$\overline{x}(t) = \int\limits_a^b K(t,\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

де $K(t,\tau) = U(t)\,U^{-1}(\tau)$ при $\tau \le t$ і $K(t,\tau) = 0$ при $\tau > t$.

Підставимо (3) у крайову умову (2) та отримаємо наступне рівняння відносно елемента x_0 банахового простору $\mathbf{B}_1$:

$$Qx_0 = \alpha - \ell \int\limits_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau) d\tau, \tag{4}$$

де $Q = \ell U(\cdot)$ — оператор, отриманий підстановкою в крайову умову (2) еволюційного оператора $U(t)$. Будемо припускати, що оператор $Q : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним [3, с. 39]. Тоді, як показано у [7], він є нормально розв'язним і існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{B_1} \to N(Q)$ та $\mathcal{P}_Y : \mathbf{B_2} \to Y$, які індукують разбиття $\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{B_2}$ у прямі топологічні суми замкнених підпросторів

$$\mathbf{B_1} = N(Q) \oplus X,$$

$$\mathbf{B_2} = Y \oplus R(Q).$$

Внаслідок нормальної розв’язності оператора Q рівняння (4) є розв’язним [8] тоді і тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right] = 0, \tag{5}$$

де $\mathcal{P}_{N(Q^*)}$ — проектор на ядро оператора Q^*, спряженого до оператора Q. При умові (5), і тільки при ній, операторне рівняння (4) має множину розв’язків вигляду

$$x_0 = \mathcal{P}_{N(Q)}\,c + Q^-\left(\alpha - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right), \tag{6}$$

де c — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1 \ : \ c \in \mathbf{B_1}$; $Q^- \ : \ \mathbf{B_2} \to \mathbf{B_1}$ — узагальнено-обернений оператор до оператора Q [3]. Підставивши x_0 у вираз (3), отримаємо загальний розв’язок крайової задачі (1), (2) у вигляді

$$x(t) = U(t)\mathcal{P}_{N(Q)}\,c + U(t)Q^-\alpha + (Gf)(t), \tag{7}$$

де $(Gf)(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (1), (2), який діє на вектор-функцію $f(t) \in C\left([a;b],\mathbf{B_1}\right)$ таким чином:

$$(Gf)(t) := \int_a^b K(t,\tau)f(\tau)d\tau - U(t)Q^-\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Отже, критерій розв’язності крайової задачі (1), (2) у банаховому просторі можна сформулювати таким чином.

Теорема. *Якщо оператор $Q = \ell U(\cdot)$, що діє з банахового простору $\mathbf{B_1}$ у банаховий простір $\mathbf{B_2}$, є узагальнено-оборотним, то неоднорідна задача (1), (2) розв’язна для тих і лише тих неоднорідностей $f(t) \in C\left([a;b],\mathbf{B_1}\right)$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову (5), і при цьому загальний розв’язок крайової задачі має вигляд (7).*

3. Зліченновимірні крайові задачі. Розглянемо можливі частинні випадки крайових задач, які випливають з теореми 1, а саме, розглянемо зліченновимірні крайові задачі [5]. Якщо за оператор-функцію $A(t)$ взяти зліченновимірну матрицю, то отримаємо зліченновимірну крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x(t) + f(t), \tag{9}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{10}$$

де розв’язок $x(t)$ будемо шукати у вигляді зліченновимірного вектора-стовпчика: $x(t) = \operatorname{col}\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots\right)$, а оператор ℓ є лінійним неперервним на $[a;b]$ векторним функціоналом, що діє з простору $C([a;b])$ у банахів простір $\mathbf{B}_2$, $\ell : C[a;b] \to \mathbf{B_2}$.

Наслідок 1 *(нормально розв'язні задачі). Якщо $Q = \ell U(\cdot)$ — узагальнено-оборотний оператор і розмірності ядра Q та спряженого ядра Q^* є нескінченними, то однорідна крайова задача має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in C\left([a;b], \mathbf{B_1} = \ell_{\mathbf{p}}\right), \alpha \in \mathbf{B_2} = \ell_{\mathbf{p}}$ задовольняють зліченну кількість лінійно незалежних умов (5); при цьому задача має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків у вигляді (7).*

Наслідок 2 *(n-нормально розв'язні задачі). Якщо $Q = \ell U(\cdot)$ — узагальнено-оборотний оператор і розмірність ядра Q є скінченною, а розмірність спряженого ядра Q^* — нескінченною, то однорідна крайова задача має скінченну кількість лінійно незалежних розв'язків $(n = \dim\ker Q)$. Неоднорідна задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in C\left([a;b], \mathbf{B_1} = \ell_{\mathbf{p}}\right)$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^m$ задовольняють зліченну кількість лінійно незалежних умов (5); при цьому задача має скінченну кількість лінійно незалежних розв'язків у вигляді (7). Наприклад, такий випадок завжди буде мати місце, коли оператор ℓ задає скінченну кількість крайових умов, тобто $\mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^m$.*

Наслідок 3 *(d-нормально розв'язні задачі). Якщо $Q = \ell U(\cdot)$ — узагальнено-оборотний оператор і розмірність ядра Q є нескінченною, а розмірність спряженого ядра Q^* — скінченною, то однорідна крайова задача має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in C\left([a;b], \mathbf{B_1} = \ell_{\mathbf{p}}\right), \alpha \in \mathbf{B_2} = \ell_{\mathbf{p}}$ задовольняють скінченну кількість лінійно незалежних умов (5); при цьому задача має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків у вигляді (7). Наприклад, такий випадок завжди буде мати місце, коли диференціальну систему (1) задано в $\mathbb{R}^n$, тобто $\mathbf{B}_1 = \mathbb{R}^n$.*

Наслідок 4 *(нетерові задачі). Якщо $Q = \ell U(\cdot)$ — узагальнено-оборотний оператор і розмірності ядра Q та спряженого ядра Q^* є скінченними, то однорідна крайова задача має n лінійно незалежних розв'язків $(n = \dim\ker Q)$. Неоднорідна задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in C\left([a;b], \mathbf{B_1} = \ell_{\mathbf{p}}\right), \alpha \in \mathbf{B_2} = \ell_{\mathbf{p}}$ задовольняють $d(d = \dim\ker Q^*)$ лінійно незалежних умов (5); при цьому задача має n лінійно незалежних розв'язків (7). Наприклад, такий випадок завжди має місце, коли $\mathbf{B_1} = \mathbb{R}^n$ та $\mathbf{B_2} = \mathbb{R}^m$ $[2, 4]$. Якщо $d = n$, то має місце фредгольмів випадок.*

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.
2. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
5. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.
6. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
7. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 426 с.
8. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

Одержано 15.10.08