УДК 512.662.5

ГРАДІЄНТНІ ВЕКТОРНІ ПОЛЯ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ НА МНОГОВИДАХ

Ю. В. Шарко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We consider gradient vector fields with impulsive (smooth and continuous) effects, defined on a smooth compact manifold. Conducting a study of the qualitative behavior of integral curves of these fields we prove a criterion for existence of closed orbits and a condition for their orbital stability.

Рассматриваются градиентные векторные поля с импульсным (гладким и непрерывным) воздействием, заданные на гладком компактном многообразии. При исследовании качественного поведения интегральных кривых этих векторных полей доказаны критерий существования замкнутых орбит и условие существования их орбитальной устойчивости.

1. Вступ. За останні два десятиріччя бурхливого розвитку набула теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Основи цієї теорії було закладено у працях М. М. Крилова, М. М. Боголюбова та Ю. О. Митропольського. Визначальний вклад у розвиток цієї теорії внесли А. М. Самойленко та його учні [1, 2]. Разом з тим дослідження векторних полів з імпульсною дією на гладких многовидах тільки розпочинається.

Будемо розглядати на гладкому компактному многовиді M^n два градієнтних векторних поля для однієї і тієї ж функції $f : M^n \to \mathbf{R}^1$, але відносно різних ріманових метрик на M^n. Природним чином виникає векторне поле на M^n з імпульсною дією. Опишемо поведінку його траєкторій, критерій існування так званих замкнених орбіт та доведемо теорему про їх орбітальну стійкість.

2. Попередні відомості. Наведемо необхідні для подальшого викладу означення і твердження, більшість з яких можна знайти в [3–6]. Нехай M^n — компактний гладкий многовид без краю розмірності n.

Означення 1. *Векторним полем з гладкою імпульсною дією на M^n називається четвірка $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ така, що:*

а) X — гладке векторне поле, що задане на M^n;

б) $\Gamma^{n-1} \subset M^n$ і $\Sigma^{n-1} \subset M^n$ — замкнені гладкі підмноговиди корозмірності 1 (взагалі кажучи, незв'язні) і такі, що $\Gamma^{n-1} \bigcap \Sigma^{n-1} = \varnothing$;

в) векторне поле X є трансверсальним до підмноговидів Γ^{n-1} і Σ^{n-1};

г) $\varphi : \Gamma^{n-1} \to \Sigma^{n-1}$ — дифеоморфізм.

Інтегральною кривою векторного поля з гладкою імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$, що проходить через точку $p \in M^n$, $p \notin \Gamma^{n-1}$, називається таке гладке відображення $\alpha : (a, b) \to M^n$, де (a, b) — інтервал, до якого належить 0, що $\alpha(0) = p$, $\alpha(t) \bigcap \Gamma^{n-1} = \varnothing$ і $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. У випадку, коли інтегральна крива $\alpha : (a, b) \to M^n$ продовжується до значення параметра b і $\alpha(b) \in \Gamma^{n-1}$, вона *розривається*, тобто точка $\alpha(b)$ відображається у точку $\varphi(\alpha(b)) \in \Sigma^{n-1}$ і далі рухається по інтегральній кривій, що проходить через точку $\varphi(\alpha(b))$. Образ інтегральної кривої називається траєкторією або орбітою.

Під *гладким компактним многовидом з особливостями* M^n_{sing} *розмірності* n розуміємо компактний топологічний простір M^n_{sing}, у якому є скінченна кількість точок $m_1, m_2, \ldots, m_k$ така, що множина $M \setminus (\bigcup_{i=1}^k m_i)$ є гладким многовидом розмірності n. Точки $m_1, m_2, \ldots, m_k$ називаються сингулярними або особливими точками M^n_{sing}.

Під *гладким компактним підмноговидом з особливостями* N^{n-1}_{sing} *корозмірності* 1 *у гладкому многовиді* M^n *розмірності* n розуміємо компактний многовид з особливостями N^{n-1}_{sing} розмірності $n-1$, який на доповненні до сингулярних точок гладко вкладений у M^n.

Означення 2. *Векторним полем з неперервною імпульсною дією на гладкому компактному многовиді без краю* M^n *називається четвірка* $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}, \psi)$ *така що:*

а) X *— гладке векторне поле, що задане на* M^n;

б) $\Gamma^{n-1} \subset M^n$ *— замкнений гладкий підмноговид корозмірності* 1 *(взагалі кажучи, незв'язний)*;

в) $\Sigma^{n-1}_{\text{sing}} \subset M^n$ *— компактний гладкий підмноговид з особливостями корозмірності* 1;

г) $\Gamma^{n-1} \bigcap \Sigma^{n-1}_{\text{sing}} = \varnothing$;

д) векторне поле X *є трансверсальним до підмноговиду* Γ^{n-1};

е) на доповненні до сингулярних точок векторне поле X *є трансверсальним до* $\Sigma^{n-1}_{\text{sing}}$, *а в сингулярних точках* $\Sigma^{n-1}_{\text{sing}}$ *перетворюється в* 0;

є) $\psi : \Gamma^{n-1} \to \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}$ *— неперервне відображення.*

Аналогічним чином *інтегральною кривою векторного поля з неперервною імпульсною дією* $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}, \psi)$, що проходить через точку $p \in M^n$, $p \notin \Gamma^{n-1}$, називається гладке відображення $\alpha : (a, b) \to M^n$, де (a, b) — інтервал, до якого належить 0, таке, що $\alpha(0) = p$, $\alpha(t) \bigcap \Gamma^{n-1} = \varnothing$ і $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. У випадку, коли інтегральна крива $\alpha : (a, b) \to M^n$ продовжується до значення параметра b і $\alpha(b) \in \Gamma^{n-1}$, вона *розривається*, тобто точка $\alpha(b)$ відображається у точку $\psi(\alpha(b)) \in \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}$ і далі або рухається по інтегральній кривій, що проходить через точку $\psi(\alpha(b))$, якщо точка $\psi(\alpha(b))$ не є особливою точкою векторного поля X, або закінчується у цій точці у випадку, коли точка $\psi(\alpha(b))$ є особливістю $\Sigma^{n-1}_{\text{sing}}$.

Нехай функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка задана на гладкому замкненому многовиді M^n, є диференційовною (класу C^∞). Точка $y \in M^n$ називається *критичною точкою* функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо частинні похідні $\partial f(y)/\partial x$ функції у цій точці дорівнюють нулеві. Точка $y \in D$ називається *регулярною точкою* функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо хоча б одна частинна похідна $\partial f(y)/\partial x$ функції в цій точці є відмінною від нуля. Нехай a належить множині значень функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Замкнена множина $f^{-1}(a) = M_a$ називається *поверхнею рівня функції.* Якщо поверхня рівня $f^{-1}(a)$ (взагалі кажучи, незв'язна) функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не містить критичних точок, то така поверхня рівня є гладким підмноговидом корозмірності 1. Якщо на поверхні рівня $f^{-1}(a)$ (взагалі кажучи, незв'язній) функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всі критичні точки є ізольованими, то така поверхня рівня є гладким компактним підмноговидом з особливостями корозмірності 1.

Припустимо, що F_0 і F_1 — два дифеоморфізми компактного гладкого многовиду M^n у гладкий многовид N^n. Кажуть, що дифеоморфізми F_0 і F_1 є *ізотопними*, якщо існує неперервна сім'я дифеоморфізмів G_t, $t \in [0, 1]$, із M^n в N^n така, що $G_0 = F_0$, $G_1 = F_1$.

Для неперервного відображення $F : M^n \longrightarrow M^n$, де M^n — компактний гладкий многовид, за допомогою слідів індукованих гомоморфізмів груп гомологій $H^i(M^n, Q)$ многовиду M^n можна визначити число *Лефшеця* $\Lambda(F)$ за формулою [3]

$$\Lambda(F) = \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{Tr}(F_*(H^i(M^n, Q) \to H^i(M^n, Q))).$$

Це число використовують для відповіді на питання про існування нерухомих точок у відображення F.

Ейлерову характеристику $\chi(M^n)$ компактного гладкого многовиду M^n теж можна визначити через ранги груп гомологій многовиду M^n за допомогою формули $\chi(M^n) = \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{rank}(H^i(M^n, Q))$ [3].

3. Градієнтні векторні поля на многовидах. Нехай M^n — компактний гладкий многовид без краю. Виберемо на M^n ріманову метрику ρ. Скалярний добуток двох дотичних векторів X і Y у точці $m \in M^n$, визначений метрикою ρ, будемо позначати через $\langle X, Y\rangle_m$. Припустимо, що на многовиді M^n задано гладку функцію $f : M^n \longrightarrow [0,1]$. Нагадаємо, що *градієнтне векторне поле* $\operatorname{grad}_\rho f$ *на многовиді* M^n *відносно ріманової метрики* ρ визначається з рівності

$$\left\langle \operatorname{grad}_\rho f, Z\right\rangle_m = Z(f(m)),$$

де Z — довільне векторне поле на M^n, а $Z(f(m))$ — похідна у точці $m \in M^n$ функції f вздовж поля Z. Векторне поле $\operatorname{grad}_\rho f$ дорівнює нулю тільки у критичних точках функції f.

Зауваження. Незалежно від ріманової метрики ρ ненульовий вектор у точці $m \in M^n$ з векторного поля $\operatorname{grad}_\rho f$ утворює з дотичним вектором до поверхні рівня функції f у цій точці ненульовий кут. Іншими словами, інтегральна крива векторного поля $\operatorname{grad}_\rho f$, що проходить через точку $m \in M^n$, перетинає поверхню рівня функції f у цій точці трансверсально і інтегральні криві направлені у сторону зростання функції.

Користуючись різними рімановими метриками ρ і σ на многовиді M^n, можемо для однієї і тієї ж гладкої функції $f : M^n \longrightarrow [0,1]$ задавати різні векторні поля $\operatorname{grad}_\rho f$ і $\operatorname{grad}_\sigma f$. Ми скористаємося цією обставиною для побудови на M^n градієнтних векторних полів з імпульсною дією.

Нехай зафіксовано гладку функцію $f : M^n \longrightarrow [0,1]$ зі *скінченною кількістю критичних значень*. Припустимо, що $0 = c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-1} < c_k = 1$ — всі критичні значення функції f. Виберемо регулярні значення функції f

$$0 < p_1 < q_1 < c_2 < p_2 < q_2 < c_3 < \ldots < c_{k-1} < p_{k-1} < q_{k-1} < c_k = 1$$

і розглянемо підмноговиди

$$M_{p_i} = f^{-1}(p_i) \quad \text{та} \quad M_{q_i} = f^{-1}(q_i).$$

Наступне твердження доведено в [4].

Твердження 1. *Підмноговиди M_{p_i} та M_{q_i}, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, є дифеоморфними. Дифеоморфізм $\varphi_i : M_{p_i} \longrightarrow M_{q_i}$ можна побудувати за допомогою інтегральних кривих довільного векторного поля $\operatorname{grad}_\rho f$. А саме, через точку $x \in M_{p_i}$ проходить інтегральна крива поля $\operatorname{grad}_\rho f$, яка перетинає підмноговид M_{q_i} у точці y. Дифеоморфізм φ_i відображає точку x у точку y.*

Дифеоморфізм φ_i залежить від вибору векторного поля $\mathrm{grad}_\rho f$. Очевидно, що має місце рівність $\varphi_i^{-1}(x) \circ \varphi_i(x) = Id_{M_{p_i}}$. Якщо позначити через

$$\varphi_i(\mathrm{grad}_\rho f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{q_i} \quad \text{та} \quad \varphi_i(\mathrm{grad}_\sigma f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{q_i}$$

дифеоморфізми, які побудовані за допомогою різних ріманових метрик ρ і σ на M^n, то дифеоморфізм

$$\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f,\ \mathrm{grad}_\rho f) = \varphi_i(\mathrm{grad}_\sigma f)^{-1} \circ \varphi_i(\mathrm{grad}_\rho f)$$

вже, взагалі кажучи, не буде тотожним на M_{p_i}.

Має місце така лема.

Лема 1. *Дифеоморфізм $\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ ізотопний тотожному відображенню для довільних ріманових метрик ρ та σ на многовиді M^n.*

Доведення. Відомо, що множина ріманових метрик $\Re_{M^n}$ на компактному многовиді M^n в компактно-відкритій C^∞ топології утворює опуклий конус. Це означає, що якщо ρ_1 і ρ_2 — дві ріманові метрики на многовиді M^n, то для кожного значення $t \in [0,1]$ тензорне поле $\rho_t = t\rho_1 + (1-t)\rho_2$ буде рімановою метрикою на M^n. Отже, для кожного $t \in [0,1]$ векторне поле $\mathrm{grad}_{t\rho_1+(1-t)\rho_2} f$ коректно задане і є градієнтним для функції f. Якщо розглянути сім'ю дифеоморфізмів

$$\Phi_i(\mathrm{grad}_{(1-t)\sigma} f, \mathrm{grad}_\rho f) = \varphi_i(\mathrm{grad}_{(1-t)\sigma+t\rho} f)^{-1} \circ \varphi_i(\mathrm{grad}_\rho f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i},$$

то очевидно, що вона задає необхідну ізотопію між тотожним відображенням і дифеоморфізмом

$$\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f) = \varphi_i(\mathrm{grad}_\sigma f)^{-1} \circ \varphi_i(\mathrm{grad}_\rho f).$$

Лему доведено.

У наступному пункті, використавши дифеоморфізми

$$\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i},$$

побудуємо векторне поле з гладкою імпульсною дією на M^n.

Припустимо, що гладка функція $g : M^n \longrightarrow [0,1]$ має *скінченну кількість критичних точок* $m_1, m_2, \ldots, m_l$. Нехай $0 = c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-1} < c_k = 1$ — всі критичні значення функції g. Виберемо регулярні значення функції g

$$0 < q_1 < c_2 < q_2 < c_3 < \ldots < c_{k-1} < q_{k-1} < c_k = 1$$

і розглянемо гладкі підмноговиди

$$M_{q_i} = g^{-1}(q_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

та гладкі підмноговиди з особливостями корозмірності 1

$$M_{c_i} = g^{-1}(c_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Наступний факт є відомим.

Твердження 2. *Гладкий підмноговид M_{q_i} неперервно відображається на M_i — гладкий підмноговид з особливостями в корозмірності 1. Неперервне відображення ψ_i : $M_{q_i} \longrightarrow M_{c_i}$ можна побудувати за допомогою інтегральних кривих довільного векторного поля, наприклад $V = -\mathrm{grad}_\sigma g$. А саме, через точку $x \in M_{q_i}$ проходить інтегральна крива поля $V = -\mathrm{grad}_\sigma g$, яка або перетинає M_{c_i} у точці y, або прямує в критичну точку m_j функції g. Неперервне відображення ψ_i відображає точку x у точку y або у точку m_j.*

Неперервне відображення ψ_i залежить від вибору градієнтного векторного поля $V = -\mathrm{grad}_\sigma g$. У наступному пункті, використавши неперервне відображення ψ_i, побудуємо векторне поле з неперервною імпульсною дією на M^n.

Нехай m_j — довільна критична точка функції g. Розглянемо два векторних поля $V = -\mathrm{grad}_\sigma g$ і $W = \mathrm{grad}_\rho g$. Позначимо через $\alpha_W(m_j)$ множину тих інтегральних кривих векторного поля W, для яких точка m_j є α-граничною множиною, а через $\omega_V(m_j)$ множину тих інтегральних кривих векторного поля V, для яких точка m_j є ω-граничною множиною.

4. Градієнтне векторне поле з гладкою (неперервною) імпульсною дією. У цьому пункті, використавши попередні конструкції, побудуємо два векторних поля з гладкою та неперервною імпульсною дією.

Градієнтне векторне поле з гладкою імпульсною дією. Будемо розглядати наступне градієнтне векторне поле з гладкою імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$. Спочатку зафіксуємо на замкненому гладкому многовиді M^n дві різні ріманові метрики ρ і σ і задамо гладку функцію $f : M^n \longrightarrow [0,1]$ зі скінченною кількістю критичних значень. Використавши попередні побудови, розглянемо дифеоморфізми

$$\varphi_i = \varphi_i(\mathrm{grad}_\sigma f)^{-1} : M_{q_i} \longrightarrow M_{p_i}.$$

Покладемо $\Gamma^{n-1} = \cup_i M_{q_i}$, $\Sigma^{n-1} = \cup_i M_{p_i}$, $\varphi = \cup_i \varphi_i$, $X = \mathrm{grad}_\rho f$.

Рух точки у фазовому просторі M^n для такого градієнтного векторного поля з гладкою імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ відбувається по одній з інтегральних траєкторій $x(t)$ системи $\mathrm{grad}_\rho f(x)$ у проміжках між двома послідовними попаданнями цієї інтегральної траєкторії на підмноговид Γ^{n-1}. У момент t_0 попадання траєкторії $x(t)$ на підмноговид Γ^{n-1} точка $x(t_0)$ „миттєво” переводиться дифеоморфізмом φ у точку $y = \varphi(x(t_0))$ підмноговиду Σ^{n-1}.

Таким чином, траєкторії векторного поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ належать гладким n-вимірним некомпактним підмноговидам

$$\mathcal{D}_i^n = f^{-1}(q_i, q_{i+1}],$$

тобто траєкторії, які беруть початок у $\dot{\mathcal{D}}_i^n = f^{-1}(q_i, q_{i+1})$ і досягають підмноговиду $M_{q_{i+1}}$, за допомогою дифеоморфізму φ_{i+1} переходять у траєкторії, які належать підмноговидам

$$\mathcal{E}_{i+1} = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}].$$

Зрозуміло, що для траєкторій, які беруть початок у точках, що належать підмноговиду

$$\mathcal{S}_i = f^{-1}(q_i, c_{i+1}),$$

є дві можливості:

а) прямувати до точок рівноваги векторного поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$, які відповідають множині критичних точок функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і належать поверхні рівня $f^{-1}(c_{i+1})$;

б) попасти у точку, що належить підмноговиду $M_{q_{i+1}}$, і далі весь час залишатися на n-вимірному компактному підмноговиді

$$\mathcal{E}_{i+1} = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}]$$

з краєм $\partial\mathcal{E}_{i+1} = f^{-1}(p_{i+1}) \bigcup f^{-1}(q_{i+1})$.

Означення 3. *Розривними траєкторіями i-го поверху градієнтного векторного поля з гладкою імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ будемо називати ті траєкторії, які беруть початок на підмноговиді $\dot{\mathcal{D}}_i^n = f^{-1}(q_i, q_{i+1})$ і досягають підмноговиду $M_{q_{i+1}}$.*

Іншими словами, розривні траєкторії i-го поверху — це траєкторії, для яких існує „биття" об $(n-1)$-вимірний підмноговид $M_{q_{i+1}} \subset \Gamma^{n-1}$.

Серед розривних траєкторій i-го поверху можуть бути такі, які після першої „зустрічі" з підмноговидом $M_{q_{i+1}} \subset \Gamma^{n-1}$ і після застосування дифеоморфізму φ_{i+1} відразу або через деякий час рухаються по точках підмноговиду $\mathcal{E}_{i+1} = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1})$, які вони вже „проходили" . Назвемо такі траєкторії *квазізамкненими*.

Разом з тим серед розривних траєкторій i-го поверху можуть бути такі, які після першої „зустрічі" з підмноговидом $M_{q_{i+1}}$ і після застосування дифеоморфізму φ_{i+1} рухаються по інших точках, ніж ті, які вони „проходили" перший раз до зустрічі з $M_{q_{i+1}}$. Але після скінченної кількості „зустрічей" з підмноговидом $M_{q_{i+1}}$ вони повертаються в ту точку на підмноговиді $M_{p_{i+1}}$, яку вони вже „проходили" . Назвемо такі траєкторії *квазіперіодичними*.

Градієнтне векторне поле з неперервною імпульсною дією. Знову, використовуючи попередні побудови, будемо розглядати наступне градієнтне векторне поле з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}, \psi)$.

Для цього припустимо, що гладка функція $g : M^n \longrightarrow [0,1]$ має скінченну кількість критичних точок і $0 = c_1 < c_2 < \ldots < c_{k-1} < c_k = 1$ — всі її критичні значення. Виберемо регулярні значення функції g

$$0 < q_1 < c_2 < q_2 < c_3 < \ldots < c_{k-1} < q_{k-1} < c_k = 1$$

і розглянемо гладкі підмноговиди $M_{q_i} = g^{-1}(q_i)$ та гладкі підмноговиди з особливостями $M_{c_i} = g^{-1}(c_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, корозмірності 1. Покладемо

$$\Gamma^{n-1} = \cup_i M_{q_i}, \quad \Sigma^{n-1}_{\text{sing}} = \cup_i M_{c_i}, \quad \psi = \cup_i, \quad X = \text{grad}_\rho g,$$

де неперервне відображення $\psi_i : M_{q_i} \longrightarrow M_{c_i}$ побудовано за допомогою інтегральних кривих векторного поля $-\text{grad}_\sigma g$. Рух точки у фазовому просторі M^n для такого градієнтного векторного поля з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}, \psi)$ відрізняється від попереднього випадку.

Рух відбувається по одній з інтегральних траєкторій $x(t)$ системи $\text{grad}_\rho g$ у проміжках між двома послідовними попаданнями цієї інтегральної траєкторії на підмноговид Γ^{n-1}.

У момент t_0 попадання траєкторії $x(t)$ на підмноговид Γ^{n-1} точка $x(t_0)$ „миттєво" переводиться неперервним відображенням ψ у точку $y = \psi(x(t_0))$ на підмноговид з особливостями $\Sigma^{n-1}_{\text{sing}}$.

Знову траєкторії векторного поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}, \psi)$ належать гладким n-вимірним некомпактним підмноговидам

$$\mathcal{D}^n_i = g^{-1}(q_i, q_{i+1}].$$

Таким чином, траєкторії, які беруть початок на підмноговиді $\dot{\mathcal{D}}^n_i = f^{-1}(q_i, q_{i+1})$ і досягають підмноговиду $M_{q_{i+1}}$, за допомогою відображення ψ_{i+1} переходять у траєкторії, що належать компактним n-вимірним множинам

$$\mathcal{E}_{i+1} = g^{-1}[c_{i+1}, q_{i+1}].$$

Очевидно, що для траєкторій, які беруть початок у точках, що належать гладким некомпактним n-вимірним підмноговидам

$$\mathcal{S}_i = g^{-1}(q_i, c_{i+1}),$$

є дві можливості:

а) прямувати до точки рівноваги векторного поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}, \psi)$, яка відповідає критичній точці функції $z = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і належить поверхні рівня $g^{-1}(c_{i+1})$;

б) попасти у точку, що належить підмноговиду $M_{q_{i+1}}$, і далі весь час залишатися на компактній підмножині

$$\mathcal{E}_{i+1} = g^{-1}[c_{i+1}, q_{i+1}].$$

Для траєкторій з пункту б) знову ж таки є дві можливості:

1) відразу або через скінченну кількість „зустрічей" з підмноговидом $M_{q_{i+1}}$ за допомогою відображення ψ_{i+1} попасти у точку рівноваги, що відповідає критичній точці функції $z = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і належить поверхні рівня $g^{-1}(c_{i+1})$; про такі траєкторії будемо говорити, що вони *закінчуються в сингулярних точках*;

2) весь час рухатися між $M_{c_{i+1}} = g^{-1}(c_{i+1})$ і $M_{q_{i+1}}$; іншими словами, знову буде „биття" цих інтегральних кривих об $(n-1)$-вимірний підмноговид $M_{q_{i+1}} \subset \Gamma^{n-1}$.

Означення 4. *Розривними траєкторіями i-го поверху градієнтного векторного поля з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ будемо називати траєкторії, які беруть початок на підмноговиді $\dot{\mathcal{D}}^n_i = f^{-1}(q_i, q_{i+1})$ і досягають підмноговиду $M_{q_{i+1}}$.*

Аналогічно, як і для гладкої дії, серед розривних траєкторій i-го поверху градієнтного векторного поля з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ можуть бути такі, які після першої „зустрічі" з підмноговидом $M_{q_{i+1}} \subset \Gamma^{n-1}$ і після застосування неперервного відображення ψ_{i+1} відразу або через деякий час рухаються по точках підмноговиду $\mathcal{E}_{i+1} = f^{-1}[c_{i+1}, q_{i+1}]$, які вони вже „проходили". Назвемо такі траєкторії *квазізамкненими*.

Водночас серед розривних траєкторій i-го поверху можуть бути такі, які після першої „зустрічі" з підмноговидом $M_{q_{i+1}}$ і після застосування відображення ψ_{i+1} рухаються по інших точках, ніж ті, які вони „проходили" першого разу до зустрічі з $M_{q_{i+1}}$. Але після скінченної кількості „зустрічей" з підмноговидом $M_{q_{i+1}}$ вони повертаються в ту точку на підмноговиді з особливостями $M_{c_{i+1}} \subset \Sigma^{n-1}_{\text{sing}}$ корозмірності 1, яку вони вже „проходили". Назвемо такі траєкторії *квазіперіодичними*.

5. Умови існування квазізамкнених траєкторій у градієнтних систем з гладкою імпульсною дією. Нехай $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ — градієнтне векторне поле з гладкою імпульсною дією, яке побудоване у попередньому пункті. Взагалі кажучи, векторне поле може не мати квазізамкнених траєкторій. У цьому пункті ми наведемо достатні умови для існування у $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ квазізамкнених траєкторій. Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 2. *Припустимо,що ейлерова характеристика $\chi(M^s_{p_i}) \neq 0$ для деякої компоненти зв'язності $M^s_{p_i} \subset M_{p_i}$. Тоді дифеоморфізм*

$$\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f) \,:\, M^s_{p_i} \longrightarrow M^s_{p_i}$$

має нерухому точку. Множина нерухомих точок $\mathrm{Fix}\,(\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f))$ дифеоморфізму $\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f)$ є компактною підмножиною в $M^s_{p_i}$.

Доведення. Відомо [3], що критерієм для існування нерухомих точок у неперервного відображення g компактного многовиду M самого в себе є відмінність від нуля числа Лєфшеця $\Lambda(g)$ для відображення g. У гомотопних відображень многовиду M числа Лєфшеця збігаються. Число Лєфшеця $\Lambda(Id)$ тотожного відображення довільного компактного многовиду M самого в себе дорівнює ейлеровій характеристиці $\chi(M)$ многовиду M. Таким чином, множина нерухомих точок $\mathrm{Fix}\,(\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f))$ дифеоморфізму

$$\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f) \,:\, M^s_{p_i} \longrightarrow M^s_{p_i}$$

завжди є непорожньою. Множина нерухомих точок у неперервного відображення компактного многовиду M завжди є замкненою. Довільна замкнена підмножина компактного топологічного простору завжди є компактом. Оскільки $M^s_{p_i} \subset M^n$ є компактним топологічним простором, то множина $\mathrm{Fix}\,(\Phi_i(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f))$ є компактною підмножиною в $M^s_{p_i}$.

Лему доведено.

Наступне твердження є наслідком леми 2 і містить достатню умову існування квазізамкненої траєкторії векторного поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$.

Твердження 3. *Нехай на гладкому замкненому многовиді M^n за допомогою ріманових метрик ρ, σ і гладкої функції $f \,:\, M^n \longrightarrow [0, 1]$ зі скінченною кількістю критичних значень побудовано градієнтне векторне поле з гладкою імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$. Якщо ейлерова характеристика $\chi(M^s_{p_{i+1}}) \neq 0$ для деякої компоненти зв'язності $M^s_{p_{i+1}} \subset \subset M_{p_{i+1}}$, то серед розривних траєкторій i-го поверху завжди існує квазізамкнена траєкторія. Перетином множини квазізамкнених траєкторій i-го поверху з підмноговидом $M^s_{p_{i+1}}$ є компактна підмножина в $M^s_{p_{i+1}}$.*

Зафіксуємо на многовиді M^n ріманову метрику $\zeta = \rho + \sigma$ і за допомогою метрики ζ перетворимо M^n у метричний простір, який будемо позначати через M^n_ζ.

Означення 5. *Нехай γ — квазізамкнена траєкторія i-го поверху векторного поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$. Трубчастим ϵ-околом траєкторії γ називається відкрита множина $U_\epsilon \subset M^n_\zeta$, яка утримує γ і така, що для довільної точки $z \in \gamma$ діаметр множини $f^{-1}(f(z)) \bigcap U_\epsilon$ не перевищує 2ϵ.*

Для довільної квазізамкненої траєкторії i-го поверху векторного поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ поняття стійкості будемо розуміти у наступному сенсі.

Означення 6. *Нехай* $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ *— градієнтне векторне поле з гладкою імпульсною дією на гладкому замкненому многовиді* M^n*. Припустимо, що* γ *— квазізамкнена траєкторія* i*-го поверху поля* $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$*. Будемо говорити, що вона орбітально стійка, якщо для кожного її* ϵ*-околу* U_ϵ *існує* δ*-окіл* $V_\delta \subset U_\epsilon$*, для якого виконується умова: довільна розривна траєкторія* i*-поверху* γ_1*, яка бере початок у* V_δ*, весь час залишається в* U_ϵ *і в подальшому після кожного „биття" об підмноговид* $M_{p_{i+1}}$*.*

Відомо [6], що поведінка гомеоморфізму в околі нерухомої точки може бути досить складною. Нам знадобиться наступне означення.

Означення 7. *Нехай* X *— компактний простір,* $F : X \longrightarrow X$ *— гомеоморфізм, у якого точка* $y \in X$ *є нерухомою точкою відображення* F*. Будемо говорити, що точка* y *є квазіпритягуючою нерухомою точкою, якщо для кожного околу* U *точки* y *знайдеться менший окіл* $V \subset U$ *цієї точки такий, що для довільного натурального числа* n $F^n(V) \subset U$ $(F^n = \underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{n})$*.*

Теорема 1. *Нехай на гладкому замкненому многовиді* M^n *задано градієнтне векторне поле з гладкою імпульсною дією* $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$*, яке побудоване за допомогою ріманових метрик* ρ*,* σ *і гладкої функції* $f : M^n \longrightarrow [0, 1]$ *зі скінченною кількістю критичних значень. Припустимо, що* γ *— квазізамкнена траєкторія* i*-го поверху поля* $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$*, яка перетинає підмноговид* $M_{p_{i+1}}$ *у точці* x*. Припустимо, що точка* x *є нерухомою квазіпритягуючою точкою для дифеоморфізму*

$$\Phi_{i+1}(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f) : M_{p_{i+1}} \longrightarrow M_{p_{i+1}}.$$

Тоді квазізамкнена траєкторія γ *буде орбітально стійкою.*

Доведення. Точка x завжди має трубчастий ε-окіл U, який не перетинає критичну поверхню рівня $f^{-1}(c_i)$ функції f. Нехай точка y знаходиться в цьому околі. Траєкторія γ_1, що проходить через точку y, буде, очевидно, розривною траєкторією i-го поверху для поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$. Використовуючи той факт, що довжини відрізків траєкторій γ і γ_1 від точок x і y і до перетину з підмноговидом $M_{q_{i+1}}$ є скінченними, можна зробити висновок, що γ_1 буде близькою до γ. Це завжди можна зробити, зменшуючи величину околу U. Оскільки точка x є квазіпритягуючою нерухомою точкою, то і після застосування відображення $\Phi_{i+1}(\mathrm{grad}_\sigma f, \mathrm{grad}_\rho f) : M_{p_{i+1}} \longrightarrow M_{p_{i+1}}$ наступна траєкторія буде близькою до γ.

Теорему доведено.

6. Умови існування квазізамкнених траєкторій градієнтних систем з неперервною імпульсною дією. Розглянемо градієнтне векторне поле з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$, яке побудоване у пункті 4. Як і для гладкого випадку, це векторне поле може не мати квазізамкнених траєкторій. У цьому пункті ми наведемо достатні умови для існування квазізамкнених траєкторій поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$.

Теорема 2. *Нехай на гладкому замкненому многовиді* M^n *за допомогою ріманових метрик* ρ*,* σ *і гладкої функції* $g : M^n \longrightarrow [0, 1]$ *зі скінченною кількістю критичних точок побудовано градієнтне векторне поле з неперервною імпульсною дією* $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$*. Припустимо, що:*

1) ейлерова характеристика $\chi(M^s_{q_{i+1}}) \neq 0$ для деякої компоненти зв'язності $M^s_{q_{i+1}} \subseteq \subseteq M_{q_{i+1}}$ регулярної гіперповерхні $M_{q_{i+1}}$;

2) для критичних точок $m_1, \ldots, m_t$ функції g, які належать $M_{c_{i+1}}$, виконується умова $\alpha_W(m_j) \bigcap \omega_V(m_j) \bigcap M^s_{q_{i+1}} = \varnothing$, де $V = -\mathrm{grad}_\sigma g$ і $W = \mathrm{grad}_\rho g$ $j = 1, \ldots, t$;

3) для тієї компоненти зв'язності $Q \subset f^{-1}(c_i, q_{i+1}]$, до якої належить $M^s_{q_{i+1}}$, знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що на $Q \bigcap f^{-1}(c_i, c_i + \varepsilon)$ ріманові метрики ρ і σ збігаються.

Тоді серед розривних траєкторій i-го поверху поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$ завжди існує квазізамкнена траєкторія.

Доведення. Нехай дійсне число $p_{i+1} \in (c_i, c_i + \varepsilon)$. Розглянемо гладкий підмноговид $M_{p_{i+1}} = f^{-1}(p_{i+1})$. Використавши підмноговиди $M_{p_{i+1}} = f^{-1}(p_{i+1})$ і $M_{q_{i+1}}$, ріманові метрики ρ, σ та гладку функцію $g : M^n \longrightarrow [0,1]$, побудуємо на M^n градієнтне векторне поле з гладкою імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$. Твердження 3 гарантує існування у $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}, \varphi)$ квазізамкненої траєкторії $\hat{\gamma}$. Згідно з умовами 2 і 3 траєкторія $\hat{\gamma}$ не належить множині $\alpha_W(m_j)$, тобто не буде прямувати у критичну точку функції g. Розглянемо продовження траєкторії $\hat{\gamma}$ до перетину з множиною $M_{c_{i+1}}$, яке позначимо через γ. Оскільки в околі множини $Q \bigcap f^{-1}(c_i, c_i+\varepsilon)$ ріманові метрики ρ і σ збігаються,то траєкторія γ буде квазізамкненою для градієнтного векторного поля з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$.

Теорему доведено.

Нехай y — точка перетину квазізамкненої траєкторії γ градієнтного векторного поля з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$ з множиною $M_{c_{i+1}}$. Розглянемо деякий окіл $U(y) \subset M_{c_{i+1}}$ точки y в $M_{c_{i+1}}$. Як і у гладкому випадку, для градієнтного векторного поля з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$ в околі $U(y)$ можна локально побудувати дифеоморфізм

$$\Phi_{i+1}(\mathrm{grad}_\sigma g, \mathrm{grad}_\rho g) : U(y) \longrightarrow U(y).$$

Теорема 3. *Нехай на гладкому замкненому многовиді M^n за допомогою ріманових метрик ρ, σ і гладкої функції $g : M^n \longrightarrow [0,1]$ зі скінченною кількістю критичних точок побудовано градієнтне векторне поле з неперервною імпульсною дією $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$. Припустимо, що γ — квазізамкнена траєкторія i-го поверху поля $(X, \Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{\mathrm{sing}}, \psi)$, яка перетинає множину $M_{c_{i+1}}$ у точці y. Припустимо, що точка y є нерухомою квазіпритягуючою точкою для дифеоморфізму*

$$\Phi_{i+1}(\mathrm{grad}_\sigma g, \mathrm{grad}_\rho g) : U(y) \longrightarrow U(y).$$

Тоді квазізамкнена траєкторія γ буде орбітально стійкою.

Доведення. Локалізуючи міркування, які було використано при доведенні теореми 1, легко отримати доведення і в цьому випадку.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.

2. *Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Устойчивость решений импульсных систем // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 1. — С. 98 – 111.

3. *Борисович Ю., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. — М.: Наука, 1995. — 415 с.

4. *Хирш М.* Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1979. — 279 с.

5. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. — М.: Мир, 1976. — 403 с.

6. *Палис Ж., Димелу В.* Геометрическая теория динамических систем. — М.: Мир, 1986. — 301 с.

Одержано 23.12.08