УДК 517.956

О ЗАДАЧАХ ГУРСА И ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Т. Д. Джураев

Ин-т математики АН Республики Узбекистан
Нац. ун-т Узбекистана
Узбекистан, 100174, Ташкент, ВУЗ городок

О. С. Зикиров

Нац. ун-т Узбекистана
Узбекистан, 100174, Ташкент, ВУЗ городок
e-mail: zikirov@yandex.ru

We study the question of unique solvability of Goursat and Dirichlet problem for a third order partial differential equation. We construct a Riemann function for a linear third order equation with a hyperbolic operator in the principal part, study some properties of the Riemann function, and then use them to prove theorems on existence of a unique solution of the above problems.

Вивчається питання про однозначну розв'язність задач Гурса і Діріхле для одного рівняння з частинними похідними третього порядку. Побудовано функцію Рімана для лінійного рівняння третього порядку з гіперболічним оператором у головній частині. Досліджено деякі властивості функцій Рімана, на основі яких доведено теореми існування та єдиності розв'язку вказаних задач.

1⁰. Уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей различных явлений и процессов. Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды [1], распространением акустических волн в слабонеоднородных средах [2] редуцируются к локальным и нелокальным задачам для уравнений в частных производных третьего порядка. Например, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{tt} - u_{xx}) + u_{tt} - \alpha u_{xx} = f(x,t)$$

описывает распространение линейных акустических волн в среде с дисперсией (см., например, [2]), где α — числовой параметр, принадлежащий интервалу $(0,1)$.

В односвязной области $D = \{(x,y) : 0 < x < l, 0 < y < h\}$ независимых переменных (x,y) рассмотрим линейное уравнение в частных производных третьего порядка

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) u_{xy} + Lu = f(x,y), \tag{1}$$

где α, β — заданные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а L — линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u.$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются заданными действительными функциями в области D.

Заметим, что уравнение (1) соответствует второму и третьему типу уравнений с частными производными третьего порядка, приведенных к каноническому виду [3].

Из (1) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $b(x, y) = c(x, y) = 0$ получаем уравнения, исследованные в работах [4–7].

Без ограничения общности будем предполагать, что $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, но $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x, y)$, имеющая в D все непрерывные частные производные, которые входят в уравнение, и удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

В настоящей работе для уравнения (1) исследуются следующие задачи.

Задача G. *Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

где $\varphi_i(y), \psi_i(x), i = 1, 2,$ — заданные функции, такие, что

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_2'(0), \quad \varphi_1'(0) = \psi_2(0), \quad \varphi_2'(0) = \psi_2'(0).$$

Задача Дирихле. *Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(0, y) = \widetilde{\varphi}_1(y), \quad u(l, y) = \widetilde{\varphi}_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \widetilde{\psi}_1(x), \quad u(x, h) = \widetilde{\psi}_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{5}$$

где $\widetilde{\varphi}_i(y), \widetilde{\psi}_i(x), i = 1, 2,$ — заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования:

$$\widetilde{\varphi}_1(0) = \widetilde{\psi}_1(0), \quad \widetilde{\varphi}_1(h) = \widetilde{\psi}_2(0), \quad \widetilde{\varphi}_2(0) = \widetilde{\psi}_1(l), \quad \widetilde{\varphi}_2(h) = \widetilde{\psi}_2(l).$$

Очевидно, что прямые $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ являются характеристиками уравнения (1), поэтому задачу (1)–(3) будем называть задачей Гурса.

2^0. Обратимся сначала к построению явного решения задачи Гурса (1)–(3) с помощью метода Римана.

Имеет место следующая теорема относительно разрешимости задачи G.

Теорема 1. *Если коэффициенты уравнения (1) и заданные функции удовлетворяют условиям*

$$a(x,y), b(x,y), c(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{6a}$$

$$a_1(x,y), b_1(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D), \quad c_1(x,y) \in C(D), \tag{6b}$$

$$f(x,y) \in C^1(\overline{D}), \quad f(0,y) = f(x,0) = 0, \tag{7a}$$

$$\varphi_i(y) \in C^2[0,h], \quad \psi_i(x) \in C^2[0,l], \quad i = 1,2, \tag{7b}$$

то задача G разрешима и притом единственным образом.

Доказательство. Пусть $u(x,y), v(x,y) \in C^2(\overline{D}) \cap C^3(D)$, тогда имеет место тождество

$$vMu - uM^*v = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{8}$$

Здесь

$$P = \alpha v u_{xy} - \alpha v_{xy} u - \beta v_y u_y + (av)u_x - (av)_x u + (bv)u_y - (bv)_y u + (a_1 v)u,$$

$$Q = \beta v u_{xy} - \beta v_{xy} u - \alpha v_x u_x + (bv)u_x - (bv)_x u + (cv)u_y - (cv)_y u + (b_1 v)u,$$

$$M^*v \equiv -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{xy} + (av)_{xx} + (2bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (a_1 v)_x - (b_1 v)_y + c_1 v.$$

Предположим, что P, Q непрерывны в области $\overline{D}$, а P_x, Q_y непрерывны и ограничены в D. Введем функцию Римана $v = v(x,y;\xi,\eta)$, которая однозначно определяется условиями

$$M^*v = 0, \tag{9}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta) = \omega_1(\xi,y), \quad v_x(\xi,y;\xi,\eta) = \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int_\eta^y a(\xi,t)\,dt\right), \tag{10}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta) = \omega_2(x,\eta), \quad v_y(x,\eta;\xi,\eta) = \exp\left(-\frac{1}{\beta}\int_\xi^x c(t,\eta)\,dt\right), \tag{11}$$

где $\omega_1(\xi, y)$ и $\omega_2(x, \eta)$ являются решениями соответственно следующих задач Коши:

$$\begin{gathered} \beta\omega_{1yy}(\xi, y) - b(\xi, y)\omega_{1y}(\xi, y) + a_1(\xi, y)\omega_1(\xi, y) = 0, \\ \omega_1(\xi, \eta) = 0, \quad \beta\omega_{1y}(\xi, \eta) = 1, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \alpha\omega_{2xx}(x, \eta) - b(x, \eta)\omega_{2x}(x, \eta) + b_1(x, \eta)\omega_2(x, \eta) = 0, \\ \omega_2(\xi, \eta) = 0, \alpha\omega_{2x}(\xi, \eta) = 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Очевидно, задачи (12) и (13) однозначно разрешимы.

С помощью функции Римана $v = v(x, y; \xi, \eta)$ легко получить представление общего решения уравнения (1) в области D.

Действительно, интегрируя равенство (8) по области $D_0 = \{(x, y) : 0 < x < \xi, 0 < < y < \eta\}$, где (ξ, η) — произвольная фиксированная точка области D, имеем

$$\begin{gathered} u(\xi, \eta) = \alpha v_x(0, \eta; \xi, \eta)u(0, \eta) + \beta v_y(\xi, 0; \xi, \eta)u(\xi, 0) - \int\limits_0^\xi [\beta v(x, 0; \xi, \eta)u_{xy}(x, 0) + \\ + c(x, 0)v(x, 0; \xi, \eta)u_y(x, 0) + A(x; \xi, \eta)u_x(x, 0) + B(x; \xi, \eta)u(x, 0)]\, dx - \\ - \int\limits_0^\eta [\alpha v(0, y; \xi, \eta)u_{xy}(0, y) + a(0, y)v(0, y; \xi, \eta)u_x(0, y) + A_1(y; \xi, \eta)u_y(0, y) + \\ + B_1(y; \xi, \eta)u(0, y)]\, dy + \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta v(x, y; \xi, \eta)f(x, y)\, dxdy. \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(x, \xi, \eta) &= -\alpha v_x(x, 0; \xi, \eta) + b(x, 0)v(x, 0; \xi, \eta), \\ B(x; \xi, \eta) &= -\beta v_{xy}(x, 0; \xi, \eta) - b(x, 0)v_x(x, 0; \xi, \eta) - \\ &\quad - c(x, 0)v_y(x, 0; \xi, \eta) - [b_x(x, 0) + c(x, 0) - b_1(x, 0)]v(x, 0; \xi, \eta), \\ A_1(y; \xi, \eta) &= -\beta v_y(0, y; \xi, \eta) + b(0, y)v(0, y; \xi, \eta), \\ B_1(y; \xi, \eta) &= -\alpha v_{xy}(0, y; \xi, \eta) - a(0, y)v_x(0, y; \xi, \eta) - \\ &\quad - b(0, y)v_y(0, y; \xi, \eta) - [a_x(0, y) + b_y(0, y) - a_1(0, y)]v(0, y; \xi, \eta). \end{aligned}$$

Формулу (14) можно рассматривать как представление общего решения уравнения (1), если считать, что $u(0, y)$, $u_x(0, y)$, $u(x, 0)$ и $u_y(x, 0)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

В силу граничных условий (2), (3) из формулы (14) получим представление решения задачи Гурса для уравнения (1) в виде

$$u(\xi,\eta) = \alpha v_x(0,\eta;\xi,\eta)\varphi_1(\eta) + \beta v_y(\xi,0;\xi,\eta)\psi_1(\xi) - \int\limits_0^{\xi} [\beta v(x,0;\xi,\eta)\psi_2'(x)+$$

$$+ c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)\psi_2(x) + A(x;\xi,\eta)\psi_1'(x) + B(x;\xi,\eta)\psi_1(x)]dx-$$

$$-\int\limits_0^{\eta} [\alpha v(0,y;\xi,\eta)\varphi_2'(y) + a(0,y)v(0,y;\xi,\eta)\varphi_2(y) + A_1(y;\xi,\eta)\varphi_1'(y)+$$

$$+ B_1(y;\xi,\eta)\varphi_1(y)]\,dy + \int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\eta} v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy. \tag{15}$$

Таким образом, формула (15) дает решения задачи G, если известно $v(x,y;\xi,\eta)$.

Покажем, что решение задачи (9) – (13) существует и единственно.

Теорема 2. *Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (6), то функция Римана $v(x,y)$ для оператора M существует, единственна и может быть построена методом последовательных приближений.*

Доказательство. Интегрируя уравнение (9) по x в пределах от ξ до x, по y в пределах от η до y, имеем

$$-\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v(x,y) + b(x,y)v(x,y) + \int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y} L^*v(t,\tau)d\tau\,dt = \alpha+\beta, \tag{16}$$

где

$$L^*v \equiv (av)_{xx} + (2bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (a_1v)_x - (b_1v)y + c_1v.$$

Из условий (10) и (11) следуют равенства

$$\alpha v_{xy} + a(x,y)v_x = 0, \quad \beta v_{xy} + c(x,y)v_y = 0.$$

В силу этих равенств после ряда преобразований из (16) получаем

$$v(x,y) = \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y} K_0 v(\overline{x}(s),\overline{y}(s))\,ds + \gamma(x,y). \tag{17}$$

Здесь

$$K_0 v(\overline{x}(s),\overline{y}(s)) = 2b(\overline{x}(s),\overline{y}(s))v(\overline{x}(s),\overline{y}(s)) + \int\limits_{\xi}^{\overline{x}(s)} [c_y(t,\overline{y}(s)) - b_1(t,\overline{y}(s))]v(t,\overline{y}(s))ds+$$

$$+\int\limits_{\eta}^{\overline{x}(s)} [a_x(\overline{x}(s),\tau) - a_1(\overline{x}(s),\tau)]v(\overline{x}(s),\tau)d\tau + \int\limits_{\xi}^{\overline{x}(s)}\int\limits_{\eta}^{\overline{y}(s)} c_1(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt,$$

$$\overline{x}(s) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta^2 x - \alpha\beta y + \alpha s\right), \quad \overline{y}(s) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\alpha\beta x + \alpha^2 y + \beta s\right),$$

$\gamma(x,y)$ — известная функция.

Таким образом, задача (10), (11) для уравнения (9) эквивалентна интегральному уравнению (17).

Очевидно, что интегральный оператор

$$Kv = \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y} K_0 v(\overline{x}(s),\overline{y}(s))ds + \gamma(x,y)$$

действует из $C(\overline{D})$ в $C(\overline{D})$.

Легко видеть, что для $v(x,y) = v_1(x,y) - v_2(x,y)$ имеет место оценка

$$|Kv| \leq \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)} M(\alpha x+\beta y)\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\|v\|,$$

где

$$\|v\| = \sup_D |v(x,y)|, \quad M = \max\{k_1,k_2,k_3,k_4\}, \quad k_1 = \sup_D |c_y(x,y) - b_1(x,y)|,$$

$$k_2 = \sup_D |a_x(x,y) - a_1(x,y)|, \quad k_3 = \sup_D |c_1(x,y)|, \quad k_4 = \sup_D |2b(x,y)|.$$

Далее,

$$\left|K^2 v\right| \leq \frac{1}{2^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\frac{M^2}{2!}(\alpha x+\beta y)^2\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]^2 \|v\|.$$

Для n-й степени оператора K имеем

$$|K^n v| \leq \frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\frac{M^n}{n!}(\alpha x+\beta y)^n\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]^n \|v\|.$$

Отсюда видно, что можно подобрать n такое, что

$$\frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\frac{M^n}{n!}(\alpha l+\beta h)^n\left[l^n + h^n\right] < 1.$$

Для этого n отображение K^n является сжимающим.

Из обобщенной теоремы о неподвижной точке следует, что интегральное уравнение (17) имеет решение и притом единственное.

Теорема 2 доказана.

Из построения функций Римана $v(x, y; \xi, \eta)$ непосредственно следует (см. [5]) справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. *Если*

$$a_1(x, y) < 0, \quad b_1(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in D, \tag{18}$$

то функции $v(x, y; \xi, \eta)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v(x, \eta; l, \eta) < 0 \quad \forall x \in [0, l), \quad \alpha v_x(0, \eta; l, \eta) > 1. \tag{19}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\alpha v_{xx}(x, \eta; l, \eta) - b(x, \eta) v_x(x, \eta; l, \eta) + b_1(x, \eta) v(x, \eta; l, \eta) = 0, \tag{20}$$

$$v(x, \eta; l, \eta)|_{x=l} = 0, \quad \alpha v_x(x, \eta; l, \eta)|_{x=l} = 1. \tag{21}$$

Уравнение (20) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha p(x; l, \eta) \, \frac{\partial v_x(x, \eta; l, \eta)}{\partial x} \right] + q(x, \eta) v(x, \eta; l, \eta) = 0, \tag{22}$$

где

$$p(x; l, \eta) = \exp \left[\int\limits_x^l b(t, \eta) dt \right], \quad q(x, \eta) = p(x; l, \eta) b_1(x, \eta).$$

Пусть $v = v(x, \eta; l, \eta)$, $0 \le x < l$, — решение уравнения (22), определяемое условиями (21). Тогда в силу принципа максимума и принципа Заремба – Жиро из (22) получаем $v(x, \eta; l, \eta) < 0 \ \forall x \in [0, l)$.

Интегрируя уравнение (22) в пределах от 0 до l и учитывая (21), имеем

$$\alpha p(x; l, \eta) v_x(0, \eta; l, \eta) = 1 + \int\limits_0^l q(t, \eta) v(t, \eta; l, \eta) \, dt.$$

Поскольку $v(x, \eta; l, \eta) < 0$ и $b_1(x, \eta) < 0$, из последного равенства получаем $\alpha v_x(0, \eta; l, \eta) > 1$.

Лемма 2. *Если выполнены условия (18), то функции* $v(x, y; \xi, \eta)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v(\xi, y; \xi, h) < 0 \ \forall \, y \in [0, h), \quad \beta v_y(\xi, 0; \xi, h) > 1.$$

Лемма 2 доказывается так же, как и лемма 1.

Для доказательства того, что функция (15) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), достаточно установить существование решения уравнения (1) при однородных краевых условиям $\varphi_i(y) = 0$, $\psi_i(x) = 0$, $i = 1, 2$.

В самом деле, введем вместо функции $u(x, y)$ новую неизвестную функцию

$$z(x,y) = u(x,y) - \left\{\varphi_1(y) + x\left[\varphi_2(y) - \psi_1'(0)\right] + \psi_1(x) + y\left[\psi_2(x) - \psi_2(0)\right] - \psi_2' xy - \psi_1(0)\right\},$$

которая удовлетворяет уравнению (1) с другой правой частью и однородным условиям

$$z(0,y) = z_x(0,y) = z(x,0) = z_y(x,0) = 0. \tag{23}$$

Используя свойство функции Римана [5], непосредственно проверкой нетрудно убедиться, что функция, определенная равенством (15), удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям (23).

Таким образом, однозначная разрешимость задачи Гурса доказана.

3^0. Рассмотрим теперь задачу Дирихле (4), (5) для уравнения (1).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (6) и выполнены неравенства:*

1) $a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2 \geq 0 \quad \forall \xi, \eta \in D$;

2) $a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1 < 0 \quad \forall (x,y) \in D$.

Тогда регулярное решение $u(x, y)$ задачи Дирихле единственно.

Доказательство. Покажем, что однородная задача Дирихле, т. е.

$$f(x,y) = 0, \quad \varphi_i(y) = \psi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2,$$

имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство этого факта проведем на основании интегрального тождества. Умножая уравнение (1) на функцию $u(x, y)$ и интегрируя по частям в области D, имеем

$$\int\!\!\int_D u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy}\,dxdy + \int\!\!\int_D uLudxdy = 0.$$

Преобразуем подынтегральные выражения следующим образом:

$$u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha u u_{xy} - \frac{\beta}{2}u_y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta u u_{xy} - \frac{\alpha}{2}u_x^2\right),$$

$$u(a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}) = \frac{\partial}{\partial x}\left[auu_x + buu_y - \frac{1}{2}(a_x + b_y)u^2\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[buu_x + cuu_y - \frac{1}{2}(b_x + c_y)u^2\right] - \left(au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2\right) + \frac{1}{2}(a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy})u^2,$$

$$u(a(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1u)^2 + \frac{\partial}{\partial y}(b_1u)^2\right] - \frac{1}{2}(a_{1x} + b_{1y} - 2c_1)u^2.$$

Применяя формулу Грина к последнему интегралу и учитывая однородные граничные условия, находим

$$\iint\limits_D \left(a(x,y)u_x^2 + 2b(x,y)u_xu_y + c(x,y)u_y^2\right) dxdy -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_D \left(a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1\right) u^2\, dxdy = 0.$$

Отсюда в силу условий теоремы 1 следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в области D.

Таким образом, теорема 3 доказана.

Имеет место следующая теорема существования решения задачи Дирихле.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (6) и*

$$\widetilde{\varphi}_i(y) \in C^2[0,h], \quad \widetilde{\psi}_i(x) \in C^2[0,l], \quad i = 1,2.$$

Тогда регулярное в области D решение $u(x,y)$ задачи Дирихле существует.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу Гурса для уравнения (1) с краевыми условиями

$$u(0,y) = \widetilde{\varphi}_1(y), \quad u_x(0,y) = \varphi(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{24}$$

$$u(x,0) = \widetilde{\psi}_1(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{25}$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$ — пока неизвестные функции.

Известно, что при выполнении условий теорем 2 и 4 решение вспомогательной задачи (1), (24), (25) существует и представимо в виде (15).

Для определение неизвестных функций $\varphi(y)$, $\psi(x)$ воспользуемся краевыми условиями $u(l,y) = \widetilde{\varphi}_2(y)$, $u(x,h) = \widetilde{\psi}_2(x)$. Тогда получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\alpha v(0,\eta;l,\eta)\varphi(\eta) + \int_0^\eta k_1(y,\eta)\varphi(y)dy + \int_0^l k_4(x,\eta)\psi(x)dx = g_1(\eta), \tag{26}$$

$$\beta v(\xi,0;\xi,h)\psi(\xi) + \int_0^\xi k_3(x,\xi)\psi(x)dx + \int_0^h k_4(y,\xi)\varphi(y)dy = g_2(\xi). \tag{27}$$

Здесь

$$k_1(y,\eta) = a(0,y)v(0,y;l,\eta) - \alpha v_y(0,y;l,\eta), \quad k_2(x,\eta) = c(x,0)v(x,0;l,\eta) - \beta v_x(x,0;l,\eta),$$

$$k_3(x,\xi) = c(x,0)v(x,0;\xi,h) - \beta v_x(x,0;\xi,h), \quad k_4(y,\xi) = a(0,y)v(0,y;\xi,h) - \alpha v_x(0,y;\xi,h),$$

а $g_1(\eta)$, $g_2(\xi)$ — некоторые известные непрерывно дифференцируемые функции.

Обращая вольтерровскую часть уравнения (26) относительно $\varphi(\eta)$, имеем

$$\varphi(\eta) = \overline{g_1(\eta)} - \int\limits_0^\eta K_1(x,\eta)\psi(x)\,dx, \tag{28}$$

где

$$\overline{g_1(\eta)} = \frac{g_1(\eta)}{\alpha v(0,\eta;l,\eta)} - \int\limits_0^\eta R_1(y,\eta)\,\frac{g_1(y)}{\alpha v(0,y;l,y)}\,dy,$$

$$K_1(x,\eta) = \frac{k_2(x,\eta)}{\alpha v(0,\eta;l,\eta)} + \int\limits_0^\eta R_1(y,\eta)\,\frac{k_2(x,y)}{\alpha v(0,y;l,y)}\,dy,$$

$R_1(y,\eta)$ — резольвента ядра $k_1(y,\eta)/(\alpha v(0,\eta;l,\eta))$.

Подставляя значение $\varphi(\eta)$ в уравнение (27), находим

$$\beta v(\xi,0;\xi,h)\psi(\xi) + \int\limits_0^\xi k_3(x,\xi)\psi(x)\,dx + \int\limits_0^l K_2(x,\xi)\psi(x)\,dx = \overline{g_2(\xi)}. \tag{29}$$

Здесь

$$K_2(x,\xi) = \int\limits_0^h k_4(y,\xi)K_1(x,y)dy,$$

$$\overline{g_2(\xi)} = g_2(\xi) - \int\limits_0^h k_4(y,\xi)\overline{g_1(y)}\,dy.$$

Наконец, обращая вольтерровскую часть уравнения (29), получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\psi(\xi) + \int\limits_0^l K_3(x,\xi)\psi(x)dx = g_3(\xi), \tag{30}$$

где

$$K_3(x,\xi) = \frac{K_2(x,\xi)}{\beta v(\xi,0;\xi,h)} + \int\limits_0^\xi R_3(x,\xi_1)\,\frac{K_2(\xi_1,\xi)}{\beta v(\xi_1,0;\xi_1,h)}\,d\xi_1,$$

$$g_3(\xi) = \frac{\overline{g_2(\xi)}}{\beta v(\xi,0;\xi,h)} + \int\limits_0^\xi R_3(x,\xi)\,\frac{\overline{g_2(x)}}{\beta v(x,0;x,h)}\,dx,$$

$R_3(x,\xi)$ — резольвента ядра $k_3(x,\xi)/(\beta v(\xi,0;\xi,h))$.

В силу условий теоремы 4 заметим, что $g_3(\xi)\in C^1[0,l]$, гладкость ядра $K_3(x,\xi)$ следует из свойств функции Римана.

Таким образом, разрешимость задачи Дирихле для уравнения (1) эквивалентно сведена к разрешимости интегрального уравнения (30).

В силу единственности решения задачи Дирихле и альтернативы Фредгольма уравнение (30) имеет единственное решение $\psi(\xi)$ из класса $C^1[0,l]$.

Таким образом, функция $\psi(\xi)$ найдена. Тогда другая неизвестная функция $\varphi(\eta)$ определяется по формуле (28). Подставляя значения этих функций в представление (15), полностью определяем решение задачи Дирихле для уравнения (1).

Теорема 4 доказана.

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
2. *Руденко О. В., Солуян С. Н.* Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975. — 287 с.
3. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. — 1991. — **27**, № 10. — С. 1734–1745.
4. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. — Казань: Казан. мат. о-во, 2001. — 226 с.
5. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. — 1982. — **18**, № 4. — С. 689–699.
6. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. Equat. — 1972. — **12**, № 3. — P. 559–565.
7. *Randell W.* The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncylindrical domains // Ibid. — 1978. — **27**, № 3. — P. 394–404.

Получено 05.10.07