УДК 517.9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. Н. Витюк, А. В. Михайленко

Одес. нац. ун-т
Ин-т математики, экономики и механики
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: 8012@mail.ru

We consider a Darboux problem for a fractional order differential equation that contains a regularized mixed derivative. Sufficient conditions for existence and uniqueness of a solution of this problem is obtained in the class of continuous functions. We also propose a method for finding an approximate solution of this problem, and prove convergence of the method.

Розглянуто задачу Дарбу для диференціального рівняння дробового порядку, яке містить регуляризовану мішану похідну. Отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в класі неперервних функцій. Запропоновано один метод наближеного розв'язання цієї задачі та доведено його збіжність.

Пусть $P = (0;a] \times (0;b]$, $\overline{P} = [0;a] \times [0;b]$, $0 < a, b < +\infty$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $r = (\alpha;\beta)$, $1 - r = (1-\alpha; 1-\beta)$. Для $f(x,y) \in L(P)$ левосторонним смешанным интегралом Римана – Лиувилля порядка r называем выражение [1, с. 341]

$$I_0^r f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-t)^{\alpha-1} (y-s)^{\beta-1} f(t,s)\, dt\, ds,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. В частности,

$$I_0^1 f(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(t,s)\, dt\, ds, \quad I_0^0 f(x,y) = f(x,y).$$

Левосторонней смешанной дробной производной Римана – Лиувилля порядка r называем функцию [1, с. 342]

$$D_0^r f(x,y) = D_{xy} f_{1-r}(x,y), \quad D_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad f_{1-r}(x,y) = I_0^{1-r} f(x,y),$$

а частной дробной производной Римана – Лиувилля порядка α по переменной x — функцию

$$D_{0x}^\alpha f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t,y)\, dt.$$

Пусть $g(x) : [0;a] \to R$, $m-1 < \nu < m$, $m \in N$. Тогда функцию

$$D_{0x}^{\nu} g(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \int\limits_0^x (x-t)^{m-\nu-1} g(t)\, dt \right)$$

называем [1, с. 44] левосторонней производной Римана – Лиувилля порядка ν функции $g(x)$.

Регуляризованной производной Римана – Лиувилля порядка ν от функции $g(x)$ является [2, 3] функция

$$\overline{D}_0^{\nu} g(x) = D_{0x}^{\nu} \left(g(x) - \sum_{k=0}^{m-1} g^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right),$$

а производной Капуто [3, 4] — функция

$$\widetilde{D}_0^{\nu} g(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \int\limits_0^x (x-t)^{m-\nu-1} g^{(m)}(t)\, dt.$$

Если $g(x) \in AC^m([0;a])$, то $\overline{D}_0^{\nu} g(x) = \widetilde{D}_0^{\nu} g(x)$ для почти всех (п.в.) $x \in [0;a]$.

Задача Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто изучалась в работах [3, 4], а с регуляризованной дробной производной — в работах [2, 5].

В настоящей работе рассматривается регуляризованная смешанная производная порядка r, получены условия существования и единственности решения задачи Дарбу для дифференциального уравнения, которое содержит эту производную, предложен численный метод решения этой задачи и доказана его сходимость.

1. Рассмотрим функцию $f(x,y) : \overline{P} \to R$ и пусть

$$\gamma(x,y) = f(x,0) + f(0,y) - f(0,0), \quad q(x,y) = f(x,y) - \gamma(x,y).$$

Смешанной регуляризованной производной функции $f(x,y)$ порядка r называем функцию

$$\overline{D}_0^{r} f(x,y) = D_0^r q(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} D_{xy} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{q(t,s)}{(x-t)^{\alpha}(y-s)^{\beta}}\, dt\, ds,$$

а смешанной производной Капуто того же порядка — функцию

$$\widetilde{D}_0^{r} f(x,y) = I_0^{1-r}\left(D_{xy} f(x,y)\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{D_{ts} f(t,s)}{(x-t)^{\alpha}(y-s)^{\beta}}\, dt\, ds.$$

Частной регуляризованной производной порядка α по переменной x называем функцию

$$\overline{D}_{0x}^{\alpha} f(x,y) = D_{0x}^{\alpha}\left(f(x,y) - f(0,y)\right).$$

Аналогично определяем производную $\overline{D}_{0y}^{\beta} f(x,y) = D_{0y}^{\beta}\left(f(x,y) - f(x,0)\right).$

Лемма 1. *Пусть* $f(x,y) \in AC\left(\overline{P}\right)$ *и* $f(x,0) = \varphi(x)$, $f(0,y) = \psi(y)$. *Тогда*

$$\overline{D}_0^r f(x,y) = \widetilde{D}_0^r f(x,y) \quad \text{для п.в.} \quad (x,y) \in \overline{P}, \tag{1}$$

$$I_0^r \overline{D}_0^r f(x,y) = f(x,y) - \gamma(x,y), \quad (x,y) \in \overline{P}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \overline{D}_{0x}^{\alpha} f(x,y) = I_0^{1-\alpha}\varphi'(x) + I_0^{\beta}\overline{D}_0^r f(x,y), \\ \overline{D}_{0y}^{\beta} f(x,y) = I_0^{1-\beta}\psi'(y) + I_0^{\alpha}\overline{D}_0^r f(x,y) \quad \text{для п.в.} \quad (x,y) \in \overline{P}. \end{gathered} \tag{3}$$

Доказательство. Поскольку $f(x,y) \in AC\left(\overline{P}\right)$, то [6]

$$f(x,y) = \gamma(x,y) + \int_0^x \int_0^y D_{ts} f(t,s)\, dt\, ds. \tag{4}$$

Используя (4), имеем

$$q_{1-r}(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \int_0^y (x-t)^{-\alpha}(y-s)^{-\beta} \left(\int_0^t \int_0^s D_{\tau z} f(\tau,z)\, d\tau\, dz \right) dt\, ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \int_0^y \left(\int_0^t \int_0^s (t-\tau)^{-\alpha}(s-z)^{-\beta} D_{\tau z} f(\tau,z)\, d\tau\, dz \right) dt\, ds.$$

Согласно определению производной $\overline{D}_0^r f(x,y)$ для п.в. $(x,y) \in \overline{P}$ получаем

$$\overline{D}_0^r f(x,y) = D_{xy} q_{1-r}(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \int_0^y \frac{D_{ts} f(t,s)\, dt\, ds}{(x-t)^{\alpha}(y-s)^{\beta}} = \widetilde{D}_0^r f(x,y).$$

Кроме того, для $(x,y) \in \overline{P}$

$$I_0^r \overline{D}_0^r f(x,y) = I_0^r I_0^{1-r} D_{xy} f(x,y) = I_0^1 D_{xy} f(x,y) = f(x,y) - \gamma(x,y).$$

Докажем (3). Принимая во внимание определение производной $\overline{D}_{0x}^{\alpha} f(x,y)$, находим

$$\overline{D}_{0x}^{\alpha} f(x,y) = D_{0x}^{\alpha}\left(f(x,y) - \psi(y)\right).$$

В силу (2) $f(x,y)-\psi(y) = \varphi(x)-\varphi(0)+I_0^r\overline{D}_0^r f(x,y)$. Следовательно,

$$\overline{D}_{0x}^{\alpha} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} I_0^{1-\alpha}\left(\varphi(x)-\varphi(0)+I_0^r\overline{D}_0^r f(x,y)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\int\limits_0^t \varphi'(\tau)d\tau + I_0^{1-\alpha}I_0^r\overline{D}_0^r f(x,y)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}\right) dt + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^y \frac{\overline{D}_0^r f(t,s)\,ds}{(y-s)^{1-\beta}}\right) dt\right) =$$

$$= I_0^{1-\alpha}\varphi'(x) + I_0^{\beta}\,\overline{D}_0^r f(x,y) \quad \text{для п.в.} \quad (x,y)\in\overline{P}.$$

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\overline{D}_0^r u(x,y) = F\left(x,y,u(x,y)\right), \tag{5}$$

решение которого удовлетворяет условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x\in[0;a], \tag{6}$$

$$u(0,y) = \psi(y), \quad y\in[0;b], \quad \varphi(0)=\psi(0), \tag{7}$$

причем $\varphi(x) \in AC([0;a])$, $\psi(y) \in AC([0;b])$ $(\gamma(x,y) = \varphi(x)+\psi(y)-\varphi(0))$. Решением задачи (5) – (7) называем такую функцию $u(x,y)\in C\left(\overline{P}\right)$, что $u_{1-r}(x,y)\in AC\left(\overline{P}\right)$, удовлетворяет условиям (6), (7) и дифференциальному уравнению (5) п.в. на $\overline{P}$.

Пусть функция

$$F(x,y,u) : G\to R, \quad G = \left\{(x,y,u) : (x,y)\in\overline{P},\ |u|\le \max_{\overline{P}}|\gamma(x,y)|+d\right\}$$

удовлетворяет условиям:

а) измерима по (x,y) для каждого u и непрерывна по u для $(x,y)\in\overline{P}$;
б) существует постоянная $M>0$ такая, что $|F(x,y,u)|\le M$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $u(x,y)\in C\left(\overline{P}\right)$ была решением задачи (5) – (7), необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения*

$$u(x,y) = \gamma(x,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{F\left(t,s,u(t,s)\right)\,dt\,ds}{(x-t)^{1-\alpha}(y-s)^{1-\beta}}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)\in C\left(\overline{P}\right)$ является решением задачи (5) – (7). Тогда

$$q_{1-r}(x,y) = u_{1-r}(x,y) - \gamma_{1-r}(x,y) \in AC\left(\overline{P}\right). \tag{9}$$

Если $\max\limits_{\overline{P}} |q(x,y)| \le B$, то для $(x,y) \in P$

$$|q_{1-r}(x,y)| \le \frac{Bx^{1-\alpha}y^{1-\beta}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(2-\beta)}. \tag{10}$$

Из (9), (10) следует, что

$$q_{1-r}(x,0) = q_{1-r}(0,y) = 0, \quad x \in [0;a], \quad y \in [0;b]. \tag{11}$$

В соответствии с определением производной $\overline{D}_0^r u(x,y)$ и (11) имеем соотношение

$$I_0^1 \overline{D}_0^r u(x,y) = q_{1-r}(x,y),$$

которое представим в виде

$$I_0^{1-r}\left(I_0^r\,\overline{D}_0^r u(x,y) - q(x,y)\right) = 0. \tag{12}$$

Применяя к (12) последовательно операции I_0^r и D_{xy}, находим, что $I_0^r\,\overline{D}_0^r\,u(x,y) = q(x,y)$ для п.в. $(x,y) \in \overline{P}$ или согласно (5)

$$I_0^r\,F\left(x,y,u(x,y)\right) = q(x,y). \tag{13}$$

Докажем, что $\mu(x,y) = I_0^r F\left(x,y,u(x,y)\right) \in C\left(\overline{P}\right)$. Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_1) \in P$ и $x_1 < < x_2$. Тогда

$$|\mu(x_2,y_1) - \mu(x_1,y_1)| \le$$

$$\le \frac{M}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1}\left((x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1}\right)(y_1-s)^{\beta-1}\,dt\,ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_0^{y_1}(x_2-t)^{\alpha-1}(y_1-s)^{\beta-1}\,dt\,ds\right) \le$$

$$\le \frac{Mb^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\left(2(x_2-x_1)^\alpha - (x_2^\alpha - x_1^\alpha)\right) \le \frac{2Mb^\beta(x_2-x_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}, \tag{13 a}$$

так как $x_2^\alpha - x_1^\alpha \le (x_2-x_1)^\alpha$. Если же $(x_1,y_1),(x_1,y_2) \in P$ и $y_1 < y_2$, то аналогично получаем

$$|\mu(x_1,y_2) - \mu(x_1,y_1)| \le \frac{2Ma^\alpha(y_2-y_1)^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Следовательно, $\mu(x,y) \in C(P)$. А так как

$$|\mu(x,y)| \le \frac{Mx^\alpha y^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

то $\mu(x,y)$ можно продолжить по непрерывности так, что $\mu(x,y) \in C\left(\overline{P}\right)$ и

$$\mu(x,0) = \mu(0,y) = 0, \quad x \in [0;a], \quad y \in [0;b]. \tag{14}$$

Отсюда с учетом непрерывности $q(x,y)$ следует, что (13) справедливо для $(x,y) \in \overline{P}$. Таким образом, решение $u(x,y) \in C\left(\overline{P}\right)$ задачи (5) – (7) удовлетворяет уравнению (8).

Пусть $u(x,y) \in C\left(\overline{P}\right)$ является решением уравнения (8). В силу (14) функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (6), (7). Поскольку $q_{1-r}(x,y) = I_0^1 F\left(x,y,u(x,y)\right) \in AC\left(\overline{P}\right)$, то

$$\overline{D}_0^r u(x,y) = D_0^r q(x,y) = D_{xy} q_{1-r}(x,y) = F\left(x,y,u(x,y)\right)$$

для п.в. $(x,y) \in \overline{P}$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть числа a и b такие, что*

$$\frac{Ma^\alpha b^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \le d$$

и функция $F : G \to R$ удовлетворяет условиям а), б). Тогда множество решений задачи (5) – (7) непусто.

Доказательство. Пусть

$$x_i = ih, \quad y_j = j\tau, \quad nh = a, \quad n\tau = b,$$

$$P_{-1} = [-h;a] \times [-\tau;b], \quad P_i = [x_i;a] \times [y_i;b], \quad i = \overline{0,n-1},$$

$$S_i = P_i \backslash P_{i+1}, \quad i = \overline{-1,n-2}, \quad S_{n-1} = P_{n-1}.$$

Построим последовательность $u_n(x,y)$, $n \ge 1$, положив $u_1(x,y) = \gamma(x,y)$, $(x,y) \in P_0$. Функцию $u_n(x,y)$, $n \ge 2$, последовательно строим в областях $S_{-1}, S_0, \quad , S_{n-1}$, полагая $u_n(x,y) = \gamma(x,y)$ для $(x,y) \in S_{-1}$ и

$$u_n(x,y) = \gamma(x,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \frac{F\left(t,s,u_n(t-h,s-\tau)\right) dtds}{(x-t)^{1-\alpha}(y-s)^{1-\beta}} \tag{15}$$

для $(x,y) \in S_k$ при условии, что функция $u_n(x,y)$ уже определена для $(x,y) \in \bigcup_{i=0}^{k-1} S_i$.

Для $(x,y) \in \overline{P}$ согласно (15) получаем

$$|u_n(x,y)| \le \max_{\overline{P}} |\gamma(x,y)| + \frac{Ma^\alpha b^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \le \max_{\overline{P}} |\gamma(x,y)| + d. \tag{16}$$

Кроме того, для $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \overline{P}$ таких, что $|x_2-x_1| \le \delta_1$, $|y_2-y_1| \le \delta_2$, как и при получении оценки (13 а), доказываем, что

$$|u_n(x_2,y_2) - u_n(x_1,y_1)| \le \frac{2M\max\left(a^\alpha, b^\beta\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\left(\delta_1^\alpha + \delta_2^\beta\right) + \omega\left(\varphi;\delta_1\right) + \omega\left(\psi;\delta_2\right), \tag{17}$$

где $\omega\,(f;\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Из оценок (16), (17) следует, что последовательность $u_n(x,y)$, $n\ge 1$, является ограниченной и равностепенно непрерывной и в соответствии с теоремой Арцела из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности, можно считать, что сама последовательность $u_n(x,y)$, $n\ge 1$, равномерно на $\overline{P}$ сходится к $v(x,y)\in C\left(\overline{P}\right)$, причем $|v(x,y)|\le \max_{\overline{P}}|\gamma(x,y)|+d$.

Докажем, что последовательность $u_n(x-h,y-\tau)$, $n\ge 1$, также равномерно на $\overline{P}$ сходится к функции $v(x,y)$. Для $(x,y)\in\overline{P}$ имеем

$$|u_n(x-h,y-\tau)-v(x,y)|\le |u_n(x-h,y-\tau)-u_n(x,y-\tau)|+|u_n(x,y-\tau)-u_n(x,y)|+$$
$$+\,|u_n(x,y)-v(x,y)| = A_1+A_2+A_3, \tag{18}$$

причем

$$A_1\le\frac{M}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int\limits_0^{x-h}\int\limits_0^{y-\tau}\left((x-h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}\right)(y-\tau-s)^{\beta-1}\,dt\,ds\,+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{x-h}^{x}\int\limits_0^{y-\tau}(x-t)^{\alpha-1}(y-\tau-s)^{\beta-1}\,dt\,ds\right]\le$$
$$\le\frac{M(y-\tau)^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\left(2h^\alpha-(x^\alpha-(x-h)^\alpha)\right)\le\frac{2Mb^\beta h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}, \tag{19}$$

$$A_2\le\frac{2Ma^\alpha\tau^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Теперь из оценок (18), (19) следует нужное утверждение. Из (15) при $n\to\infty$ в силу теоремы Лебега [7, с. 39] следует, что

$$v(x,y)=\gamma(x,y)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x\int\limits_0^y\frac{F\left(t,s,v(t,s)\right)\,dt\,ds}{(x-t)^{1-\alpha}\,(y-s)^{1-\beta}}.$$

Согласно теореме 1 $v(x,y)$ — решение задачи (5) – (7).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть функция $F(x,y,u)\,:\;G\to R$ измерима по (x,y) при каждом u, удовлетворяет условию Липшица по u с постоянной K для любых фиксированных $(x,y)\in\overline{P}$, а также условию б). Тогда задача (5) – (7) имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)\in\overline{P}$ также является решением интегрального уравнения (8) и $z(x,y)=|v(x,y)-u(x,y)|$. Тогда

$$z(x,y)\le (Tz)(x,y),\quad (Tz)(x,y)=\frac{K}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x\int\limits_0^y\frac{z(t,s)dtds}{(x-t)^{1-\alpha}(y-s)^{1-\beta}},$$

причем $z(x,0) = z(0,y) = 0, x \in [0;a], y \in [0;b]$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\rho(x,y) = (T\rho)(x,y) + \varepsilon, \tag{20}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Непосредственной проверкой убеждаемся, что решением уравнения (20) является функция

$$\rho(x,y) = \varepsilon E_r\left(Kx^{\alpha}y^{\beta}\right), \quad E_r(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^k}{\Gamma(k\alpha+1)\Gamma(k\beta+1)}.$$

Очевидно, что

$$z(x,0) < \rho(x,0) = \varepsilon, \quad x \in [0;a], \quad z(0,y) < \rho(0,y) = \varepsilon, \quad y \in [0;b]. \tag{21}$$

Докажем, что $z(x,y) < \rho(x,y)$ для $(x,y) \in P$. Предположим, что это утверждение неверно, и пусть S — множество таких точек области P, что $z(x,y) \geq \rho(x,y)$.

Рассмотрим функцию $\lambda(x,y) = x+y$ и пусть $\overline{\lambda} = \inf_S \lambda(x,y)$. Предположим, что этот инфимум достигается в некоторой точке $(\overline{x},\overline{y}) \in S$, т. е. $\overline{\lambda} = \lambda(\overline{x},\overline{y})$. Тогда в области $([0;\overline{x}] \times [0;\overline{y}]) \backslash \{(\overline{x},\overline{y})\}$

$$z(x,y) < \rho(x,y).$$

С другой стороны, $z(\overline{x},\overline{y}) \leq (Tz)(\overline{x},\overline{y}) \leq (T\rho)(\overline{x},\overline{y}) < (T\rho)(\overline{x},\overline{y}) + \varepsilon = \rho(\overline{x},\overline{y})$. Следовательно, $(\overline{x},\overline{y}) \notin S$, т. е. предположение, что $(\overline{x},\overline{y}) \in S$, неверно.

Тогда существует последовательность $(x_i,y_i) \in S$, $i \geq 1$ такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda(x_i,y_i) = \overline{\lambda}$. Если $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ — предельная точка этой последовательности, то в силу непрерывности функций $z(x,y)$ и $\rho(x,y)$ в области $\overline{P}$ получим $z(\widetilde{x},\widetilde{y}) \geq \rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$. Поскольку $(\widetilde{x},\widetilde{y}) \notin S$, то $(\widetilde{x},\widetilde{y}) \in \overline{P} \setminus P$, но это противоречит (21). Следовательно, множество S пусто. Таким образом, доказано, что $z(x,y) < \rho(x,y)$ для $(x,y) \in \overline{P}$.

Принимая во внимание тот факт, что $\rho(x,y) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на $\overline{P}$, получаем, что $z(x,y) = 0$ для $(x,y) \in P$.

Теорема 3 доказана.

3. Рассмотрим один метод численного решения задачи (5)–(7). Предполагаем, что функция $F(x,y,u): G \to R$ непрерывна по совокупности переменных (x,y,u), удовлетворяет условию Липшица с постоянной K по переменной u для любых фиксированных $(x,y) \in \overline{P}$, а также условию б).

Пусть $Q_{h\tau} = \{(x_i,y_j): x_i = ih,\ y_j = j\tau;\ N_1 h = a,\ N_2\tau = b\}$, $P_{ij} = [x_i;x_{i+1}] \times [y_i;y_{i+1}]$. Через u_{ij} обозначим приближенное значение $u(x_i,y_j)$, а $\gamma_{ij} = \gamma(x_i,y_j)$. Для $0 \leq$

$\leq n \leq N_1 - 1, 0 \leq m \leq N_2 - 1$ согласно (8)

$$u\left(x_{n+1}, y_{m+1}\right) = \gamma_{n+1,m+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{x_{n+1}} \int\limits_0^{y_{m+1}} \frac{F\left(t, s, u(t,s)\right)\, dt\, ds}{\left(x_{n+1} - t\right)^{1-\alpha} \left(y_{m+1} - s\right)^{1-\beta}} =$$

$$= \gamma_{n+1,m+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{F\left(t, s, u(t,s)\right)\, dt\, ds}{\left(x_{n+1} - t\right)^{1-\alpha} \left(y_{m+1} - s\right)^{1-\beta}} \approx$$

$$\approx \gamma_{n+1,m+1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{F\left(x_i, y_j, u_{ij}\right)\, dt\, ds}{\left(x_{n+1} - t\right)^{1-\alpha} \left(y_{m+1} - s\right)^{1-\beta}}.$$

Таким образом, за приближенное решение задачи (5) – (7) в узле (x_{n+1}, y_{m+1}) принимаем величину

$$u_{n+1,m+1} = \gamma_{n+1,m+1} +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} F\left(x_i, y_j, u_{ij}\right) \left(x_{n-i+1}^{\alpha} - x_{n-i}^{\alpha}\right) \left(y_{m-j+1}^{\beta} - y_{m-j}^{\beta}\right). \tag{22}$$

Пусть $\delta_{ij} = u\left(x_i, y_j\right) - u_{ij}$. Тогда согласно (8) и (21) получаем

$$\left|\delta_{n+1,m+1}\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\left|F\left(t, s, u(t,s)\right) - F\left(x_i, y_j, u_{ij}\right)\right|\, dt\, ds}{\left(x_{n+1} - t\right)^{1-\alpha} \left(y_{m+1} - s\right)^{1-\beta}}. \tag{23}$$

Для $(x, y) \in P_{ij}$ имеем

$$\left|F\left(x, y, u(x,y)\right) - F\left(x_i, y_j, u_{ij}\right)\right| \leq \left|F\left(x, y, u(x,y)\right) - F\left(x_i, y_j, u(x,y)\right)\right| +$$
$$+ \left|F\left(x_i, y_j, u(x,y)\right) - F\left(x_i, y_j, u(x_i, y_j)\right)\right| + \left|F\left(x_i, y_j, u(x_i, y_j) - F\left(x_i, y_j, u_{ij}\right)\right|\right. \leq$$
$$\leq \omega\left(F; h; \tau; 0\right) + K\left|u(x,y) - u(x_i, y_j)\right| + K\left|\delta_{ij}\right|,$$

где

$$\omega\left(F; h; \tau; 0\right) = \sup_u \sup\left(\left|F\left(x, y, u\right) - F\left(x_i, y_j, u\right)\right| : \ (x, y) \in P_{ij}\right)$$

— частный модуль непрерывности [6, с. 124] функции $F\left(x, y, u\right)$, а также

$$\left|u(x,y) - u(x_i, y_j)\right| \leq \left|\gamma(x,y) - \gamma(x_i, y_j)\right| +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left|\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{F\left(t,s,u(t,s)\right)\,dt\,ds}{(x-t)^{1-\alpha}\,(y-s)^{1-\beta}}-\int\limits_0^{x_i}\int\limits_0^{y_j}\frac{F\left(t,s,u(t,s)\right)\,dt\,ds}{(x_i-t)^{1-\alpha}\,(y_j-s)^{1-\beta}}\right|\le$$

$$\le\omega(\varphi;h)+\omega(\psi;\tau)+$$

$$+\frac{M}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left\{\int\limits_0^{x_i}\int\limits_0^{y_j}\left((x_i-t)^{\alpha-1}\,(y_j-s)^{\beta-1}-(x-t)^{\alpha-1}\,(y-s)^{\beta-1}\right)\,dt\,ds+\right.$$

$$+\int\limits_{x_i}^{x}\int\limits_0^{y_j}(x-t)^{\alpha-1}\,(y-s)^{\beta-1}\,dt\,ds+\int\limits_0^{x_i}\int\limits_{y_j}^{y}(x-t)^{\alpha-1}\,(y-s)^{\beta-1}\,dt\,ds+$$

$$\left.+\int\limits_{x_i}^{x}\int\limits_{y_j}^{y}(x-t)^{\alpha-1}\,(y-s)^{\beta-1}\,dt\,ds\right\}.$$

Проводя несложные преобразования, для $(x,y)\in P_{ij}$ получаем

$$|u(x,y)-u(x_i,y_j)|\le T(h,\tau),\quad T(h,\tau)=\omega(\varphi;h)+\omega(\psi;\tau)+\frac{2M\left(h^\alpha+\tau^\beta\right)\max\left(a^\alpha,b^\beta\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Таким образом,

$$|F\left(x,y,u(x,y)\right)-F\left(x_i,y_j,u_{ij}\right)|\le Y+K\left|\delta_{ij}\right|, \tag{24}$$

где $Y=\omega\left(F;h;\tau;0\right)+KT(h,\tau)$.

Из (23) с учетом оценки (24) находим

$$|\delta_{n+1,m+1}|\le\frac{K}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}|\delta_{ij}|\left(x^\alpha_{n-i+1}-x^\alpha_{n-i}\right)\left(y^\beta_{m-j+1}-y^\beta_{m-j}\right)+V, \tag{25}$$

где $V=\dfrac{Ya^\alpha b^\beta}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}$, $n=\overline{0,N_1-1}$, $m=\overline{0,N_2-1}$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть сеточные функции $v:\ Q_{h\tau}\to R$, $w:\ Q_{h\tau}\to R_+$ таковы, что*

$$|v_{n+1,m+1}|\le\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}|v_{ij}|\left(x^\alpha_{n-i+1}-x^\alpha_{n-i}\right)\left(y^\beta_{m-j+1}-y^\beta_{m-j}\right)+B, \tag{26}$$

$$w_{n+1,m+1}\ge\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}w_{ij}\left(x^\alpha_{n-i+1}-x^\alpha_{n-i}\right)\left(y^\beta_{m-j+1}-y^\beta_{m-j}\right)+B, \tag{27}$$

$$n = \overline{0, N_1 - 1}, \quad m = \overline{0, N_2 - 1},$$

причем

$$A > 0, \quad B > 0, \quad v_{i0} = v_{0j} = 0, \quad w_{i0} = w_{0j} = B, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}.$$

Тогда

$$|v_{ij}| \leq w_{ij}, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}, \tag{28}$$

а соотношениям (27) удовлетворяют $w_{ij} = \sigma(x_i, y_j)$, *где* $\sigma(x, y)$ *— решение интегрального уравнения*

$$\sigma(x, y) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^y (x - t)^{\alpha - 1} (y - s)^{\beta - 1} \sigma(t, s)\, dt\, ds + B. \tag{29}$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы 4 $|v_{i0}| \leq w_{i0}$, $|v_{0j}| \leq w_{0j}$, $i = \overline{0, N_1}$, $j = \overline{0, N_2}$. Справедливость соотношений (28) легко доказать индукцией. Докажем, что $w_{ij} = \sigma(x_i, y_j)$ удовлетворяет соотношениям (27). Поскольку $\sigma(x, y) > 0$ и $\sigma(x_i, y_j) \leq \sigma(x, y)$ для $(x, y) \in P_{ij}$, то

$$\sigma(x_{n+1}, y_{m+1}) = \frac{A}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha - 1} (y_{m+1} - s)^{\beta - 1} \sigma(t, s) dt ds + B \geq$$

$$\geq \frac{A}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sigma(x_i, y_j) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha - 1} (y_{m+1} - s)^{\beta - 1}\, dt\, ds + B =$$

$$= \frac{A}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sigma(x_i, y_j) \left(x_{n-j+1}^{\alpha} - x_{n-i}^{\alpha}\right) \left(y_{m-j+1}^{\beta} - y_{m-j}^{\beta}\right) + B.$$

Теорема 4 доказана.

Рассмотрим сеточную функцию $\delta : Q_{h\tau} \to R$ и интегральное уравнение (29) при $A = K$, $B = V$. Тогда из (25) на основании теоремы 4 с учетом того, что $\sigma(x, y) = VE_r\left(Kx^{\alpha}y^{\beta}\right)$, следует оценка

$$|\delta_{mn}| \leq \sigma(x_n, y_m) \leq VE_r\left(Ka^{\alpha}y^{\beta}\right).$$

Остается учесть, что $V \to 0$ при $h \to 0, \tau \to 0$. Если $F(x, y, u)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным x, y, а также удовлетворяют условию Липшица функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, то $|\delta_{nm}| = O\left(h^{\alpha} + \tau^{\beta}\right)$ при $h \to 0, \tau \to 0$.

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. Н.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Техника, 1987. — 688 с.

2. *Кочубей А. Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. — 1989. — **25**, № 8. — С. 1359 – 1367.

3. *Килбас А. А., Марзан С. А.* Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно дифференцируемых функций // Там же. — 2005. — **41**, № 1. — С. 82 – 86.

4. *Килбас А .А., Марзан С. А.* Задача Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто // Докл. РАН. — 2004. — **339**, № 1. — С. 7 – 11.

5. *Эйдельман С. Д., Чикрий А. А.* Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 11. — С. 1566 – 1583.

6. *Walczak S.* Absolutely continuous functions of several variables and their application to differential equations // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 1987. — **35**, № 11 – 12. — P. 733 – 744.

7. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. — М.: Наука, 1967. — 220 с.

8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1965. — 624 с.

Получено 03.04.07