УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, БЛИЗКОЙ К ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ

В. М. Харьков

Одес. нац. ун-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: kharkov_v_m@mail.ru

We find asymptotic representations for a class of solutions of a second order differential equation that has a nonlinearity close to an exponential.

Встановлено асимптотичні зображення для одного класу розв'язків диференціального рівняння другого порядку з нелінійністю, близькою до експоненціальної.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega) \to (0, +\infty)$, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, — непрерывная функция, $\varphi : I \to (0, +\infty)$ (I — левая или правая окрестность y_0, $|y_0| \leq +\infty$) — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in I, \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in I}} \varphi(y) = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in \{0, +\infty\}, \quad \text{и при некотором} \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in I}} L_k(\varphi(y))\,(F_k(y) - 1) = \gamma_k, \quad \gamma_k \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

где функции $L_k : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F_k : I \to \mathbb{R}$ задаются рекуррентными соотношениями

$$L_r(z) = \ln|L_{r-1}(z)|, \quad L_1(z) = \ln z, \quad z \in (0, +\infty),$$
$$F_r(y) = L_{r-1}(\varphi(y))\,(F_{r-1}(y) - 1), \quad F_1(y) = \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)}, \quad r = 2, \ldots, k. \tag{1.3}$$

В работе исследуется асимптотика решений уравнения (1.1), определенных в левой окрестности точки ω, таких, что $\lim\limits_{t \to \omega} y(t) = y_0$.

В [1] было изучено асимптотическое поведение решений уравнения (1.1), принадлежащих классу так называемых $\widetilde{P}_\omega(\lambda)$-функций, где функция $\varphi(y)$ удовлетворяла предельному соотношению $\lim\limits_{y \to y_0} F_1(y) = \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Однако, несмотря на то, что для γ допускалось значение 1 (т. е. функция $\varphi(y)$ могла иметь порядок роста выше степенного, например экспоненциальный), на порядок роста функции $p(t)$ было наложено достаточно жесткое ограничение. В настоящей статье предпринята попытка ослабить данное ограничение при $\gamma = 1$.

Определение. *Решение y уравнения (1.1), заданное на промежутке* $[t_y, \omega) \subseteq [a, \omega)$, *будем называть* $\widetilde{P}_\omega^k(\lambda)$*-решением* ($k \in \mathbb{N}$), *если функция* $z(t) = \varphi(y(t))$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & +\infty, \end{cases} \quad \lim_{t\uparrow\omega} z'(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty \end{cases} \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} L_k(z(t))\,(G_k(t) - 1) = \lambda,$$

где $L_k(z)$ *определена в* (1.3), *а* $G_k(t)$ *задается рекуррентным соотношением*

$$G_k(t) = L_{k-1}(z(t))\,(G_{k-1}(t) - 1)\,, \quad G_1(t) = \frac{z''(t)z(t)}{z'^2(t)}.$$

Пусть $z_0 \in \operatorname{Im}\varphi(I)$. Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = \infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < \infty, \end{cases} \qquad M_k(z) = \prod_{r=1}^{k} L_r(z), \quad z \in (0, +\infty),$$

$$A = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau = \infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau < \infty, \end{cases} \qquad B = \begin{cases} z_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))M_k(s)|}} = \infty, \\ \varphi_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))M_k(s)|}} < \infty, \end{cases}$$

$$\rho = \operatorname{sign}\varphi'(y)M_k(\varphi(y)), \quad \rho_L = \operatorname{sign} M_k(\varphi(y)).$$

Теорема 1.1. *Для существования* $\widetilde{P}_\omega^k(\lambda)$*-решений,* $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1, \gamma_k\}$, *уравнения (1.1) необходимо, чтобы*

$$\alpha_0\rho(\lambda - \gamma_k) > 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\sqrt{p(t)}}{\int_A^t \sqrt{p(\tau)}d\tau M_k\left(\left|\int_A^t \sqrt{p(\tau)}d\tau\right|\right)} = \frac{1}{1-\lambda} \tag{1.4}$$

и интегралы

$$\int_a^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau \quad \text{и} \quad \int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))M_k(s)|}} \tag{1.5}$$

сходились или расходились одновременно. Более того, для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические представления

$$\frac{\varphi'(y(t))}{M_k(\varphi(y(t)))} = \frac{\lambda-\gamma_k}{\alpha_0}\frac{1+o(1)}{\left(\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau M_k\left(\left|\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)\right)^2},$$
$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\alpha_0\left(\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau M_k\left(\left|\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)\right)^2}{(\lambda-\gamma_k)(1-\lambda)\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \tag{1.6}$$

Теорема 1.2. *Пусть $\alpha\varphi'(y) > 0$ при $y \in I$ и выполняются условия (1.4), (1.5). Тогда для существования $\widetilde{P}_\omega^k(\lambda)$-решений уравнения (1.1) достаточно выполнения условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{2\pi_\omega(t)\sqrt{p(t)}}{\displaystyle\int_A^t \sqrt{p(\tau)}d\tau M_k\left(\varphi\left(h(t)\right)\right)} + \frac{1}{1-\lambda}\right)\sqrt{M_k\left(\varphi\left(h(t)\right)\right)} = 0, \tag{1.7}$$

где

$$h(t) = H^{-1}\left(\frac{\alpha_0(\lambda-\gamma_k)}{\left(\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau M_k\left(\left|\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)\right)^2}\right), \quad H(y) = \frac{\varphi'(y)}{M_k(\varphi(y))}, \quad y \in I.$$

2. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1.1. *Необходимость.* Пусть $y : [t_y, \omega] \to I$ — решение уравнения (1.1) из класса $\widetilde{P}_\omega^k(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1, \gamma_k\}$.

Приняв во внимание (1.1) и (1.2), заметим, что $y'(t)$ может быть равно нулю не более чем в одной точке, а потому, не ограничивая общности, будем считать функцию $y'(t)$ отличной от нуля на $[t_y, \omega)$.

Полагая

$$z(t) = \varphi(y(t))$$

и учитывая (1.1), имеем

$$G_{k+1}(t) = F_{k+1}(y(t)) + \frac{\alpha_0 p(t)\varphi^2(y(t))M_k(\varphi(y))}{\varphi'(y(t))y'^{\,2}(t)} \quad \text{при} \quad t \in [t_y, \omega).$$

Отсюда, замечая, что φ строго монотонна на I, а значит, $y(t) = \varphi^{-1}(z(t))$, получаем асимптотическое соотношение

$$\frac{z'^2(t)}{z^2(t)\left|\varphi'(\varphi^{-1}(z(t)))M_k(z(t))\right|} = \frac{\alpha_0\rho}{\lambda-\gamma_k}p(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \tag{2.1}$$

и первое из условий (1.4).

Введем в рассмотрение функцию $P_k(t) = 1 - \left(\dfrac{z(t)M_k(z(t))}{z'(t)}\right)'$. Дифференцируя выражение в скобках, находим

$$P_k(t) = 1 + M_k(z(t)) \left(\frac{z(t)z''(t)}{z(t)'^2} - 1\right) - \sum_{s=1}^{k} \frac{M_k(z(t))}{\prod_{r=1}^{s} L_r(z(t))}.$$

Используя это равенство, нетрудно показать, что функция $P_k(t)$ при $k \geq 2$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $P_k(t) = L_k(z(t))(P_{k-1}(t) - 1)$, а при $k = 1$ $P_k(t) = = L_1(z(t)) \left(\dfrac{z(t)z''(t)}{z(t)'^2} - 1\right)$. Следовательно, функции P_k и G_{k+1} на промежутке $[t_y, \omega)$ равны. Отсюда и из определения $\widetilde{P}_\omega^k(\lambda)$-решения следует предельное соотношение

$$\left(\frac{z(t)M_k(z(t))}{z'(t)}\right)' = (1 - \lambda)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.2}$$

Если $\omega = +\infty$, то, интегрируя это соотношение на промежутке $[t_y, +\infty)$, получаем

$$\frac{z(t)M_k(z(t))}{z'(t)} = \frac{z(t_y)M_k(z(t_y))}{z'(t_y)} + (1 - \lambda)t[1 + o(1)] = (1 - \lambda)t[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Если $\omega < +\infty$, то, интегрируя (2.2) от ω до t, имеем

$$\frac{z(t)M_k(z(t))}{z'(t)} = C + (1 - \lambda)(t - \omega)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Покажем, что здесь $C = 0$. Действительно, если $C \neq 0$, то $\dfrac{z'(t)}{z(t)M_k(z(t))} = C^{-1} + o(1)$ при $t \uparrow \omega$. Поскольку $z(t) \to \varphi_0$ при $t \uparrow \omega$, то $\underbrace{\ln| \ \ldots \ |\ln|z(t)|||}_{k+1} \to \infty$ при $t \uparrow \omega$, а значит, интеграл от левой части предыдущего предельного равенства по промежутку $[t_y, \omega)$ расходится, в то время как интеграл по этому же промежутку от правой части сходится. Таким образом, для любого ω можем записать

$$\frac{z'(t)}{z(t)M_k(z(t))} = \frac{1 + o(1)}{(1 - \lambda)\pi_\omega(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.3}$$

откуда следует соотношение

$$\operatorname{sign} \frac{z'(t)}{z(t)} = \operatorname{sign} \left[(1 - \lambda)\pi_\omega(t)M_k(z(t))\right] \quad \text{при} \quad t \in [t_y, \omega).$$

Учитывая знак $z'(t)/z(t)$ и полагая $\varrho = \operatorname{sign} \left[(1 - \lambda)\pi_\omega(t)M_k(z(t))\right]$, записываем (2.1) в виде

$$\frac{z'(t)}{z(t)\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(z(t)))M_k(z(t))|}} = \varrho\sqrt{\frac{\alpha_0\rho}{\lambda - \gamma_k}}\sqrt{p(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.4}$$

Поскольку для любых $t \in [a, \omega)$ и $y \in I$ интегралы

$$\int\limits_a^t \sqrt{p(\tau)}\, d\tau \quad \text{и} \quad \int\limits_{z_0}^{\varphi(y)} \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))|}}$$

конечны, из (2.4) получаем (1.5). Более того, так как $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = \varphi_0$, из (2.4) также имеем

$$\int\limits_B^{z(t)} \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))M_k(s)|}} = \frac{\varrho}{\sqrt{|\lambda-\gamma_k|}} \int\limits_A^t \sqrt{p(\tau)}\, d\tau [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.5}$$

Далее установим справедливость предельного равенства

$$\lim_{z\to\varphi_0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(z))M_k(z)|}}}{\displaystyle\int_B^z \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))M_k(s)|}}} = -\frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Нетрудно проверить, что и числитель, и знаменатель дроби являются монотонными функциями в окрестности точки φ_0, следовательно, имеют конечный или бесконечный предел при $z \to \varphi_0$. Вследствие выбора предела интегрирования B можем утверждать, что знаменатель дроби стремится либо к нулю, либо к бесконечности. При этом стремиться к нулю он может только в случае сходимости интеграла $\displaystyle\int_B^z \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))M_k(s)|}}$. Отсюда, учитывая расходимость интеграла $\displaystyle\int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s}$ и существование предела

$$\lim_{z\to\varphi_0} \varphi'(\varphi^{-1}(z))\, M_k(z),$$

получаем, что предел $\lim_{z\to\varphi_0} \dfrac{1}{\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(z))M_k(z)|}}$ равен нулю. Таким образом, дробь в левой части соотношения (2.6) при $z \to \varphi_0$ либо представляет собой неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, либо ее знаменатель стремится к бесконечности, а значит, для нахождения ее предела при $z \to \varphi_0$ допустимо правило Лопиталя. Используя это правило, нетрудно проверить справедливость (2.6).

Из предельных равенств (2.4)–(2.6) следует соотношение

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{(-2+o(1))\sqrt{p(t)}}{\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\, d\tau} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{2.7}$$

которое влечет за собой

$$\lim_{t\to\omega} \frac{\ln z(t)}{\ln\left|\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\, d\tau\right|} = -2$$

и

$$M_k(z(t)) = (-2+o(1))M_k\left(\left|\int\limits_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.8}$$

Отсюда, учитывая (2.3) и (2.7), получаем второе из условий (1.4).

Для завершения доказательства теоремы необходимо показать справедливость формул (6). Используя соотношения (2.5) и (2.6), имеем

$$\varphi'(y(t))M_k(\varphi(y(t))) = \frac{4(\lambda-\gamma_k)}{\alpha_0\left(\int_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right)^2}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad t\to\omega,$$

из которого с учетом (2.3) и (2.8) следует (1.6).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1,\gamma_k\}$ и выполняются условия (1.4), (1.5), (1.7). Покажем, что существует $\widetilde{P}_\omega^k(\lambda)$-решение уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (1.6).

Положим

$$H(y) = \frac{\varphi'(y)}{M_k(\varphi(y))}, \quad J(t) = M_k\left(\left|\int\limits_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)\int\limits_A^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau, \quad y\in I, \quad t\in[a,\omega). \tag{2.9}$$

Покажем, что функция $H(y)$ строго монотонна, а значит, обратима, в окрестности точки y_0. Для этого найдем $H'(y)$:

$$H'(y) = \frac{\varphi''(y)}{M_k(\varphi(y))} - \frac{\varphi'^2(y)\sum\limits_{s=1}^k \dfrac{M_k(\varphi(y))}{M_s(\varphi(y))}}{\varphi(y)M_k^2(\varphi(y))}.$$

Отсюда следует, что при $y\to y_0$

$$H'(y) = \frac{\varphi'^2(y)}{\varphi(y)M_k(\varphi(y))}[1+o(1)],$$

т. е. $H'(y)\neq 0$ в окрестности точки y_0. Не ограничивая общности, можем полагать, что $H(y)$ обратима на всем промежутке I. Рассуждая аналогично, нетрудно проверить, что функция $J(t)$ будет строго монотонной в левой окрестности точки ω.

Далее, использовав условие (1.5), установим предельное равенство

$$\lim_{y\to y_0} H(y) = \phi_0, \quad \text{где} \quad \phi_0 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau = \infty, \\ \infty, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau < \infty. \end{cases} \tag{2.10}$$

В случае сходимости интеграла $\int_a^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau$ это равенство очевидно. В случае, когда интеграл $\int_a^\omega \sqrt{p(\tau)}\,d\tau$ расходится, применяя правило Лопиталя, нетрудно проверить справедливость соотношения

$$\lim_{y\to y_0} \frac{|H(y)|^{-1/2}}{\int_{z_0}^{\varphi(y)} s^{-1}|\varphi'(\varphi^{-1}(s))M_k(s)|^{-1/2}\,ds} = \infty \quad \text{при} \quad y\to+\infty,$$

из которого следует равенство (2.10). Из (2.10), в частности, следует существование точки $t_0 \in [a,\omega)$ такой, что выполняются условия

$$\theta\int\limits_a^{t_0} \pi_\omega^{-1}(s)\left|M_k\left(\left|\int\limits_A^s \sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)\right|^{1/2} ds > 1,$$

$$\left\{\frac{(\lambda-\gamma_k)(1+v)}{\alpha_0 I^2(t)} : t\in[t_0,\omega),\ v\in[-1/2,1/2]\right\} \subseteq \operatorname{Im} H(I).$$

Теперь с помощью преобразования

$$\begin{gathered} H(y(t)) = \frac{\lambda-\gamma_k}{\alpha_0 J^2(t)}(1+u_1(x)), \\ \frac{(\varphi(y(t)))'}{\varphi(y(t))M_k(\varphi(y(t)))} = \frac{1}{(1-\lambda)\pi_\omega(t)} + \frac{u_2(x)}{\pi_\omega(t)\sqrt{|M_k(\varphi(h(t)))|}}, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где

$$x = \theta\int\limits_a^t \frac{\sqrt{|M_k(\varphi(h(t)))|}}{\pi_\omega(s)}\,ds \quad \text{и} \quad \theta = \operatorname{sign}\pi_\omega(t),$$

сведем уравнение (1.1) к системе

$$\begin{aligned} u_1' &= \theta(1+u_1)\left[\frac{\pi_\omega(t(x))G(u_1,x)}{Q(x)} + \frac{N(u_1,x)}{Q^2(x)}u_2\right], \\ u_2' &= \theta\left[\frac{1}{(1-\lambda)} + (\lambda-\gamma_k)(1+u_1)K(x) + \frac{F_{k+1}(h(u_1,x))-1}{(1-\lambda)^2} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{2F_{k+1}(h(u_1,x))-1-\lambda}{(1-\lambda)Q(x)} + \frac{\pi_\omega(t(x))(Q^2(x))'}{2Q^3(x)}\right)u_2 + \frac{(F_{k+1}(h(u_1,x))-1)u_2^2}{Q^2(x)}\right], \end{aligned} \tag{2.12}$$

в которой

$$\overline{h}(u_1,x) = H^{-1}\left(H(h(t(x)))(1+u_1)\right), \quad N(u_1,x) = M_k(\varphi(\overline{h}(u_1,x))) + F_{k+1}(\overline{h}(u_1,x)) - 1,$$

$$K(x) = \frac{\pi_\omega^2(t(x))p(t(x))}{\left(M_k\left(\left|\int_A^{t(x)}\sqrt{p(\tau)}d\tau\right|\right)\int_A^{t(x)}\sqrt{p(\tau)}d\tau\right)^2}, \quad Q(x) = \sqrt{|M_k(\varphi(h(t(x))))|},$$

$$G_1(u_1,x) = \frac{N(u_1,x) - M_k(\varphi(h(t(x))))}{(1-\lambda)\pi_\omega(t(x))}, \quad G(u_1,x) = G_1(u_1,x) + G_2(x),$$

$$G_2(x) = \frac{2\sqrt{p(t(x))}}{\int_A^{t(x)} \sqrt{p(\tau)}\,d\tau}\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{M_i\left(\left|\int_A^{t(x)}\sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)}\right) + \frac{M_k(\varphi(h(t(x))))}{(1-\lambda)\pi_\omega(t(x))}$$

и $t = t(x)$ — функция, обратная к $x = x(t)$, определенной в (2.11).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.12) на множестве

$$\Omega = [x_0, +\infty) \times D_1 \times D_2, \quad \text{где} \quad x_0 = x(t_0), \quad D_i = \left\{u_i \,:\, |u_i| \le \frac{1}{2}\right\}, \quad i = 1, 2.$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что правые части системы (2.12) непрерывны на этом множестве, причем функция $\overline{h}(u_1,x)$ непрерывно дифференцируема по первой переменной на $D_1 \times$ $\times [x_0, +\infty)$.

Кроме того, в силу (1.2) – (1.4), (2.10) и правила Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} K(x) = \frac{1}{(\lambda-1)^2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \overline{h}(u_1,x) = y_0, \quad \lim_{x\to+\infty} F_{k+1}(\overline{h}(u_1,x)) = \gamma_k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|M_k(\varphi(\overline{h}(u_1,x))) - M_k(\varphi(h(t(x))))\right|}{|M_k(\varphi(h(t(x))))|^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in D_1. \tag{2.13}$$

Запишем систему (2.12) в виде

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + R_{11}(x,u_1,u_2) + R_{12}(x,u_1,u_2), \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + R_{21}(x,u_1,u_2) + R_{22}(x,u_1,u_2), \end{aligned} \tag{2.14}$$

где

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = \theta\rho_L, \quad a_{21} = \theta\frac{\lambda-\gamma_k}{(1-\lambda)^2},$$

$$R_{11}(x,u_1,u_2) = \theta\left[\frac{\pi_\omega(t(x))G(u_1,x)(1+u_1)}{Q(x)} + \left(\frac{N(u_1,x)}{Q^2(x)} - \rho_L\right)u_2\right],$$

$$R_{12}(x,u_1,u_2) = \frac{\theta N(u_1,x)}{Q^2(x)}u_1u_2,$$

$$R_{21}(x,u_1,u_2) = \theta\left[\frac{1}{1-\lambda} + (\lambda-\gamma_k)\left(K(x) + \left(K(x) - \frac{1}{(1-\lambda)^2}\right)u_1\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{F_{k+1}(\overline{h}(u_1,x)) - 1}{(1-\lambda)^2} + \left(\frac{2F_{k+1}(\overline{h}(u_1,x)) - 1 - \lambda}{(1-\lambda)Q(x)} + \frac{\pi_\omega(t(x))S(x)}{2Q^3(x)}\right)u_2\right],$$

$$R_{22}(x,u_1,u_2) = \theta\frac{(F_{k+1}(\overline{h}(u_1,x)) - 1)u_2^2}{Q^2(x)},$$

$$S(x)=\frac{2(\gamma_k-\lambda)Q^4(x)\sqrt{p(t(x))}\left(M_k\left(\left|\int_A^{t(x)}\sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)+\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{M_k\left(\left|\int_A^{t(x)}\sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)}{M_i\left(\left|\int_A^{t(x)}\sqrt{p(\tau)}\,d\tau\right|\right)}\right)}{\alpha_0\varphi'(h(t(x)))N(0,x)\left(\int_A^{t(x)}\sqrt{p(\tau)}d\tau M_k\left(\left|\int_A^{t(x)}\sqrt{p(\tau)}d\tau\right|\right)\right)^3}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{k}\frac{M_k\left(\varphi(h(t(x)))\right)}{M_i\left(\varphi(h(t(x)))\right)}.$$

Из соотношений (2.13) и условия (1.4) следует, что функции $R_{ij}(x,u_1,u_2)$, $i,j=1,2$, удовлетворяют предельным равенствам

$$\lim_{x\to+\infty}R_{i1}(x,u_1,u_2)=0\quad\text{равномерно по}\quad(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2_{b_0},$$

$$\lim_{|u_1|+|u_2|\to0}\frac{R_{i2}(x,u_1,u_2)}{|u_1|+|u_2|}=0\quad\text{равномерно по}\quad x\in[x_0,+\infty).$$

Рассмотрим теперь характеристическое уравнение предельной матрицы A :

$$\mu^2-\frac{\rho_L(\lambda-\gamma_k)}{(\lambda-1)^2}=0.$$

Поскольку по условию теоремы $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1,\gamma_k\}$ и $\rho_L(\lambda-\gamma_k)>0$, это характеристическое уравнение имеет только вещественные отличные от нуля корни. Значит, для системы (2.14) выполнены все условия леммы 1 из работы [1]. Согласно этой лемме система (2.14) имеет хотя бы одно решение, стремящееся к нулю при $x\to+\infty$. Ему в силу замен (2.11) соответствует решение уравнения (1.1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (1.6). Нетрудно проверить, что данное решение принадлежит классу $\widetilde{P}^k_\omega(\lambda)$.

Теорема 1.2 доказана.

В качестве иллюстрации полученного результата рассмотрим уравнение

$$y''=c\,e^{\sigma_1t^m}t^p\,e^{\sigma_2|y|^n}|y|^l,\tag{2.15}$$

где $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $\sigma_1,\sigma_2,l,m,n,p,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $m,n>0$.

Установим асимптотические представления $\widetilde{P}^k_{+\infty}(\lambda)$-решений этого уравнения, стремящихся к $\pm\infty$ при $t\to+\infty$.

Следствие. *Для существования $\widetilde{P}^k_{+\infty}(\lambda)$-решений, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\left\{1,1-\dfrac{1}{n}\right\}$, уравнения (2.15), стремящихся при $t\to+\infty$ либо к $+\infty$, либо $-\infty$, необходимо, а если $(m-n)\sigma_2>0$, то и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\sigma_1\sigma_2<0,\quad\lambda=1-\frac{1}{m}.\tag{2.16}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \to +\infty$ асимптотические представления

$$\sigma_2|y(t)|^n = -\sigma_1 t^m + \left(\frac{m}{n} - \frac{ml}{n} - p - 2\right)\ln t + \ln\left|\left|\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right|^{\frac{1-l}{n}} \frac{m(m-n)}{n^2 c}\right| + o(1),$$
$$y'(t) = \mathrm{sign}\,[c(m-n)]\,\frac{m}{n}\left|-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right|^{\frac{1}{n}} t^{\frac{m-n}{n}}(1+o(1)). \tag{2.17}$$

Доказательство. Пусть уравнение (2.15) имеет $\widetilde{P}^k_{+\infty}(\lambda)$-решение, стремящееся к $\pm\infty$ при $t \to +\infty$. Тогда в силу (1.2), второго из условий (1.4) и предельного равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\sqrt{p(t)}}{\int_A^t \sqrt{p(\tau)}d\tau \ln\left|\int_A^t \sqrt{p(\tau)}d\tau\right|} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\frac{\sigma_1}{2}t^m} t^{\frac{p}{2}+1}}{\int_A^t e^{\frac{\sigma_1}{2}\tau^m}\tau^{\frac{p}{2}}d\tau \ln\left|\int_A^t |c|^{1/2} e^{\frac{\sigma_1}{2}\tau^m}\tau^{\frac{p}{2}}d\tau\right|} = m$$

имеем $k = 1$, $\gamma_1 = 1 - \dfrac{1}{n}$ и $\lambda = 1 - \dfrac{1}{m}$. Далее, используя первое из условий (1.4), получаем неравенство $c(m-n)\,\mathrm{sign}\,y > 0$, откуда следует, что y_0 необходимо полагать равным $+\infty$, если $c(m-n) > 0$, и $-\infty$, если $c(m-n) < 0$.

Теперь рассмотрим интегралы $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{\frac{\sigma_1}{2}\tau^m}\tau^{\frac{p}{2}}d\tau$ и $\displaystyle\int_{z_0}^{\varphi_0} \frac{ds}{s\sqrt{|\varphi'(\varphi^{-1}(s))\ln s|}}$, где $z_0 \in$ $\in (0,+\infty)$, $\varphi(y) = e^{\sigma_2|y|^n}|y|^l$, $\varphi_0 = +\infty$, если $\sigma_2 > 0$, и $\varphi_0 = 0$, если $\sigma_2 < 0$. Нетрудно проверить, что второй из этих интегралов сходится при $\varphi_0 = +\infty$ и расходится при $\varphi_0 = 0$. Отсюда, так как интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{\frac{\sigma_1}{2}\tau^m}\tau^{\frac{p}{2}}d\tau$ сходится, если $\sigma_1 < 0$, и расходится, если $\sigma_1 > 0$, а σ_1 по предположению отлично от 0, получаем, что условие (1.5) эквивалентно условию $\sigma_1\sigma_2 < 0$. Значит, необходимость выполнения условий (2.16) для существования $\widetilde{P}^k_{+\infty}(\lambda)$-решений, стремящихся к $\pm\infty$ при $t \to +\infty$, установлена.

Согласно теореме 1.1 каждое $\widetilde{P}^k_{+\infty}(1-1/m)$-решение допускает асимптотические представления

$$e^{\sigma_2|y|^n}|y|^{l-1}\,\mathrm{sign}\,y = \frac{(m-n)m}{n^2 c e^{\sigma_1 t^m} t^{p+2}}[1+o(1)], \qquad \frac{y'}{e^{\sigma_2|y|^n}|y|^l} = \frac{m^2 nc}{m-n} e^{\sigma_1 t^m} t^{p+1}[1+o(1)]. \tag{2.18}$$

Учитывая, что $|y(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$, и используя первое из представлений (2.18), получаем соотношение $\sigma_2|y|^n = -\sigma_1 t^m(1+o(1))$. Отсюда и из (2.18) непосредственно следуют соотношения (2.17).

Для завершения доказательства следствия осталось показать, что (2.16) и неравенство $(m-n)\sigma_2 > 0$ являются достаточными условиями для существования $\widetilde{P}^k_{+\infty}(\lambda)$-решения, стремящегося к y_0 при $t \to +\infty$. Положим $y_0 = +\infty$, если $c(m-n) > 0$, и $y_0 = -\infty$, если $c(m-n) < 0$. Такой выбор y_0, а также (2.16) гарантируют выполнение условий (1.4), (1.5). Кроме того, из (1.4) и неравенства $(m-n)\sigma_2 > 0$ следует $\alpha_0\varphi'(y) > 0$.

Теперь установим справедливость предельного равенства (1.7). Используя правило Лопиталя, нетрудно проверить справедливость предельного соотношения

$$\int\limits_A^t e^{\frac{\sigma_1}{2}\tau^m}\tau^{\frac{p}{2}}d\tau = e^{\frac{\sigma_1}{2}t^m}\left(\frac{2}{\sigma_1 m}t^{1-m+\frac{p}{2}} - \frac{4-4m+2p}{\sigma_1^2 m^2}t^{1-2m+\frac{p}{2}}(1+o(1))\right) \quad \text{при} \quad t\to+\infty.$$

Отсюда и из определения функции $H(y)$ следует соотношение

$$\sigma_2|h(t)|^n + l\ln|h(t)| = \ln|H(h(t)| + \frac{1}{n}\ln|\ln|H(h(t))|| - \ln n - \frac{1}{n}\ln\sigma_2 + o(1) \quad \text{при} \quad t\to+\infty.$$

Замечая, что $\ln\varphi(h(t)) = \sigma_2|h(t)|^n + l\ln|h(t)|$, и принимая во внимание определение функции $h(t)$, записываем правую часть (1.7) в виде

$$\left(\frac{2\pi_\omega(t)\sqrt{p(t)}}{\int_A^t\sqrt{p(\tau)}d\tau M_k\left(\varphi\left(h(t)\right)\right)} + \frac{1}{1-\lambda}\right)|M_k\left(\varphi\left(h(t)\right)\right)|^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{-m}{1+\frac{(p+2)n-m}{n\sigma_1}t^{-m}\ln t(1+o(1))} + m\right)|\sigma_1|^{1/2}t^{m/2}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad t\to+\infty,$$

а значит, имеет место предельное равенство (1.7).

Таким образом, все условия теоремы 1.2 выполнены, и поэтому уравнение (2.15) имеет решение, принадлежащее классу $\widetilde{P}^k_{+\infty}(\lambda)$.

Следствие доказано.

Замечание. Рассмотрим уравнение

$$y'' = -4t^2e^{2t^2}e^{-|y|}. \tag{2.19}$$

Уравнение (2.19) является частным случаем уравнения (2.15) при $c=-4$, $p=2$, $\sigma_1 = 2$, $m=2$, $\sigma_2=-1$, $n=1$ и $l=0$. При таких значениях параметров выполняются условия (2.16), но неравенство $(m-n)\sigma_2 > 0$ места не имеет. Тем не менее, покажем, что уравнение (2.19) имеет решение из класса $\widetilde{P}^1_{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)$, допускающее при $t\to+\infty$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} y &= -2t^2 - 2\ln t + o(1), \\ y' &= -4t + o(1). \end{aligned} \tag{2.20}$$

С помощью преобразования

$$y = -2t^2 - 2\ln t + u_1,$$

$$y' = -4t + 2u_2,$$

сведем уравнение (2.19) к системе

$$u_1' = \frac{2}{t} + 2u_2, \qquad u_2' = -2u_1 - 2r(u_1), \tag{2.21}$$

в которой $r(u) = e^u - 1 - u$.

Теперь, используя замену переменных $u_1 = z_1 \cos 2t + z_2 \sin 2t$, $u_2 = -z_1 \sin 2t + z_2 \cos 2t - \frac{1}{t}$, приводим систему (2.21) к виду

$$z_1' = \frac{\sin 2t}{t^2} + 2 \sin 2t\, r(z_1 \cos 2t + z_2 \sin 2t), \qquad z_2' = -\frac{\cos 2t}{t^2} - 2 \cos 2t\, r(z_1 \cos 2t + z_2 \sin 2t). \tag{2.22}$$

И наконец, с помощью преобразования $v_i = \frac{1}{4} t z_i$, $i = 1, 2$, сведем (2.22) к системе

$$v_1' = \frac{\sin 2t}{4t} + \frac{1}{t} v_1 + \frac{\sin 2t}{2}\ t\ r\left(\frac{4(v_1 \cos 2t + v_2 \sin 2t)}{t}\right),$$

$$v_2' = -\frac{\cos 2t}{4t} + \frac{1}{t} v_2 - \frac{\cos 2t}{2}\ t\ r\left(\frac{4(v_1 \cos 2t + v_2 \sin 2t)}{t}\right),$$

которая в силу теоремы 1.1 из работы [2] имеет решение, стремящееся к нулю при $t \to +\infty$. Ему, как следует из приведенных выше замен, соответствует решение уравнения (2.19), допускающее асимптотические представления (2.20). Нетрудно проверить, что решение будет принадлежать классу $\widetilde{P}^1_{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Выводы. Полученные в работе результаты дополняют исследования уравнения (1.1), приведенные в [3–6], где функции $p(t)$ и $\varphi(y)$ были в некотором смысле близки к степенным функциям (т. е. $\gamma \neq 1$), либо $\varphi(y)$ полагалась равной $e^{\sigma y}$. В работах [1, 7] изучены асимптотические свойства $P_\omega(\lambda)$-решений уравнения (1.1), где $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, \gamma, 2\gamma - 1\}$, либо $\lambda = \infty$, а значит, при $\gamma = 1$ оставалось лишь дать ответ на вопрос о существовании и асимптотическом поведении $P_\omega(1)$-решений уравнения (1.1). Для этого в настоящей работе введено в рассмотрение однопараметрическое семейство классов $\widetilde{P}^k_\omega(\lambda)$-решений ($k \in \mathbb{N}$), каждый из которого является подмножеством множества $P_\omega(1)$-решений. Для этих классов при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, \gamma_k\}$ получены необходимые и достаточные условия существования, а также найдены асимптотические при $t \to \omega$ формулы для выражений $y'(t)/\varphi(y(t))$ и $\varphi'(y(t))/M_k(\varphi(y(t)))$.

Из примера, приведенного в следствии, видно, как можно уточнить полученные в теореме асимптотические представления в случае конкретного вида нелинейности. Кроме того, показано, что достаточные условия из теоремы 1.2 могут быть ослаблены или, как отмечено в замечании, могут совпадать с необходимыми.

1. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2007. — **43**, № 10. — С. 1311 – 1323.

2. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Там же. — 2003. — **39**, № 4. — С. 433 – 444.

3. *Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений дифференциального уравнения n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 4. — С. 562 – 573.

4. *Кирилова Л. О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена – Фаулера // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2004. — Вип. 228. — С. 30 – 35.

5. *Евтухов В. М., Кирилова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 8. — С. 1053 – 1061.

6. *Кирилова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 1. — С. 18 – 28.

7. *Харьков В. М.* Асимптотические представления решений одного существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестн. молодых ученых „Ломоносов". — 2007. — **3**. — С. 243 – 247.

Получено 08.05.08