УДК 517.928

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ГЛАДКИМИ СИМВОЛАМИ

В. А. Літовченко

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58000, Чернівці, вул. Л. Толстого, 3/5
e-mail: vladlit@chnu.cv.ua

For a class of pseudodifferential systems with smooth symbols that depend on time, we study properties of the fundamental matrix of solutions. We formulate sufficient and, for some systems, necessary conditions for correct solvability of the Cauchy problem with generalized initial conditions. We also construct spaces, which generalize certain classical spaces, of test and generalized functions.

Для одного класса псевдодифференциальных систем с гладкими символами, зависящими от времени, исследованы свойства фундаментальной матрицы решений; сформулированы достаточные, а для некоторых систем и необходимые условия корректной разрешимости задачи Коши с обобщенными начальными данными. При этом построены пространства основных и обобщенных функций, являющиеся обобщениями некоторых классических пространств.

Вступ. Теорія просторів типу S, розвинена І. М. Гельфандом і Г. Є. Шиловим у 50-х роках минулого століття, відіграла важливу роль при дослідженні задачі Коші для систем рівнянь у згортках таких, що коефіцієнти у відповідних двоїстих за Фур'є системах є цілими аналітичними функціями за просторовою змінною (окремим випадком таких систем є диференціальні та диференціально-різницеві системи з неперервними коефіцієнтами, залежними від часу). Зокрема, у термінах цих просторів вдалося описати класи єдиності та класи коректної розв'язності задачі Коші. При цьому з'ясувалося, що чим краще себе поводить з функціональної точки зору фундаментальна матриця розв'язків (ФМР) системи, тим слабші умови задовольняють початкові дані, тобто тим ширші її класи єдиності та коректної розв'язності [1–3].

Природне розвинення теорії просторів типу S здійснив Б. Л. Гуревич, увівши так звані простори типу W. Дані простори дозволили точніше описати класи єдиності задачі Коші для зазначених систем [4, 5].

Бурхливий розвиток теорії псевдодиференціальних операторів спонукає до постановки і дослідження задачі Коші для псевдодиференціальних систем, символи диференціювання яких мають різні ступені гладкості (не обов'язково цілі аналітичні функції) й зростають на нескінченності не лише степеневим чином.

Для таких систем точний опис властивостей фундаментальних розв'язків завдяки просторам типу S та W не завжди є можливим. Справді, для рівняння

$$\partial_t u(t,x) + \int\limits_{-\infty}^{\gamma} ((aI - \partial_x^2)^{\frac{\tau}{2}} u)(t,x)d\tau = 0, \qquad \gamma > 0, \quad a > 0, \quad (t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

де I — одиничний оператор, фундаментальний розв'язок $G_t(\cdot)$ збігається з оберненим перетворенням Фур'є функції $\theta_t(\cdot) = \exp\left\{-2t\dfrac{(a+(\cdot)^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+(\cdot)^2)}\right\}$, $t > 0$. Однак [6] серед S_α^β, $\alpha > 0, \beta > 0$ (тобто просторів типу S), не існує найвужчого простору, в який при кожному фіксованому $t > 0$ потрапляла б $\theta_t(\cdot)$. Більш того, фундаментальний розв'язок рівняння (1) не належить жодному з просторів W_M^Ω (просторів типу W), оскільки функція $\theta_t(\cdot)$, $t > 0$, не є цілою аналітичною.

Таким чином, виникає потреба у поширенні теорії І. М. Гельфанда, Г. Є. Шилова і Б. Л. Гуревича на випадок задач Коші для псевдодиференціальних систем, символи яких характеризуються обмеженим ступенем гладкості у комплексному просторі.

Доречно зазначити, що задачу Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь і систем з гладкими символами досліджували японські математики [7–10]. Ними описано клас нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ символів, залежних від просторової змінної; наведено достатні умови гіпоеліптичності псевдодиференціальних операторів із такими символами, побудовано фундаментальні розв'язки відповідних задач Коші та розвинено методику дослідження їх властивостей. Проте і в цьому випадку символи псевдодиференціювання мають степеневу поведінку на нескінченності.

У даній роботі описується клас псевдодиференціальних систем з гладкими, але не обов'язково цілими аналітичними символами з часовим параметром, поведінка яких у околі нескінченно віддалених точок характеризується завдяки опуклим функціям. Досліджуються властивості ФМР таких систем, згідно з якими будуються простори основних і узагальнених функцій, які є певним узагальненням просторів типу S та W; описується їх топологічна структура і з'ясовується питання взаємодвоїстості за Фур'є. Також доводиться критерій мультиплікатора і встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для таких систем у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями. Для окремих систем описуються максимальні класи узагальнених початкових даних, при яких відповідна задача Коші коректно розв'язна, а її розв'язок має ті властивості гладкості та поведінку в околі нескінченно віддалених точок, що і ФМР.

1. Простори основних і узагальнених функцій. Нехай T — довільне фіксоване число з $(0;+\infty)$, $\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел, $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$ — його елементи (вектори), $(x,y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = (x,x)$, $C^\infty(L)$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на множині L; $\widehat{C}(L)$ — сукупність усіх обмежених за модулем функцій на L; S — простір Л. Шварца [11], а $\omega_j(\cdot)$ — зростаючі неперервні функції на $[0;+\infty)$, причому $\omega_j(0) = 0$ і $\lim_{t\to+\infty}\omega_j(t) = +\infty$, $j = \overline{1,n}$. Для $x \geq 0$ покладемо $\Omega_j(t) = \int_0^t \omega_j(\xi)d\xi$, $j = \overline{1,n}$. При кожному $j \in \{1,\ldots,n\}$ функція $\Omega_j(\cdot)$ має такі властивості [2, 12]: 1) вона є диференційовною, зростаючою на $[0;+\infty)$; 2) $\Omega_j(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\Omega_j(x) = +\infty$; 3) $\Omega_j(\cdot)$ — опукла функція, тобто: а) $\forall\{x_1;x_2\} \subset [0;+\infty)$: $\Omega_j(x_1) + \Omega_j(x_2) \leq \Omega_j(x_1+x_2)$; б) $\forall\delta \geq 1$ $\forall x \in [0;+\infty)$: $\Omega_j(\delta x) \geq \delta\Omega_j(x)$; в) $\forall\delta \in (0;1)$ $\forall x \in [0;+\infty)$: $\Omega_j(\delta x) \leq \delta\Omega_j(x)$. Довизначимо $\Omega_j(\cdot)$, $j = \overline{1,n}$, на $(-\infty;0)$ парним чином, і нехай $\overrightarrow{\Omega}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \{\Omega_1(x_1),\ldots,\Omega_n(x_n)\}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Поряд з $\overrightarrow{\Omega}(\cdot)$ розглянемо функцію $\overrightarrow{M}(x) = \{M_1(x_1),\ldots,M_n(x_n)\}$, де $M_j(\cdot)$ — функція, аналогічна до $\Omega_j(\cdot)$, побудована по $\mu_j(\cdot)$, яка має такі самі властивості, що і функція $\omega_j(\cdot)$.

Далі, говоритимемо, що послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\} \subset \mathbb{R}^n$ задовольняє умову А), якщо для кожного $\nu \in \{1,\ldots,n\}$: 1) $0 < \alpha_{\nu,k_\nu} < \alpha_{\nu,k_\nu+1}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$; 2) $\lim_{k_\nu\to\infty}\alpha_{\nu,k_\nu} = +\infty$; 3) $\exists c_\nu > 0\ \exists A_\nu > 0\ \forall k_\nu \in \mathbb{Z}_+$: $\dfrac{\alpha_{\nu,k_\nu+2}}{\alpha_{\nu,k_\nu}} \leq c_\nu A_\nu^{k_\nu}$; 4) $\exists L_\nu > 0\ \forall\{k_\nu; m_\nu\} \subset \mathbb{Z}_+$: $\alpha_{\nu,k_\nu}\alpha_{\nu,m_\nu} \leq L_\nu^{k_\nu+m_\nu}\alpha_{\nu,(k_\nu+m_\nu)}$. Прикладом такої послідовності є послідовність із загальним членом $\alpha_k = (k_1^{\beta_1 k_1},\ldots,k_n^{\beta_n k_n})$, $\beta_\nu > 0$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = \overline{1,n}$.

У випадку, коли для $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ виконуються умови 1 – 3 з A) і при цьому

$$\exists c_\nu > 0 \quad \forall\{k_\nu; m_\nu\} \subset \mathbb{Z}_+ : \gamma_{\nu,k_\nu}\gamma_{\nu,m_\nu} \leq c_\nu\gamma_{\nu,(k_\nu+m_\nu)},$$

де $\gamma_k \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{\dfrac{\alpha_{1,k_1}}{k_1!};\ldots;\dfrac{\alpha_{n,k_n}}{k_n!}\right\}$, вважатимемо, що $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову B).

За вектор-функцією $\overrightarrow{\Omega}(\cdot)$ і послідовністю $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ побудуємо клас $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}([0;T])$, який складається з усіх функцій $a_j(t,x)$: $[0;T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що: 1) $a_j(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(\forall t \in [0;T])$; 2) $D_x^k a_j(t+\tau,x)\underset{\tau\to 0}{\longrightarrow} D_x^k a_j(t,x)$ рівномірно по x на кожному компакті з $\mathbb{R}^n$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$ і $t \in (0;T]$; 3) $\exists b_j(\cdot) \in \widehat{C}([0;T])\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n$: $|D_x^k a_j(t,x)| \leq |b_j(t)||A_j(k,x)|$, причому функція $A_j(\cdot,\cdot)$ така, що для всіх $0 < \delta \ll 1$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{|A_j(k,x)|e^{-\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(x))}\} \leq c_j\delta^{-1}B_j^{|k|}\widehat{\alpha}_k, (1,\overrightarrow{\Omega}(x)) = \sum_{j=1}^n \Omega_j(x_j), \widehat{\alpha_k}\overset{\mathrm{df}}{=}\prod_{\nu=1}^n \alpha_{\nu,k_\nu},$$

де c_j, B_j — додатні сталі, не залежні від k і δ, а $|k| = k_1+\ldots+k_n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$; 4) $\exists c \geq 0$ $\forall t \in [0;T]$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\exists\nu_j(\varepsilon) > 0$, $\nu_j(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0\ \forall\Delta t \in [0;\varepsilon]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$|a_j(t+\Delta t,x) - a_j(t,x)| \leq \nu_j(\varepsilon)(|A_j(0,x)|+c)$$

(тут $A_j(\cdot,\cdot)$ — функція з попередньої умови); 5) існує функція $\widehat{B}_j(\cdot,\cdot;\cdot)$: $\mathbb{Z}_+^n\times\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^n \to (0;+\infty)$ така, що:

а) $\left|D_\xi^k\left(\prod_{\nu=1}^r a_j(t_\nu,x)\right)\right| \leq \widehat{B}_j(k,r;x)$ $(\forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall r \in \mathbb{Z}_+\ \forall\{t_\nu, \nu=\overline{1,r}\} \subset [0;T]\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$;

б) ряд $\sum_{r=1}^\infty L^r\widehat{B}_j(k,r;x)/r!$ є рівномірно збіжним по x на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ і $L \in [0;2T]$, причому його сума прямує до нуля при $L \to 0$ (поточково відносно k і x).

Зазначимо, що клас $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}([0;T])$ є замкненим відносно операцій віднімання, додавання та множення на неперервну функцію $b(t)$, $t \in [0,T]$.

Покладемо

$$W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,\Big|\,\exists c > 0\,\exists A > 0\,\exists\delta > 0\,\forall k \in \mathbb{Z}_+^n\,\forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|D_x^k\varphi(x)| \leq cA^{|k|}\widehat{\alpha_k}\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^n\Omega_\nu(\delta x_\nu)\right\},$$

$$W_{\{\alpha_k\}}^{\overrightarrow{M}} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n)\,\Big|\,\exists c > 0\,\exists B > 0\,\exists b > 0\,\forall k \in \mathbb{Z}_+^n\,\forall z = x+iy \in \mathbb{C}^n :$$

$$|x^k\varphi(z)| \leq cB^{|k|}\widehat{\alpha_k}\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(by_\nu)\right\}.$$

Через $W_{\vec{\Omega},a}^{\{\alpha_k\},A}$ і $W_{\{\alpha_k\},B}^{\vec{M},b}$ позначимо сукупності всіх тих функцій φ з $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ і, відповідно, ψ з $W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}}$, для яких виконуються нерівності

$$|D_x^k\varphi(x)| \leq c\hat{A}^{|k|}\widehat{\alpha_k}\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{n}\Omega_\nu(\hat{a}x_\nu)\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|x^k\psi(z)| \leq c\check{B}^{|k|}\widehat{\alpha_k}\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(\check{b}y_\nu)\right\}, \quad z = x+iy \in \mathbb{C}^n,$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$, де $\hat{A} \geq A$, $\hat{a} \leq a$, $\check{B} \geq B$ та $\check{b} \geq b$ — деякі додатні сталі. Якщо для $\varphi \in W_{\vec{\Omega},a}^{\{\alpha_k\},A}$ та $\psi \in W_{\{\alpha_k\},B}^{\vec{M},b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}}\left\{|D_x^k\varphi(x)| \,/\left((A+\delta)^{|k|}\widehat{\alpha_k}\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{n}\Omega_\nu(a(1-\rho)x_\nu)\right\}\right)\right\},$$

$$\|\psi\|_{\delta\rho} = \sup_{\substack{z=x+iy\in\mathbb{C}^n\\ k\in\mathbb{Z}_+^n}}\left\{|x^k\psi(z)| \,/\left((B+\delta)^{|k|}\widehat{\alpha_k}\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(b(1+\rho)y_\nu)\right\}\right)\right\},$$

$$\{\delta,\rho\} \subset \{1/n; n \geq 2\},$$

то, міркуючи, як і у випадку просторів типу S та W [1, 2] за умови, що послідовність α_k, $k \in \in \mathbb{Z}_+^n$ задовольняє умову А), можна переконатися, що з цими нормами простори $W_{\vec{\Omega},a}^{\{\alpha_k\},A}$ і $W_{\{\alpha_k\},B}^{\vec{M},b}$ є повними, досконалими, зліченно нормованими; $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} = \bigcup_{A,a>0} W_{\vec{\Omega},a}^{\{\alpha_k\},A}$, $W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}} = \bigcup_{B,b>0} W_{\{\alpha_k\},B}^{\vec{M},b}$, причому послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ збігається до $\varphi \in W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ при $\nu \to +\infty$ у цьому просторі $\left(\text{позначатимемо } \varphi_\nu \underset{\nu\to+\infty}{\overset{W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}}{\longrightarrow}} \varphi\right)$ тоді і тільки тоді, коли: а) $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ є правильно збіжною на $\mathbb{R}^n$ (тобто для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $D_x^k\varphi_\nu(x)$ збігається до $D_x^k\varphi(x)$ при $\nu \to +\infty$ рівномірно по x на кожному компакті з $\mathbb{R}^n$); б) вона є обмеженою у $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$. А $\psi_\nu \underset{\nu\to+\infty}{\overset{W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}}}{\longrightarrow}} \psi$, де $\{\psi; \psi_\nu, \nu \geq 1\} \subset W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}}$, лише тоді, коли: а) функції ψ_ν рівномірно збігаються до ψ у кожній обмеженій області з $\mathbb{C}^n$; б) $\{\psi_n, n \geq 1\}$ є обмеженою у $W_{\vec{M}}^{\{\alpha_k\}}$.

Виконання умови А) для $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ гарантує існування та неперервність операцій додавання, віднімання, множення, диференціювання, а також зсуву у просторах $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$, $W_{\{\alpha_k\}}^{\vec{M}}$. Більш того, оскільки зазначені простори досконалі, то операція зсуву у них не лише неперервна, а й нескінченно диференційовна [1].

Очевидно, що для $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, які задовольняють умову A) і такі, що $\alpha_{\nu,k_\nu} \le \beta_{\nu,k_\nu}, \quad k_\nu \in \mathbb{Z}_+, \nu = \overline{1,n}$, правильними є наступні вкладення:

$$W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}} \subset W_{\vec{\Omega}}^{\{\beta_k\}} \subset W_{\vec{\Omega}} \subset S \subset W'_{\vec{\Omega}} \subset (W_{\vec{\Omega}}^{\{\beta_k\}})' \subset (W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}})',$$

$$W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}} \subset W^{\vec{M}}_{\{\beta_k\}} \subset W^{\vec{M}} \subset S \subset (W^{\vec{M}})' \subset (W^{\vec{M}}_{\{\beta_k\}})' \subset (W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}})',$$

де $W_{\vec{\Omega}}$, $W^{\vec{M}}$, $W^{\vec{M}}_{\vec{\Omega}}$ — простори типу W, побудовані Б. Л. Гуревичем у [2, 4, 5] (тут через Φ' позначено простір, топологічно спряжений до Φ).

Слід зазначити, що у $W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$, в залежності від $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, можуть міститися не лише цілі функції, як це вимагається для простору $W^{\vec{M}}_{\vec{\Omega}}$, а $\inf\limits_{k_\nu \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \dfrac{cB^{k_\nu}\alpha_{\nu,k_\nu}}{|z_\nu|^{k_\nu}} \right\}$ не завжди є функцією з властивостями функції $e^{-\Omega_\nu(z_\nu)}$, $\nu = \overline{1,n}$, що є обов'язковим для простору $W^{\vec{\Omega}}_{\vec{M}}$. Зауважимо також, що якщо $M_\nu(\cdot) = |\cdot|^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а $\alpha_{\nu,k_\nu} = k_\nu^{\beta k_\nu}$, $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = \overline{1,n}$, $\beta > 0$, то $W_{\vec{M}}^{\{\alpha_k\}} = S_\alpha^\beta$, де S_α^β — простір типу S [1].

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Якщо функції $M_\nu(\cdot)$ і $\Omega_\nu(\cdot)$, $\nu = \overline{1,n}$, взаємодвоїсті за Юнгом (у сенсі [2]), а послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову* A), *то*

$$F[W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}] = W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}, \quad F[W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}] = W_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}},$$

причому оператор Фур'є F на цих просторах є неперервним і взаємно однозначним.

У правильності зазначеної теореми неважко переконатися, якщо діяти, як і при її доведенні у випадку просторів типу S та W (див. [1, 2]).

Далі наведемо таке означення: послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ називається узгодженою з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, якщо існує така додатна стала B, що для всіх i_ν, j_ν, …, h_ν-цілочисельних невід'ємних розв'язків рівняння $k_\nu = 1 \cdot i_\nu + 2 \cdot j_\nu + \ldots + L_\nu \cdot h_\nu$ виконується нерівність

$$\left(\frac{\alpha_{\nu,1}}{1!}\right)^{i_\nu} \left(\frac{\alpha_{\nu,2}}{2!}\right)^{j_\nu} \cdots \left(\frac{\alpha_{\nu,L_\nu}}{L_\nu!}\right)^{h_\nu} \le B_\nu^{k_\nu} \frac{\alpha_{\nu,k_\nu}}{k_\nu!}, \qquad \nu \in \{1, \ldots, n\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Зазначимо, що кожна послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, яка задовольняє умову B), є узгодженою з послідовністю $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$.

Наступне твердження характеризує елементи простору $W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}$ на множині $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Якщо послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову* A) *і узгоджена з $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$, то функція f з $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ належатиме простору $W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}$ тоді й лише тоді, коли*

$$\exists c > 0 \, \exists A > 0 \, \exists B > 0 \; \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \; \exists \rho_k = \{\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \ldots, \rho_{k_n}\},$$
$$\rho_{k_\nu} \in [0, k_\nu), \quad \nu = \overline{1,n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|D_x^k f(x)| \le cA^{|k|} k! \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{e^{M_\nu(\rho_{k_\nu})}}{\rho_{k_\nu}^{k_\nu}} \inf_{m \ge 0} \left\{ \frac{B^m \alpha_{\nu,m}}{|x_\nu|^m} \right\} \right), \tag{2}$$

де ρ_{k_ν} *— розв'язок рівняння* $\rho\mu_\nu(\rho) = k_\nu, k_\nu \in \mathbb{Z}_+, \nu = \overline{1,n}$.

Доведення. Нехай $f \in W_{\{\alpha_k\}}^{\overrightarrow{M}}$. Покажемо, що для f виконуються умови (2).

Згідно з теоремою 1 $f(\cdot) = F^{-1}[\tilde{f}(\xi)](\cdot)$, де $\tilde{f}(\cdot) = F[f](\cdot)$ — елемент з $W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$, а $\overrightarrow{\Omega}$ — двоїста за Юнгом до $\overrightarrow{M}$ вектор-функція. Отже, для всіх $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x^m D_x^k f(x)| \le c \int\limits_{\mathbb{R}^n} |D_\xi^m(\xi^k \tilde{f}(\xi))| d\xi \le c_1 \sum_{|l|=0}^{m} C_m^l \frac{k!}{(k-l)!} A^{|m-l|} \times$$

$$\times \left(\prod_{\nu=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\xi_\nu|^{k_\nu - l_\nu} e^{-\Omega_\nu(a\xi_\nu)} d\xi_\nu \right) \alpha_{\nu, m_\nu - l_\nu} \right).$$

Скористаємося тепер нерівністю Юнга [2] $\xi_\nu y_\nu \le \Omega_\nu(\xi_\nu) + M_\nu(y_\nu)$, $\xi_\nu \ge 0$, $y_\nu \ge 0$, завдяки якій

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\xi_\nu|^{l_\nu} e^{-\Omega_\nu(a\xi_\nu)} d\xi_\nu \le \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi_\nu|^{l_\nu} e^{-|\xi_\nu| y_\nu} \exp\left\{ -\Omega_\nu\left(\frac{a}{2}\xi_\nu\right) + M_\nu\left(\frac{2}{a} y_\nu\right) \right\} d\xi_\nu \le$$

$$\le \frac{c_0 l_\nu! e^{M_\nu(\frac{2}{a} y_\nu)}}{y_\nu^{l_\nu}}, \qquad l_\nu \in \mathbb{Z}_+, \quad y_\nu \ge 0.$$

Оскільки $y_\nu \ge 0$ є довільним, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\xi_\nu|^{l_\nu} e^{-\Omega_\nu(a\xi_\nu)} d\xi_\nu \le c_0 l_\nu! \left(\frac{2}{a}\right)^{l_\nu} \inf_{y_\nu \ge 0} \left\{ \frac{e^{M_\nu(y_\nu)}}{y_\nu^{l_\nu}} \right\}, \quad l_\nu \in \mathbb{Z}_+.$$

Традиційними засобами математичного аналізу переконуємось у тому, що

$$\inf_{y_\nu \ge 0} \left\{ \frac{e^{M_\nu(y_\nu)}}{y_\nu^{l_\nu}} \right\} = \frac{e^{M_\nu(\rho_{l_\nu})}}{\rho_{l_\nu}^{l_\nu}}, \tag{3}$$

де ρ_{l_ν} — розв'язок рівняння $\rho\mu_\nu(\rho) = l_\nu, l_\nu \in \mathbb{Z}_+, \nu = \overline{1,n}$, причому якщо $l_\nu = 0$, то $\rho_0 = 0$.

Звідси приходимо до нерівності

$$\begin{gathered} |x^m D_x^k f(x)| \le c_2 2^{|k|} A_1^{|m|} \sum_{|l|=0}^{m} \left(\prod_{\nu=1}^{n} \left(l_\nu! \alpha_{\nu, m_\nu - l_\nu} \left(\frac{2}{a}\right)^{k_\nu - l_\nu} (k_\nu - l_\nu)! \frac{e^{M_\nu(\rho_{k_\nu - l_\nu})}}{\rho_{k_\nu - l_\nu}^{k_\nu - l_\nu}} \right) \right), \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+^n \end{gathered} \tag{4}$$

(тут c_2, A_1 — додатні сталі, не залежні від x, k і m).

Зазначимо, що ρ_k — корінь рівняння $\rho\mu_\nu(\rho) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тому зі збільшенням k зростатиме також і $\rho_k\mu_\nu(\rho_k)$. Оскільки $\mu_\nu(\cdot)$ — монотонно зростаюча функція така, що

$\lim\limits_{\rho\to+\infty}\mu_\nu(\rho) = +\infty$, то таке зростання $\rho_k\mu_\nu(\rho_k)$ є можливим лише завдяки зростанню ρ_k, причому $\lim\limits_{k\to+\infty}\rho_k = +\infty$. Отже,

$$\left(\frac{2}{a}\right)^{k-l}\frac{(k-l)!e^{M_\nu(\rho_{k-l})}}{\rho_{k-l}^{k-l}} \le B^k e^{M_\nu(\rho_k)}\frac{(k-l)!}{\rho_{k-l}^{k-l}} \le B^k e^{M_\nu(\rho_k)}\left(\frac{\rho_{k-l}\mu_\nu(\rho_{k-l})}{\rho_{k-l}}\right)^{k-l} \le$$

$$\le B_1^k k!\frac{e^{M_\nu(\rho_k)}}{\rho_k^k}\frac{(\mu_\nu(\rho_{k-l}))^{k-l}}{(\mu_\nu(\rho_k))^k} \le \frac{B_1^k k! e^{M_\nu(\rho_k)}}{\rho_k^k}, \quad \{l,k\}\subset\mathbb{Z}_+, l\le k, \nu=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де B_1 — додатна стала, не залежна від k і l.

Далі, з того, що послідовність $\{\alpha_k, k\in\mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову A) й узгоджена з $\{k!, k\in\mathbb{Z}_+^n\}$, маємо

$$l_\nu!\alpha_{\nu,(m_\nu-l_\nu)} = \frac{l_\nu!}{\alpha_{\nu,l_\nu}}\alpha_{\nu,(m_\nu-l_\nu)}\alpha_{\nu,l_\nu} \le \overline{c}\overline{B}^{m_\nu}\alpha_{\nu,m_\nu}, \quad l_\nu\le m_\nu, \nu=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Враховуючи оцінки (5), (6), з (4) отримуємо умову (2).

Доведемо тепер зворотне. Нехай f з $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умову (2). Тоді цю функцію можна аналітично продовжити на $\mathbb{C}^n$. Дійсно, залишковий член із розкладу у формулі Тейлора допускає оцінку

$$\left|\frac{h^q}{q!}D_x^q f(x+\theta h)\right| \le cA^{|q|}\prod_{\nu=1}^n\left(\frac{e^{M_\nu(\rho_{q_\nu})}}{\rho_{q_\nu}^{q_\nu}}|h_\nu|^{q_\nu}\inf_{m\ge0}\left\{\frac{B^m\alpha_{\nu,m}}{|x+\theta h|^m}\right\}\right),$$

$$q\in\mathbb{Z}_+^n, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \theta_\nu\in(0,1), \quad \nu\in\overline{1,n}$$

(тут $\theta=\{\theta_1,\ldots,\theta_n\}$).

Оскільки $M_\nu(\rho_l) = \int_0^{\rho_l}\mu_\nu(\xi)d\xi$, $l\in\mathbb{N}$, то згідно з теоремою про середнє значення інтеграла для кожного l з $\mathbb{N}$ знайдеться $\xi_l\in(0;\rho_l)$ таке, що $M_\nu(\rho_l)=\rho_l\mu_\nu(\xi_l)$ (у випадку, коли $l=0$, $M_\nu(\rho_0)=0$, оскільки $\rho_0=0$). Звідси, зважаючи на монотонне зростання функції $\mu_\nu(\cdot)$, одержуємо $M_\nu(\rho_l)\le\rho_l\mu_\nu(\rho_l)=l$, $l\in\mathbb{N}$. Тоді

$$\left(\frac{A|h_\nu|}{\rho_{q_\nu}}\right)^{q_\nu}e^{M_\nu(\rho_{q_\nu})} \le \left(\frac{A|h_\nu|e}{\rho_{q_\nu}}\right)^{q_\nu}.$$

Оскільки $\rho_{q_\nu}\to+\infty$ при $q_\nu\to+\infty$, то

$$\prod_{\nu=1}^n\left(\frac{A|h_\nu|}{\rho_{q_\nu}}\right)^{q_\nu}e^{M_\nu(\rho_{q_\nu})}\underset{|q|\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

для всіх $|h_\nu|\in[0;+\infty)$. Отже, залишковий член $\dfrac{h^q}{q!}D_x^q f(x+\theta h)$ прямує до нуля при $|q|\to$ $\to+\infty$ для всіх $h\in\mathbb{R}^n$, тобто функція f допускає аналітичне продовження на $\mathbb{C}^n$:

$$f(x+iy) = \sum_{|q|=0}^\infty\frac{D_x^q f(x)}{q!}(iy)^q, \quad z=x+iy\in\mathbb{C}^n.$$

Далі, із співвідношень (2), (3) для всіх $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ і $k \in \mathbb{Z}_+^n$ дістаємо

$$|x^k f(z)| \le \sum_{|q|=0}^{\infty} \frac{|x^k D_x^q f(x)|}{q!}|y|^q \le c \sum_{|q|=0}^{\infty} \left(\prod_{\nu=1}^{n} |Ay_\nu|^{q_\nu} |x_\nu|^{k_\nu} \frac{e^{M_\nu(\rho_{q_\nu})}}{\rho_{q_\nu}^{q_\nu}} \inf_{m \ge 0} \left\{ \frac{B^m \alpha_{\nu,m}}{|x_\nu|^m} \right\} \right) \le$$

$$\le c \sum_{|q|=0}^{\infty} \left(\prod_{\nu=1}^{n} B^{k_\nu} \alpha_{\nu,k_\nu} |Ay_\nu|^{q_\nu} \inf_{\rho \ge 0} \left\{ \frac{e^{M_\nu(\rho)}}{\rho^{q_\nu}} \right\} \right) \le cB^{|k|} \Big(\prod_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu,k_\nu} e^{M_\nu(2Ay_\nu)} \Big) \sum_{|q|=0}^{\infty} \frac{1}{2^{|q|}} =$$

$$= cB^{|k|} \widehat{\alpha_k} e^{\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu(2Ay_\nu)}$$

(тут $|y|^q = \prod\limits_{\nu=1}^{n} |y_\nu|^{q_\nu}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{Z}_+^n$).

Теорему доведено.

Нехай, далі, Φ — простір основних функцій. Позначимо через Φ^m, $(\Phi')^m$ декартові степені (з натуральним показником m) просторів Φ і Φ' з покомпонентною збіжністю у Φ та Φ' відповідно, через $P\Phi^m$ множину всіх можливих квадратних матриць порядку m, рядками яких є елементи з Φ^m (також з поелементною збіжністю у просторі Φ).

Говоритимемо, що вектор-функція $\psi(\cdot)^T = \{\psi_1(\cdot), \ldots, \psi_m(\cdot)\}$ є мультиплікатором у просторі Φ^m, якщо: 1) $p\psi^T \in \Phi^m$ $(\forall p \in P\Phi^m)$; 2) $\forall \{p; p_\nu, \nu \ge 1\} \subset P\Phi^m$, $p_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{P\Phi^m} p$: $p_\nu \psi^T \xrightarrow[\nu \to +\infty]{\Phi^m} p\psi^T$, де індекс T позначає операцію транспонування, причому під транспонуванням векторного простору розумітимемо транспонування усіх елементів цього простору. Вектор f^T з $(\Phi')^m$ назвемо згортувачем у просторі Φ^m, якщо:

1) $(p * f)(\cdot) = \left(\sum\limits_{j=1}^{m} \langle f_j(\xi), p_{ij}(\cdot - \xi) \rangle \right)_{i=1}^{m} \in \Phi^{m^T}$ $(\forall p \in P\Phi^m)$;

2) $\forall \{p; p_\nu, \nu \ge 1\} \subset P\Phi^m$, $p_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{P\Phi^m} p$: $p_\nu * f \xrightarrow[\nu \to +\infty]{\Phi^{m^T}} p * f$

(тут кутовими дужками позначено дію функціонала, а зірочкою — операцію згортки).

2. Задача Коші. Розглянемо систему

$$\partial_t u(t,x) = (A_{\mathcal{A}_t} u)(t,x), \qquad (t,x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

де $u = \{u_1; \ldots; u_m\}^T$, а $A_{\mathcal{A}_t} = (A_{a_{ij}})_{i,j=1}^m$ — матричний псевдодиференціальний оператор із параметром $t \in [0;T]$, побудований за матрицею-символом $\mathcal{A}_t(\cdot) = (a_{ij}(t,\cdot))_{i,j=1}^m$, кожен елемент якої належить класу $\mathfrak{L}_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}([0;T])$, тобто оператор, дія якого при кожному фіксованому t з $[0;T]$ на достатньо хороших елементах $\varphi = \{\varphi_1; \ldots; \varphi_m\}^T$ задається таким чином:

$$(A_{\mathcal{A}_t}\varphi)(t,\cdot) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} (A_{a_{1j}}\varphi_j)(t,\cdot), \ldots, \sum_{j=1}^{m} (A_{a_{mj}}\varphi_j)(t,\cdot) \right\}^T$$

(тут $(A_{a_{ij}}\varphi_j)(t,\cdot) = F^{-1}[a_{ij}(t,\xi)F[\varphi_j](\xi)](t,\cdot)$, F, F^{-1} — відповідно пряме та обернене перетворення Фур'є [13]). Припустимо, що для (7) виконується аналог рівномірної по t умови параболічності:

$$\exists\delta^* > 0\,\exists c^* \in \mathbb{R}\,\forall t \in [0;T]\,\forall \xi \in \mathbb{R}^n:\ \max_{j=\overline{1,m}} \mathrm{Re}\lambda_j(t,\xi) \le -\delta^*(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi)) + c^*, \tag{8}$$

де λ_j, $j = \overline{1,m}$, — власні значення матриці $\mathcal{A}_t$ — символу оператора $A_{\mathcal{A}_t}$.

Знайдемо ФМР $G_t(\cdot)$, $t \in (0;T]$, системи (7) і дослідимо її властивості. Для цього спочатку подіємо формально на (7) перетворенням Фур'є відносно змінної x. Одержимо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь з параметром ξ:

$$\partial_t V(t,\xi) = (\mathcal{A}_t V)(t,\xi), \quad (t,\xi) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

де $V = \{v_1, \ldots, v_m\}^T$, а $\mathcal{A}_t$ — матричний символ оператора $A_{\mathcal{A}_t}$.

Нехай $\theta(t;\xi,\tau) = (\theta^{ij}(t;\xi,\tau))_{i,j=1}^m$ для всіх $\tau \in [0;T)$, $t \in (\tau;T]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ є розв'язком системи (9), що задовольняє (у звичайному розумінні) початкову умову

$$\theta(t;\xi,\tau)|_{t=\tau} = E \tag{10}$$

(тут E — одинична матриця). Такий розв'язок далі називатимемо матрицею Гріна або матрицантом системи (9).

Зазначимо, що зроблені припущення на елементи матриці $\mathcal{A}_t$ забезпечують існування такого матрицанта, причому будь-який інший розв'язок системи (9) має вигляд $V = \theta C$, де C — довільна матриця-стовпець з елементами, залежними лише від ξ (див., наприклад, [14]).

Далі нам знадобляться наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Для кожного $\tau \in [0;T)$ існує $0 < \varepsilon \ll 1$ таке, що для всіх $t \in (\tau, \tau+\varepsilon]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність*

$$|\theta(t;\xi,\tau)| \le c\exp\{-(t-\tau)\delta(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi))\},$$

де c, δ — додатні сталі, не залежні від t, τ, ξ і ε, а $|(b_{ij})_{i,j=1}^m| = \max_{i,j=\overline{1,m}} |b_{ij}|$.

Доведення. Подамо (9) у вигляді

$$\partial_t\theta = \mathcal{A}_{t^*}(\xi)\theta + q(t,\xi), \tag{11}$$

де $q(t,\xi) = (\mathcal{A}_t(\xi) - \mathcal{A}_{t^*}(\xi))\theta(t;\xi,\tau)$, а t^* — довільна фіксована точка з $[\tau;T]$.

Розв'язавши задачу Коші (11), (10), прийдемо до того, що матрицант системи (9) допускає зображення

$$\theta(t;\xi,\tau) = e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)} + \int\limits_\tau^t e^{(t-\sigma)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)} q(\sigma,\xi)d\sigma, \qquad e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}} = E + \sum_{j=1}^\infty ((t-\tau)\mathcal{A}_{t^*})^j/j!.$$

Згідно з відповідною лемою з [2, с. 78]

$$\|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\| \le \exp\{(t-\tau)\max_{j=\overline{1,m}}\mathrm{Re}\lambda_j(t^*,\xi)\}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}(2(t-\tau)\|\mathcal{A}_{t^*}(\xi)\|)^j\right) \quad (\forall t\in[\tau;T])$$

(тут $\|\mathcal{A}\|$ — норма матриці $\mathcal{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^m$, тобто норма відповідного оператора у m-вимірному просторі). Звідси з огляду на умову (8) та властивості елементів матриці $\mathcal{A}_{t^*}$, використавши оцінку [2]

$$\max_{j=\overline{1,m}}\sum_{i=1}^m|a_{ij}|^2 \le \|\mathcal{A}\|^2 \le \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m|a_{ij}|^2,$$

отримаємо

$$|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}| \le c\exp\left\{(t-\tau)(c^*-\delta^*/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi)))\right\}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}((t-\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\{|A_*(0,\xi)|e^{-(t-\tau)\delta^*(2j)^{-1}(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\})^j\right)\le$$

$$\le c_1\exp\left\{-(t-\tau)\delta^*/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\right\},\qquad \tau\in[0;T),\ \ \{t,t^*\}\subset[\tau;T] \tag{12}$$

(тут і далі через $A_*(\cdot,\cdot)$ позначено відповідну функцію з умови 3 в описі класу $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$, а c_1 — додатна стала, не залежна від t, t^*, τ і ξ).

Використавши нерівність (12), знайдемо

$$|\theta(t;\xi,\tau)| \le c_1\exp\left\{-(t-\tau)\delta^*/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\right\}+$$

$$+c_1m\int_\tau^t\exp\left\{-(t-\sigma)\delta^*/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\right\}|q(\sigma,\xi)|d\sigma. \tag{13}$$

Оскільки $|q(t,\xi)|\le m|\mathcal{A}_t(\xi)-\mathcal{A}_{t^*}(\xi)|\,|\theta(t;\xi,\tau)|$, то, врахувавши властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$ за змінною t і поклавши $t^*=\tau$, для всіх t з $(\tau,\tau+\varepsilon]$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$ одержимо

$$|q(t,\xi)|\le m\nu(\varepsilon)(|A_*(0,\xi)|+c)|\theta(t;\xi,\tau)|.$$

Звідси та з нерівності (13) дістанемо

$$|\theta(t;\xi,\tau)|\exp\left\{(t-\tau)\delta^*/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\right\}\le c_1+c_1m^2\nu(\varepsilon)(|A_*(0,\xi)|+c)\times$$

$$\times\int_\tau^t\exp\left\{(\sigma-\tau)\delta^*/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\right\}|\theta(\sigma;\xi,\tau)|d\sigma,\quad t\in(\tau;\tau+\varepsilon],\ \ \tau\in[0;T],\ \ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Тепер, поклавши

$$\varphi(t) = |\theta(t;\xi,\tau)| \exp\left\{(t-\tau)\delta^*/2(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi))\right\}, \qquad \psi(t) = c_1, \quad \chi(t) = c_1 m^2 \nu(\varepsilon)(|A_*(0,\xi)|+c)$$

і врахувавши лему 2 з [15, с. 300], прийдемо до нерівності

$$|\theta(t;\xi,\tau)| \exp\left\{(t-\tau)\delta^*/2(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi))\right\} \leq c_1 + (c_1 m)^2 \nu(\varepsilon)(|A_*(0,\xi)| + c)\times$$
$$\times \int\limits_\tau^t \exp\{(t-\sigma)c_1 m^2 \nu(\varepsilon)(|A_*(0,\xi)| + c)\} d\sigma \leq$$
$$\leq c_1(1 + \exp\{(t-\tau)2c_1 m^2 \nu(\varepsilon)(|A_*(0,\xi)| + c)\}).$$

Далі, виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $\widehat{\alpha}_0 2^4 B m^2 c_1 c_* \nu(\varepsilon) \leq \delta^*$, де c_* — стала, що відповідає функції $A_*(\cdot,\cdot)$ (див. умову 3 з опису класу $\mathfrak{L}^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}$); B — найменше серед $\widehat{B} > 0$ таких, що $k^k \leq \widehat{B}^k k!$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а c_1 — стала з оцінки (13). Тоді

$$e^{-(t-\tau)\delta^*/4(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))} \exp\{(t-\tau)2c_1 m^2 \nu(\varepsilon)|A_*(0,\xi)|\} \leq e^{-(t-\tau)\delta^*/4(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((t-\tau)2c_1 m^2 \nu(\varepsilon)|A_*(0,\xi)|)^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}((t-\tau)2c_1 m^2 \nu(\varepsilon) \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\{|A_*(0,\xi)|\times$$
$$\times\, e^{-(t-\tau)\delta^*(4k)^{-1}(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\})^k/k! \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

а отже, для $\tau \in [0;T]$, $t \in (\tau, \tau+\varepsilon]$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\theta(t;\xi,\tau)| \leq c_2 \exp\{-(t-\tau)\delta^*/4(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi))\}, \tag{14}$$

де c_2 — додатна стала, не залежна від τ, t, ξ і ε.

Лему доведено.

Наслідок 1. *Існують додатні сталі c і δ такі, що для всіх $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$|\theta(t;\xi,\tau)| \leq c\exp\{-(t-\tau)\delta(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi))\}.$$

Цей наслідок стає очевидним, якщо зважити на те, що згідно з попередньою лемою існує таке розбиття $\{t_j\}_{j=1}^k$ проміжку $(\tau;t]$, $t \in (\tau;T]$, на кожному елементі $(t_j;t_{j+1}]$ якого для матриціанта θ виконується нерівність (14) з оцінюючими сталими, не залежними від t, t_j, t_{j+1} і ξ, а також на одну з відомих властивостей матриціанта [14]:

$$\theta(t_j;\cdot,t_0) = \theta(t_j;\cdot,t_1)\theta(t_1;\cdot,t_0) \quad (\forall\{t_0,t_1,t\} \subset (\tau;T]).$$

Лема 2. *Нехай послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* B). *Тоді матрицант* θ *системи (9) є нескінченно диференційовним по просторовій змінній на* $\mathbb{R}^n$, *причому*

$$\exists\{c, \delta, B\} \subset (0; +\infty) \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\} \, \forall \tau \in [0; T) \, \forall t \in (\tau; T] \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n :$$

$$|D_\xi^k \theta(t; \xi, \tau)| \le c B^{|k|} \widehat{\alpha_k} e^{-(t-\tau)\delta(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi))}. \tag{15}$$

Доведення. Насамперед доведемо таке допоміжне твердження: якщо θ — матрицант системи (9), то $D_\xi^k \theta$ є розв'язком задачі Коші

$$\partial_t V(t, \xi) = \mathcal{A}_t(\xi) V(t, \xi) + f(t, \xi), \qquad (t, \xi) \in (\tau; T] \times \mathbb{R}^n, \quad V|_{t=\tau} = 0, \tag{16}$$

де $f(t, \xi) = D_\xi^k(\mathcal{A}_t(\xi)\theta(t; \xi, \tau)) - \mathcal{A}_t(\xi) D_\xi^k \theta(t; \xi, \tau)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$ і $\tau \in [0; T)$.

Для цього скористаємося рівністю [14]

$$\theta(t; \xi, \tau) = E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \ldots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^r \mathcal{A}_{t_j}(\xi) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1. \tag{17}$$

Зазначимо, що умова 5 з опису класу $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ (до якого належать елементи матриці $\mathcal{A}_t$) забезпечує: 1) нескінченну диференційовність по ξ матрицанта θ на $\mathbb{R}^n$; 2) існування частинної похідної по t матричної функції $D_\xi^k \theta(t; \xi, \tau)$, причому

$$\partial_t(D_\xi^k \theta(t; \xi, \tau)) = D_\xi^k \mathcal{A}_t(\xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \ldots \int_\tau^{t_{r-1}} D_\xi^k \left(\mathcal{A}_t(\xi) \prod_{j=1}^r \mathcal{A}_{t_j}(\xi) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1 =$$

$$= D_\xi^k \mathcal{A}_t(\xi) + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \ldots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\sum_{l=0}^k C_k^l D_\xi^l \mathcal{A}_t(\xi) D_\xi^{k-l} \Big(\prod_{j=1}^r \mathcal{A}_{t_j}(\xi) \Big) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1 =$$

$$= \sum_{l=0}^k C_k^l D_\xi^l \mathcal{A}_t(\xi) D_\xi^{k-l} \left(E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \ldots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^r \mathcal{A}_{t_j}(\xi) \right) dt_r \ldots dt_2 dt_1 \right) =$$

$$= D_\xi^k(\mathcal{A}_t(\xi)\theta(t; \xi, \tau)), \qquad \tau \in [0; T), \quad t \in (\tau; T], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\},$$

де $\sum_{l=p}^k C_k^l \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{l_1=p_1}^{k_1} \ldots \sum_{l_n=p_n}^{k_n} \left(\prod_{\nu=1}^n C_{k_\nu}^{l_\nu} \right)$, $p \in \mathbb{Z}_+^n$; 3) виконання граничної рівності $\lim_{t \to \tau+0} D_\xi^k \theta(t; \xi, \tau) = 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, T)$ і $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$.

Таким чином, $D_\xi^k \theta$ — розв'язок задачі Коші (16) ($\forall k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$).

Згідно з формулою $(45')$ з [14, с. 407] дістанемо

$$D_\xi^k \theta(t; \xi, \tau) = \int_\tau^t \theta(t; \xi, \tau) \theta^{-1}(\sigma; \xi, \tau) f(\sigma, \xi) d\sigma.$$

Оскільки $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)=\theta(\tau;\cdot,t)$, $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, бо $E=\theta(\tau;\cdot,\tau)=\theta(\tau;\cdot,t)\theta(t;\cdot,\tau)$, $t\in[\tau;T]$ (див. відповідні властивості матриціанта [14]), то

$$D_\xi^k\theta(t;\xi,\tau)=\int\limits_\tau^t\theta(t;\xi,\sigma)(D_\xi^k(\mathcal{A}_\sigma(\xi)\theta(\sigma;\xi,\tau))-\mathcal{A}_\sigma(\xi)D_\xi^k\theta(\sigma;\xi,\tau))d\sigma$$

для всіх $k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$, $\tau\in[0;T)$, $t\in(\tau;T]$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Скористаємося тепер цією рекурентною формулою для встановлення оцінок похідних матриціанта системи (9). Щоб уникнути громіздких викладок, будемо вважати, що $n=1$ (для решти натуральних значень n правильність оцінок (15) перевіряється аналогічно). У цьому випадку

$$D_\xi^k\theta(t;\xi,\tau)=\int\limits_\tau^t\theta(t;\xi,\sigma_1)\sum_{\nu_1=1}^{k}C_k^{\nu_1}\partial_\xi^{\nu_1}\mathcal{A}_{\sigma_1}(\xi)\int\limits_\tau^{\sigma_1}\theta(\sigma_1;\xi,\sigma_2)\sum_{\nu_2=1}^{k-\nu_1}C_{k-\nu_1}^{\nu_2}\partial_\xi^{\nu_2}\mathcal{A}_{\sigma_2}(\xi)\ldots$$

$$\ldots\int\limits_\tau^{\sigma_{l-1}}\theta(\sigma_{l-1};\xi,\sigma_l)\sum_{\nu_l=1}^{1}C_1^{\nu_l}\partial_\xi^{\nu_l}\mathcal{A}_{\sigma_l}(\xi)\theta(\sigma_l;\xi,\tau)d\sigma_l\ldots d\sigma_2d\sigma_1,$$

$$k\in\mathbb{Z}_+\setminus\{0\},\xi\in\mathbb{R},\tau\in[0;T),t\in(\tau;T],$$

де $l\le k$ таке, що $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_l=k-1$. Звідси, врахувавши наслідок 1, властивості елементів матриці $\mathcal{A}_\sigma$, а також виконання умови B) для $\{\alpha_k,k\ge0\}$ та нерівність

$$\sum_{\nu_1=1}^{k}\sum_{\nu_2=1}^{k-\nu_1}\ldots\sum_{\nu_l=1}^{1}1\le e^k,$$

одержимо

$$|D_\xi^k\theta(t;\xi,\tau)|\le c_1B_1^ke^{-(t-\tau)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\sum_{\nu_1=1}^{k}\sum_{\nu_2=1}^{k-\nu_1}\ldots\sum_{\nu_l=1}^{1}\frac{C_k^{\nu_1}C_{k-\nu_1}^{\nu_2}\ldots C_1^{\nu_l}(t-\tau)^l}{l!}\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{l}|A_*(\nu_j,\xi)|\right)\le c_1B_1^ke^{-(t-\tau)\delta/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\sum_{\nu_1=1}^{k}\sum_{\nu_2=1}^{k-\nu_1}\ldots\sum_{\nu_l=1}^{1}C_k^{\nu_1}C_{k-\nu_1}^{\nu_2}\ldots C_1^{\nu_l}(l!)^{-1}\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{l}\Big((t-\tau)\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\{|A_*(\nu_j,\xi)|e^{-(t-\tau)\delta(2l)^{-1}(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\}\Big)\right)\le c_2B_2^ke^{-(t-\tau)\delta/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}k!\times$$

$$\times\sum_{\nu_1=1}^{k}\sum_{\nu_2=1}^{k-\nu_1}\ldots\sum_{\nu_l=1}^{1}\left(\prod_{j=1}^{l}\gamma_{\nu_j}\right)\le c_3B_3^k\widehat{\alpha}_ke^{-(t-\tau)\delta/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))},$$

де c_3,B_3 — додатні сталі, не залежні від k,t,τ і ξ, а $k\in\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $\tau\in[0;T)$, $t\in(\tau;T]$.

Лему доведено.

Наслідок 2. *Нехай функції $M_\nu(\cdot)$, $\Omega_\nu(\cdot)$ є взаємодвоїстими за Юнгом $(\forall \nu \in \{1,\ldots,n\})$, а послідовність $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ задовольняє умову* В). *Тоді ФМР $G_t(\cdot)$ системи (7) збігається з $F^{-1}[\theta(t;\sigma,0)](t,\cdot)$, $t \in (0;T]$, і при кожному фіксованому t з $(0;T]$ належить класу $P\Big(\Big(W^{\vec{M}}_{\{\alpha_k\}}\Big)^m\Big)$.*

Далі, нехай $\Phi \in \{W_{\vec{\Omega}}; W^{\{\beta_k\}}_{\vec{\Omega}}, \{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\} \geq \{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}\}$, а послідовності $\{\beta_k, k \in \in \mathbb{Z}_+^n\}, \{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ такі, що для них виконується умова В). Наступні допоміжні твердження характеризують властивості $\theta_t(\cdot)$ за змінною t, де $\theta_t(\cdot) \overset{\text{df}}{=} \theta(t;\cdot,0)$.

Лема 3. *Кожен елемент матриціанта $\theta_t(\cdot)$ диференційовний по $t \in (0;T]$ у розумінні топології простору Φ.*

Доведення. Досить переконатися у тому, що граничне співвідношення

$$\Psi_{\Delta t}(t,\cdot) \overset{\text{df}}{=} (\theta_{t+\Delta t}(\cdot) - \theta_t(\cdot))/\Delta t \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \mathcal{A}_t(\cdot)\theta_t(\cdot)$$

виконується у сенсі збіжності у класі $P\Phi^m$.

Зазначимо, що матрицант θ_t диференційовний по $t \in (0;T]$ у звичайному розумінні, тому згідно з теоремою про скінченні прирости

$$\Psi_{\Delta t}(t,\cdot) = \partial_t \theta_{t+\varepsilon\Delta t}(\cdot), \quad \{t, t+\varepsilon\Delta t\} \subset (0;T], \qquad \varepsilon \in (0;1),$$

тобто

$$\Psi_{\Delta t}(t,\cdot) = \mathcal{A}_{t+\varepsilon\Delta t}(\cdot)\theta_{t+\varepsilon\Delta t}(\cdot),$$

оскільки $\theta_{\tau^*}(\cdot)$ — звичайний розв'язок системи (9) для всіх τ^* з $(0;T]$.

Розглянемо

$$D_\xi^k(\Psi_{\Delta t}(t,\xi) - \mathcal{A}_t(\xi)\theta_t(\xi)) = D_\xi^k(\mathcal{A}_{t+\varepsilon\Delta t}(\xi)(\theta_{t+\varepsilon\Delta t}(\xi) - \theta_t(\xi))) + \\ + D_\xi^k((\mathcal{A}_{t+\varepsilon\Delta t}(\xi) - \mathcal{A}_t(\xi))\theta_t(\xi)), \quad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Звідси, зваживши на властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$ (див. опис класу $\mathfrak{L}^{\{\alpha_k\}}_{\vec{\Omega}}$) і лему 2, а також на те, що

$$\theta_{t+\varepsilon\Delta t}(\xi) - \theta_t(\xi) = \int\limits_t^{t+\varepsilon\Delta t} \mathcal{A}_{t_1}(\xi)dt_1 + \sum_{r=1}^{\infty} \int\limits_t^{t+\varepsilon\Delta t}\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_r}\left(\prod_{j=1}^{r}\mathcal{A}_{t_j}(\xi)\right)dt_{r+1}\ldots dt_2 dt_1,$$

і скориставшись формулою Лейбніца диференціювання добутку функцій, одержимо

$$D_\xi^k(\Psi_{\Delta t}(t,\xi) - \mathcal{A}_t(\xi)\theta_t(\xi)) \underset{\Delta t\to 0}{\overset{\xi\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad t \in (0;T],$$

де $\mathbb{K}$ — довільна компактна множина з $\mathbb{R}^n$.

Доведемо тепер, що кожен елемент матриці $\Psi_{\Delta t}$ рівномірно обмежений у просторі $W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$ по Δt (для достатньо малих $|\Delta t|$). Дійсно, згідно з лемою 2

$$|D_\xi^k \Psi_{\Delta t}(t,\xi)| = |D_\xi^k(\mathcal{A}_{t+\varepsilon\Delta t}(\xi)\theta_{t+\varepsilon\Delta t}(\xi))| \leq \sum_{l=0}^{k} C_k^l |D_\xi^l \mathcal{A}_{t+\varepsilon\Delta t}(\xi)|\,|D_\xi^{k-l}\theta_{t+\varepsilon\Delta t}(\xi)| \leq$$

$$\leq cB^{|k|}\sum_{l=0}^{k}|A_*(l,\xi)|\widehat{\alpha}_{k-l}e^{-(t+\varepsilon\Delta t)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))} \leq cB^{|k|}e^{-t\delta/4(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\sum_{l=0}^{k}\widehat{\alpha}_{k-l}\times$$

$$\times \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\{|A_*(l,\xi)|e^{-t\delta/4(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\} \leq c_1 t^{-1}B_1^{|k|}\widehat{\alpha}_k e^{-t\delta/4(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+^n, t \in (0;T], \xi \in \mathbb{R}^n, 2|\Delta t| < t,$$

де c_1, B_1 — додатні сталі, не залежні від $t, \xi, \Delta t$ і k (тут враховано те, що $t+\varepsilon\Delta t > t/2$ при $|\Delta t| < t/2$ і $\varepsilon \in (0;1)$).

Звідси згідно з критерієм збіжності у просторі Φ приходимо до твердження даної леми.

Лему доведено.

Зважаючи на те, що оператор оберненого перетворення Фур'є є неперервним у просторі Φ (див. [2] і теорему 1), з леми 3 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3. *$F^{-1}[\partial_t\theta_t(\cdot)] = \partial_t F^{-1}[\theta_t(\cdot)]$ ($\forall t \in (0;T]$).*

Лема 4. $\theta_t\varphi \xrightarrow[t\to+0]{\Phi^{m^T}} \varphi \quad (\forall \varphi \in \Phi^{m^T})$.

Доведення. Достатньо встановити виконання наступних умов:

1) $\theta_t(\xi) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} E$, $D_\xi^k\theta_t(\xi) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0$ рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{R}^n$ ($\forall k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$);

2) обмеженість $\theta_t\varphi$ по t ($0 < t \ll 1$) у класі Φ^{m^T} для всіх $\varphi \in \Phi^{m^T}$.

Зазначимо, що умова 2 стає очевидною, якщо врахувати наслідок 1 та оцінки (15) матриціанта θ_t, а також те, що компоненти вектора φ^T належать простору Φ.

Умову 1 одержуємо безпосередньо, виходячи зі структури (17) матриціанта θ_t та умови 5 з опису класу $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$.

Лему доведено.

Лема 4 „підказує", що граничними значеннями системи (7) при $t \to +0$ можуть бути елементи з класу $(\tilde{\Phi}')^{m^T}$, де $\tilde{\Phi} \overset{\text{df}}{=} \{F[\varphi](\cdot), \varphi \in \Phi\}$, причому початкову умову для (7)

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = f \tag{18}$$

слід розуміти як $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{(\tilde{\Phi}')^{m^T}} f$ (тобто як слабку збіжність у $(\tilde{\Phi}')^{m^T}$).

Таким чином, під розв'язком задачі Коші (7), (18) розумітимемо гладку вектор-функцію u^T, яка задовольняє систему (7) у звичайному розумінні, а початкову умову (18) у тому сенсі, що $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{(\tilde{\Phi}')^{m^T}} f$.

Наступне твердження характеризує розв'язність задачі Коші (7), (18).

Теорема 3. *Нехай елементи матричного символу $\mathcal{A}_t$ системи (7) належать класу $\mathfrak{L}^{\{\alpha_k\}}_{\overrightarrow{\Omega}}([0;T])$, $M_\nu(\cdot)$ і $\Omega_\nu(\cdot)$ — функції, взаємодвоїсті за Юнгом ($\nu \in \{1;\ldots;n\}$); $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$, $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}$ — послідовності, для яких виконується умова* B), *а f з $(\widetilde{\Phi}')^{m^T}$ такий, що $F[f]$ — мультиплікатор у просторі Φ^m. Тоді для задачі Коші (7), (18) існує єдиний розв'язок u, який неперервно залежить від початкових даних і такий, що для всіх t з $(0;T]$:1) $u(t,\cdot) \in \widetilde{\Phi}^{m^T}$; 2) $F[\partial_t u(t,\cdot)] = \partial_t(F[u(t,\cdot)])$; 3) $u(t,\cdot) = G_t(\cdot) * f$, де $\tilde{\Phi} \in \{W^{\overline{M}}; W^{\overline{M}}_{\{\beta_k\}}, \{\beta_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\} \geq \{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}^n_+\}\}$.*

Доведення. Оскільки нас цікавлять розв'язки системи (7), які при кожному фіксованому t з $(0;T]$ є елементами простору $\widetilde{\Phi}^{m^T}$ і по t задовольняють умову 2 даної теореми, то, зваживши на те, що відображення $F(F^{-1})$: $\tilde{\Phi} \to \Phi$ є взаємно однозначними і неперервними (див. [2] і теорему 1), одержуємо рівносильність системи (7) із системою (9). При цьому початкова умова (18) виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли

$$V(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{(\Phi')^{m^T}} F[f] \tag{19}$$

(див. означення перетворення Фур'є узагальненої функції [1]).

Отже, питання про коректну розв'язність задачі Коші (7), (18) у просторі $(\widetilde{\Phi}')^m$ рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (9), (19) у просторі $(\Phi')^m$.

Як було зазначено, система (9) є лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь з параметром, загальний розв'язок якої має вигляд

$$V(t,\xi) = \theta_t(\xi)c(\xi), \quad (t,\xi) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

З початкової умови (19), з огляду на (20) та лему 4 одержимо

$$\langle v_j(t,\cdot), \varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^m \left\langle c_k, \overline{\theta_t^{jk}(\cdot)}\varphi_j \right\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} \langle c_j, \varphi_j \rangle = \langle F[f_j], \varphi_j \rangle, \qquad j = \overline{1,m}, \quad \varphi \in \Phi^m$$

(тут $\overline{(\cdot)}$ позначає комплексну спряженість, а $\theta_t^{jk}(\cdot)$ — відповідний елемент матриціанта $\theta_t(\cdot)$).

Отже, $V(t,\cdot) = \theta_t(\cdot)F[f]$, $t \in (0;T]$, — розв'язок задачі Коші (9), (19). Оскільки $F[f]$ — мультиплікатор у Φ^m, а матриціант $\theta_t(\cdot)$ належить $P\Phi^m$ при кожному t з $(0;T]$ (див. наслідок 2), то $V(t,\cdot) \in \Phi^{m^T}$, $t \in (0;T]$.

Доведемо тепер, що знайдений розв'язок — єдиний у просторі Φ^{m^T}. Для цього припустимо, що у цьому просторі існує ще один розв'язок V_1 задачі Коші (9), (19). Виходячи зі структури (20) загального розв'язку системи (9), маємо $V_1(t,\cdot) = \theta_t(\cdot)c_1(\cdot)$, $t \in (0;T]$. Оскільки $V_1(t,\cdot) \in \Phi^{m^T}$, $t \in (0;T]$, то компоненти вектора $c_1(\cdot)$ належать $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Розглянемо вектор-функцію $V_2(t,\cdot) = V_1(t,\cdot) - V(t,\cdot)$, $t \in (0;T]$, яка також є розв'язком системи (9) і, як неважко переконатися, задовольняє нульову початкову умову: $V_2(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{(\Phi')^{m^T}} 0$. З цієї умови дістанемо

$$\langle (c_1 - F[f]), \varphi \rangle = \langle 0, \varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in \Phi^{m^T}). \tag{21}$$

Зваживши на те, що $\theta_t^{jj}(\xi) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 1$ рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ (див. доведення леми 4), прийдемо до висновку, що існує таке (достатньо мале) $t_0 > 0$, що $\theta_{t_0}^{jj}(\xi) \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,m}$. Поклавши тепер $\varphi_j = \overline{(c_{1j} - F[f_j])}(\theta_{t_0}^{jj}(\cdot))^2$, з (21) отримаємо рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{(c_{1j} - F[f_j](\xi))^2}(\theta_{t_0}^{jj}(\xi))^2 d\xi = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Звідси, врахувавши гладкість $c_1(\cdot)$ і $F[f](\cdot)$, одержимо рівність цих вектор-функцій на $\mathbb{R}^n$. Таким чином, $V_1(t,\xi) = V(t,\xi)$, $(t,\xi) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n$. Це і доводить єдиність розв'язку задачі Коші (9), (19) у просторі Φ^{m^T}.

Виконання ж умови 2 цієї теореми стає очевидним, якщо взяти до уваги наслідок 3.

Нарешті, з огляду на те, що

$$u(t,\cdot) = F^{-1}[V](t,\cdot) = F^{-1}[\theta_t(\xi)F[f](\xi)](t,\cdot), \quad t \in (0;T],$$

а також на теорему 1 з [16] прийдемо до висновку, що $u(t,\cdot) = G_t(\cdot) * f$, $t \in (0;T]$.

Розв'язок u задачі Коші (7), (18) неперервно залежить від початкових даних задачі, оскільки відповідний розв'язок V має таку властивість, а F^{-1}— неперервний оператор з Φ у $\widetilde{\Phi}$.

Теорему доведено.

Зазначимо, що при деяких додаткових припущеннях на систему (7) та вектор-функцію $\overrightarrow{\Omega}$ сформульовані умови в теоремі 3 є не лише достатніми, але й необхідними для коректної розв'язності задачі Коші (7), (18). Опишемо ці припущення: С) функції $\Omega_j(\cdot)$, $j = \overline{1,n}$, окрім раніше описаних властивостей, мають ще і таку:

$$\Omega_j(\delta x) \geq \widehat{f}_{1j}(\delta)\Omega_j(x) + \widehat{f}_{2j}(\delta), \quad \delta \in (0;1), x \in \mathbb{R},$$

де $\widehat{f}_{1j}(\cdot)$ — додатні, а $\widehat{f}_{2j}(\cdot)$ — довільні функції, обмежені на $(0;1)$; Д) система (7) не лише задовольняє умову (8), а є такою, що

$$\exists \delta_0^* > 0 \, \exists c_0^* \in \mathbb{R} \, \forall t \in [0;T] \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \min_{j=\overline{1,m}} \mathrm{Re}\lambda_j(t,\xi) \geq -\delta_0^*(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi)) + c_0^*,$$

де λ_j, $j = \overline{1,m}$, — власні значення матричного символу $\mathcal{A}_t$ системи (7).

Мають місце такі допоміжні твердження.

Лема 5. *Нехай для системи (7) виконується припущення* Д) *і послідовність* $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* В), *а* $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ — *обернена матриця до матриціанта* $\theta(t;\cdot,\tau)$ *системи (9) при* $\tau \in [0;t)$, $t \in (0;T]$. *Тоді існують додатні сталі* c_0, δ_0, *не залежні від* τ, t, ξ *і такі, що для всіх* $\tau \in [0;t)$, $t \in (0;T]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\theta^{-1}(t;\xi,\tau)| \leq c_0 \exp\{(t-\tau)\delta_0(1, \overrightarrow{\Omega}(\xi))\}.$$

Доведення. Насамперед нагадаємо, що $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = \theta(\tau;\cdot,t)$, $t \in (0;T]$, $\tau \in [0,t)$. Отже, $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ — нормований розв'язок задачі Коші

$$\partial_\tau \theta^{-1}(t;\xi,\tau) = \mathcal{A}_\tau(\xi)\theta^{-1}(t;\xi,\tau), \quad (\tau,\xi) \in [0;t) \times \mathbb{R}^n, \qquad \theta^{-1}(t;\cdot,\tau)|_{\tau=t} = E. \tag{22}$$

Далі діятимемо, як і при доведенні леми 1. Зафіксуємо довільне τ^* з $[0;T]$ і подамо систему з (22) у вигляді

$$\partial_\tau \theta^{-1} = \mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)\theta^{-1} + q(\tau,\xi),$$

де $q(\tau,\cdot) = (\mathcal{A}_\tau(\cdot) - \mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot))\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$. Тоді

$$\theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = e^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)} + \int\limits_t^\tau e^{(\tau-\sigma)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)} q(\sigma,\cdot)d\sigma,$$

причому виконуються нерівності

$$|e^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)}| \le e^{(\tau-t)\min\limits_{j=\overline{1,m}}\mathrm{Re}\lambda_j(\tau^*,\xi)}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}(2(t-\tau)\|\mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)\|)^j\right) \le$$

$$\le c\exp\{(t-\tau)2\delta_0^*(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\}\left(c_0 + \sum_{j=1}^{m-1}((t-\tau)\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\{|A_*(0,\xi)|e^{-(t-\tau)\delta_0^*/j(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\})^j\right) \le$$

$$\le c_1\exp\{(t-\tau)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\}, \quad \tau\in[0;t),$$

де c_1 — додатна стала, не залежна від t, τ, τ^* і ξ, а $\delta = 2\delta_0^*$.

Звідси вже з огляду на те, що при $\tau^* = t$ для всіх τ з $[t-\varepsilon,t)$, $0<\varepsilon\ll 1$, і $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$|q(\tau,\xi)| \le m\nu(\varepsilon)(|A_*(0,\xi)|+c)|\theta^{-1}(t;\xi,\tau)|,$$

дістанемо

$$|\theta^{-1}(t;\xi,\tau)|\exp\{(\tau-t)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\} \le c_1 + c_1 m^2\nu(\varepsilon)\Big(|A_*(0,\xi)|+c\Big)\times$$

$$\times\int\limits_\tau^t \exp\{(\sigma-t)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\}|\theta^{-1}(t;\xi,\sigma)|d\sigma.$$

Тепер на підставі аналога леми 2 з [15, с. 300] отримаємо

$$|\theta^{-1}(t;\xi,\tau)|\exp\{(\tau-t)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\} \le c_1\Big(1+\exp\{(t-\tau)2c_1m^2\nu(\varepsilon)(|A_*(0,\xi)|+c)\}\Big).$$

Відтак, зафіксувавши відповідним чином ε з $(0;1)$ (див. доведення леми 1), одержимо оцінку

$$|\theta^{-1}(t;\xi,\tau)| \le c_2\exp\{(t-\tau)4\delta_0^*(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))\} \tag{23}$$

для всіх $\tau\in[t-\varepsilon,t)$, $t\in(0;T]$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$, де c_2 — додатна стала, не залежна від t, τ, ξ і ε.

На завершення зазначимо, що міркуючи, як і при обґрунтуванні наслідку 1, зважаючи при цьому на рівність $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = \theta(\tau;\cdot,t)$, оцінку (23) можна легко поширити по змінній τ на увесь проміжок $[0,t)$ для кожного фіксованого t з $(0,T]$.

Лему доведено.

Лема 6. *Нехай виконуються умови леми 5. Тоді* $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ *нескінченно диференційовна по просторовій змінній на* $\mathbb{R}^n$, *причому*

$$\exists\{c,\delta,B\}\subset(0;+\infty)\,\forall k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}\,\forall t\in(0;T]\,\forall\tau\in[0;t)\,\forall\xi\in\mathbb{R}^n:$$

$$|D_\xi^k\theta^{-1}(t;\xi,\tau)|\le cB^{|k|}\widehat{\alpha}_k e^{(t-\tau)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}.$$

Доведення. Оскільки θ^{-1} — розв'язок задачі Коші (22), а елементи матриці $\mathcal{A}_\tau(\cdot)$ належать класу $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}$, то, як і при доведенні леми 2, переконуємось у правильності рекурентної формули

$$D_\xi^k\theta^{-1}(t;\xi,\tau)=\int_t^\tau\theta^{-1}(\sigma;\xi,\tau)(D_\xi^k(\mathcal{A}_\sigma(\xi)\theta^{-1}(t;\xi,\sigma))-\mathcal{A}_\sigma(\xi)D_\xi^k\theta^{-1}(t;\xi,\sigma))d\sigma$$

для всіх $k\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\}$, $t\in(0;T]$, $\tau\in[0;t)$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$.

З цієї формули на підставі леми 5, а також властивостей елементів матриці $\mathcal{A}_\tau(\cdot)$ та умови В) послідовності $\{\alpha_k,k\in\mathbb{Z}_+^n\}$ отримуємо твердження даної леми (див. доведення леми 2).

Лему доведено.

Лема 7. *Нехай виконуються припущення* С) *і* Д), $\Phi\in\{W_{\overrightarrow{\Omega}};W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}},\{\beta_k,k\in\mathbb{Z}_+^n\}\ge\{\alpha_k,k\in\mathbb{Z}_+^n\}\}$, *а послідовність* $\{\beta_k,k\in\mathbb{Z}_+^n\}$ *задовольняє умову* В). *Тоді для кожного елемента* $P(\cdot)$ *з* $P\Phi^m$ *існує* $t_0\in(0;1)$ *таке, що для всіх* $t\in(0;t_0)$ *добуток* $P(\cdot)\theta_t^{-1}(\cdot)$ *належить класу* $P\Phi^m$ (*тут* $\theta_t^{-1}(\cdot)=\theta^{-1}(t;\cdot,0)$).

Доведення. Покладемо спочатку $\Phi=W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}}$. Для довільного $l\in\mathbb{Z}_+^n$

$$|D_\xi^l(P(\xi)\theta_t^{-1}(\xi))|\le m\sum_{k=0}^{l}C_l^k|D_\xi^{l-k}P(\xi)|\,|D_\xi^k\theta_t^{-1}(\xi)|,\quad t\in(0;T],\xi\in\mathbb{R}^n,$$

і, оскільки $P\in P\Phi^m$ і виконуються припущення С), існують такі додатні сталі c, B і $\delta_1\in(0;1)$, що

$$|D_\xi^l(P(\xi)\theta_t^{-1}(\xi))|\le mcB^{|l|}\sum_{k=0}^{l}\widehat{\beta}_{l-k}e^{-\sum_{\nu=1}^n\Omega_\nu(\delta_1\xi_\nu)}|D_\xi^k\theta_t^{-1}(\xi)|\le c_1B_1^{|l|}e^{-\widehat{f}_1(\delta_1)(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{l}\widehat{\beta}_{l-k}\widehat{\beta}_k e^{t\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\le c_2B_2^{|l|}\widehat{\beta}_l e^{-\widehat{f}_1(\delta_1)/2(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))},$$

$$1\in\mathbb{Z}_+^n,\quad\xi\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\left(0;\frac{\widehat{f}_1(\delta_1)}{2\delta}\right),$$

де c_2, B_2 — додатні сталі, не залежні від l, t і ξ, а $\widehat{f}_1(\delta_1)=\min\limits_{\nu=\overline{1,n}}\{\widehat{f}_{1\nu}(\delta_1)\}$ (тут враховано леми 5, 6 та умову В) послідовності $\{\beta_k,k\in\mathbb{Z}_+^n\}$). Отже, $P(\cdot)\theta_t^{-1}(\cdot)\in P(W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}})^m$ для всіх $t\in(0;t_0)$, де $t_0=\widehat{f}_1(\delta_1)/(2\delta)$.

Аналогічним чином переконуємося у тому, що дане твердження справджується й у випадку $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}$.

Лему доведено.

Наступне твердження характеризує мультиплікатори у класі Φ^m.

Теорема 4 (критерій мультиплікатора). *Нехай виконуються всі умови леми 7. Тоді для того щоб вектор-функція $\mu(\cdot)^T = \{\mu_1(\cdot); \ldots; \mu_m(\cdot)\}$ була мультиплікатором у просторі Φ^m, необхідно і достатньо, щоб для кожного $0 < t \ll 1$ добуток $\theta_t(\cdot)\mu(\cdot)$ належав класу Φ^m.*

Доведення. *Необхідність* є очевидною, оскільки матрицант $\theta_t(\cdot)$ належить $P\Phi^m$ для всіх $t \in (0; T]$. Доведемо *достатність*. Для цього зафіксуємо довільну матрицю $P(\cdot)$ з $P\Phi^m$ і розглянемо добуток $P(\cdot)\mu(\cdot)$, який подамо у вигляді

$$P(\cdot)\mu(\cdot) = (P(\cdot)\theta_t^{-1}(\cdot))(\theta_t(\cdot)\mu(\cdot)), \quad 0 < t \ll 1. \tag{24}$$

Беручи до уваги лему 7, бачимо, що $P(\cdot)\mu(\cdot) \in \Phi^m$. Таким чином, умова 1 з означення мультиплікатора у Φ^m виконується.

Переконаємось тепер у виконанні умови 2 з цього означення. Нехай довільна послідовність $\{P; P_\nu, \nu \geq 1\} \subset P\Phi^m$ є такою, що $P_\nu \underset{\nu\to+\infty}{\overset{P\Phi^m}{\longrightarrow}} P$. Тоді достатньо показати, що $P_\nu\mu \underset{\nu\to+\infty}{\overset{{\Phi^m}^T}{\longrightarrow}} P\mu$, тобто: а) $D_\xi^k((P_\nu(\xi) - P(\xi))\mu(\xi)) \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ ($\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$); б) послідовність $\{P_\nu\mu, \nu \geq 1\}$ рівномірно обмежена (по $\nu \geq 1$) у класі ${\Phi^m}^T$.

Зазначимо, що умова а) одержується безпосередньо зі збіжності $\{P_\nu, \nu \geq 1\}$ у класі $P\Phi^m$ та з обмеженості $D_\xi^k\mu(\xi)$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, по ξ на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$. Умова ж б) стає очевидною, якщо зважити на аналог рівності (24), лему 7 та на збіжність послідовності $\{P_\nu, \nu \geq 1\}$ у $P\Phi^m$.

Теорему доведено.

З попередньої теореми одержуємо очевидний наслідок.

Наслідок 4. *Нехай виконуються всі умови леми 7. Тоді для того щоб вектор-функція $\mu(\cdot)^T$ з $(C^\infty(\mathbb{R}^n))^m$ була мультиплікатором у Φ^m, необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall 0 < \delta \ll 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists c_{\delta,k} > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n : |D_\xi^k \mu(\xi)| \leq c_{\delta,k} e^{\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))},$$

причому $c_{\delta,k} = c_\delta B_\delta^{|k|}\widehat{\beta}_k$ у випадку $\Phi = W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\beta_k\}}$, де c_δ і B_δ — додатні сталі, залежні лише від δ.

Правильним є таке твердження.

Теорема 5. *Нехай $m = 1$, виконуються всі умови леми 7 і $a_j \in \mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}([0;T])$. Тоді при кожному фіксованому t з $[0;T]$ функція $a_j(t,\cdot)$ є мультиплікатором у просторі $\Phi^1 \equiv \Phi$.*

Доведення. Згідно з умовою 3 з опису елементів класу $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}([0;T])$ отримуємо

$$|D_\xi^k a_j(t,\xi)| \leq |b_j(t)| \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\{|A_j(k,\xi)|e^{-\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}\}e^{\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))} \leq$$

$$3 \leq c_j|b_j(t)|\delta^{-1}B_j^{|k|}\widehat{\alpha_k}e^{\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(\xi))}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\delta \in (0;1)$ і $t \in [0;T]$. Звідси, зважаючи на наслідок 4, приходимо до твердження теореми 5.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що якщо символ $a_j(\cdot,\cdot)$ належить класу $\mathfrak{L}_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}([0;T])$, то при кожному фіксованому t з $[0;T]$:

1) псевдодиференціальний оператор A_{a_j} неперервно відображає простір $\widetilde{\Phi}$ в себе;

2) перетворення Фур'є символу $a_j(t,\cdot)$ (позначатимемо $\widetilde{a}_j(t,\cdot)$) є згортувачем у $\widetilde{\Phi}$;

3) $A_{a_j}f = \widetilde{a}_j * f$, $f \in \widetilde{\Phi}$.

Зазначимо, що трактування псевдодиференціального оператора A_{a_j} як оператора згортки дозволяє здійснити продовження його з простору $\widetilde{\Phi}$ (досить „хороших" функцій) на простір $\widetilde{\Phi}'$ (узагальнених функцій). При цьому таке продовження $\widehat{A}_{a_j}$ оператора A_{a_j} є коректним. Дійсно, оскільки

$$\widehat{A}_{a_j}f = \widetilde{a}_j * f, \quad f \in \widetilde{\Phi}',$$

а $(A_{a_j}\varphi) \in \widetilde{\Phi}$ для всіх $\varphi \in \widetilde{\Phi}$, то

$$\left\langle \widehat{A}_{a_j}f, \varphi \right\rangle = \langle \widetilde{a}_j * f, \varphi \rangle = \langle f, \widetilde{a}_j * \varphi \rangle = \left\langle f, A_{a_j}\varphi \right\rangle \quad (\forall \varphi \in \tilde{\Phi}).$$

Отже, якщо виконуються всі умови з леми 7 і $a_j \in \mathfrak{L}_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}([0;T])$, то

$$\widehat{A}_{a_j} : \widetilde{\Phi}' \to \widetilde{\Phi}',$$

причому правильною є рівність

$$\left\langle \widehat{A}_{a_j}f, \varphi \right\rangle = \left\langle f, A_{a_j}\varphi \right\rangle \ (\forall \varphi \in \widetilde{\Phi}).$$

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються припущення* C) *і* Д), *елементи матриці $\mathcal{A}_t$ належать класу $\mathfrak{L}_{\vec{\Omega}}^{\{\alpha_k\}}([0;T])$, функції $M_\nu(\cdot)$ і $\Omega_\nu(\cdot)$, $\nu = \overline{1,n}$, є взаємодвоїстими за Юнгом, а послідовність $\{\beta_k, k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ (з опису простору Φ) задовольняє умову* B). *Тоді для того щоб задача Коші (7), (18) була коректно розв'язною і: 1) її розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому $t \in (0;T]$ належав класу $\widetilde{\Phi}^{m^T}$; 2) $\partial_t F[u] = F[\partial_t u]$, $t \in (0;T]$, необхідно і достатньо, щоб $F[f]$ був мультиплікатором у Φ^m. При цьому завжди виконуватиметься рівність $u(t,x) = G_t(x) * f$, $(t,x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n$.*

Доведення. *Достатність* одержуємо з теореми 3. Доведемо *необхідність*. Як зазначалося при доведенні теореми 3, питання про коректну розв'язність задачі Коші (7), (18) у просторі $(\tilde{\Phi}')^m$ рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (9), (19) у просторі $(\Phi')^m$. Тому достатньо показати, що якщо задача Коші (9), (19) є коректно розв'язною, то $F[f]$ — мультиплікатор у Φ^m.

Оскільки $V(t,\cdot) = \theta_t(\cdot)C(\cdot) \in \Phi^{m^T}$ при кожному фіксованому t з $(0;T]$ (див. (20)), то згідно з теоремою 4 функція $C(\cdot)$ — мультиплікатор у Φ^m. Зважаючи на лему 4, з умови (19) одержуємо

$$\langle C(\cdot), \varphi(\cdot) \rangle = \langle F[f], \varphi(\cdot) \rangle \ (\forall \varphi \in \Phi^{m^T}).$$

Звідси на підставі єдиності розв'язку задачі Коші (9), (19) приходимо до висновку, що $F[f]$ — регулярний вектор-функціонал, породжений мультиплікатором у просторі Φ^m.

Теорему доведено.

На завершення наведемо приклад. Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(t,x) &= -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\gamma} (B_a^\tau u_1)(t,x)d\tau - b(t)u_2(t,x), \\ \partial_t u_2(t,x) &= b(t)u_1(t,x) - \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\gamma} (B_a^\tau u_2)(t,x)d\tau, (t,x) \in (0;T]\times\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{25}$$

де $\gamma > 0, a > 1, B_a^\tau$ — оператор Бесселя дробового диференціювання з додатним параметром [17] (тобто $B_a^\tau = (aI - \partial_x^2)^{\tau/2}$), а $b(\cdot) \in \widehat{C}([0;T])$.

За умови, що $u = \{u_1, u_2\}^T \in S^{2^T}$, дана системи еквівалентна системі (7) з матричним символом

$$\mathcal{A}_t(\xi) = \begin{pmatrix} -\dfrac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)} & -b(t) \\ b(t) & -\dfrac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)} \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатися, що

$$\mathrm{Re}\lambda_1(t,\xi) = \mathrm{Re}\lambda_2(t,x) = -\frac{(a+\xi^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+\xi^2)}, \quad (t,\xi) \in [0;T]\times\mathbb{R},$$

де λ_j — власні значення матриці $\mathcal{A}_t$.

Узгодимо тепер $\gamma > 0$ і $a > 1$ так, щоб $\dfrac{(a+(\cdot)^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+(\cdot)^2)}$ була опуклою функцією, і покладемо $\overrightarrow{\Omega}(\cdot) = \dfrac{(a+(\cdot)^2)^{\gamma/2}}{\ln(a+(\cdot)^2)} - \dfrac{a^{\gamma/2}}{\ln a}$, $\alpha_k = k!$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді, як фактично доведено в [12], елементи матриці $\mathcal{A}_t$ належать класу $\mathfrak{L}_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{k!\}}([0;T])$, причому послідовність $\{k!, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову В) і виконуються припущення С), Д).

Отже, згідно з теоремою 6 відповідна задачі Коші (25), (18) буде коректно розв'язною у $\tilde{\Phi}^{2^T}$, де $\Phi \in \{W_{\overrightarrow{\Omega}}; W_{\overrightarrow{\Omega}}^{\{(k!)^\beta\}}, \beta \geq 1\}$, тоді і лише тоді, коли $F[f]$ — мультиплікатор у класі Φ^{2^T}.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. — 307 с.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 274 с.
3. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівняння параболічного типу. — Чернівці: Рута, 1998. — 225 с.
4. *Гуревич Б. Л.* Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем конечно-разностных уравнений // Докл. АН СССР. — 1954. — **99**, № 6. — С. 893–895.

5. *Гуревич Б. Л.* Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для дифференциально-разностных уравнений // Докл. АН СССР. — 1956. — **108**, № 6. — С. 1001 – 1003.
6. *Литовченко В.А.* Корректная разрешимость задачи Коши для одного псевдодифференциального уравнения интегрального вида в пространствах типа S // Нелинейные граничные задачи. — 2003. — Вып. 13.— С. 105 – 113.
7. *Nagase M.* On the Cauchy problem for parabolic pseudodifferential equations // Osaka J. Math. — 1974. — **11**, №2. — P. 239 – 264.
8. *Shinkai R.* On symbols of fundamental solutions of parabolic systems // Proc. Jap. Acad. — 1974. — **50**, № 5-6. — P. 337 – 341.
9. *Tsutsumi C.* The fundamental solutions for a degenerate parabolic pseudodifferential operator // Ibid. — № 1. — P. 11 – 15.
10. *Tsutsumi C.* The fundamental solutions for a parabolic pseudo-differential operator and parametrices for degenerate operators // Ibid. — 1975. — **51**, № 2. — P. 103 – 108.
11. *Schwartz L.* Theorie des distributions // Acra. sci. industr. — 1950. — **1**, № 1091.
12. *Літовченко В. А.* Коректна розв'язність задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 2. — С. 185 – 197.
13. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
14. *Гантмахер Ф .Р.* Теория матриц. — 4-е изд. — М.: Наука, 1968. — 552 с.
15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 428 с.
16. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. — 1954. — **97**, № 6. — С. 949 – 952.
17. *Літовченко В. А.* Бесселеве дробове інтегродиференціювання з додатним параметром // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2002. — Вип. 134. — С. 65 – 70.

Одержано 24.02.2006