УДК 517.9

СИНГУЛЯРНО НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Н. Е. Дудкин

Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”
Украина, 02057, Киев, просп. Победы, 37
e-mail: dudkin@imath.kiev.ua

We propose a construction of a singularly perturbed self-adjoint operator with a given compact set in its singularly continuous spectrum. In particular, the set can be a fractal of a prescribed type. There we use the construction of a singularly perturbed operator $\tilde{A}$ of a given self-adjoint operator A on a Hilbert space $\mathcal{H}$ such that it solves the eigen value problem $\tilde{A}\psi_i = \lambda_i\psi_i$ for a countable set $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ with real numbers $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$, $|\lambda_i| < \infty$, and an orthonormal system of vectors $\{\psi_i\}$, $i = 1, 2\ldots$, under some general type conditions.

Пропонується побудова сингулярно збуреного самоспряженого оператора із заданою компактною множиною в його сингулярно неперервному спектрі. Зокрема, множина може бути фракталом наперед заданого типу. При цьому використовується конструкція сингулярно збуреного оператора $\tilde{A}$ для заданого самоспряженого оператора A в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, який розв'язує задачу на власні значення $\tilde{A}\psi_i = \lambda_i\psi_i$ для зліченної множини $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ дійсних чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$, $|\lambda_i| < \infty$, й ортонормованої системи векторів $\{\psi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, із деякими додатковими умовами загального характеру.

1. Введение. Пусть $A = A^*$ — неограниченный самосопряженный оператор, определенный на $\mathfrak{D}(A) \equiv \operatorname{dom}(A)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$.

Самосопряженный оператор $\tilde{A} \neq A$ в $\mathcal{H}$ называется чисто сингулярно возмущенным [1–6] относительно A, если множество $\mathfrak{D} := \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) | Af = \tilde{A}f\}$ плотно в $\mathcal{H}$, и обозначается $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$. Очевидно, что для каждого $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$ существует плотно определенный эрмитов (симметрический) оператор $\dot{A} := A \restriction \mathfrak{D} = \tilde{A} \restriction \mathfrak{D}, \mathfrak{D}(\dot{A}) = \mathfrak{D}$ с нетривиальными индексами дефекта $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim \operatorname{Ker}(\dot{A} \pm i)^* \neq 0$. Размерность дефектного подпространства общего эрмитова оператора называют рангом возмущения. В настоящей работе рассматриваются возмущения бесконечного ранга.

Основной задачей работы является построение сингулярно возмущенного (бесконечного ранга) оператора, сингулярно непрерывный спектр которого содержит наперед заданное компактное множество действительной оси. Для решения этой задачи используется построение оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$, для которого выполняется

$$\tilde{A}\psi_i = \lambda_i\psi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

для заданного счетного множества $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $|\lambda_i| < \infty$, и ортонормированной системы векторов $\Psi := \{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что

$$(\operatorname{span}\Psi)^{\mathrm{cl}} \cap \operatorname{dom}(A) = \{0\}, \tag{2}$$

где cl обозначает замыкание по норме $\mathcal{H}$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{dist}\,(z, \mathrm{spsupp}_0(\psi_i)))^{-2} < \infty. \tag{3}$$

Здесь $\mathrm{dist}(z, \mathrm{spsupp}_0(\psi_i))$ обозначает расстояние от некоторой фиксированной точки z до спектрального носителя $\mathrm{spsupp}_0(\psi_i)$ вектора ψ_i (спектральный носитель относительно разложения единицы оператора A).

Близкими к данной работе являются исследования самосопряженных расширений заданного эрмитова оператора, так что расширенные операторы имеют в лакунах эрмитова оператора наперед заданные типы спектров. Заметим, что первые исследования, касающиеся конечного точечного спектра, выполнены в роботах М. Г. Крейна [7]. Указанные вопросы рассматривались и в работах [8 – 14] (см. также библиографию в них). В этих работах расширения описываются в терминах функции Вейля и пространств граничных значений.

Преимущество метода, предлагаемого в настоящей работе, заключается в том, что в спектр сингулярно возмущенного оператора можно включить любое компактное множество (не обязательно в лакуну).

2. Точечный спектр сингулярно возмущенного оператора. Основным вспомогательным результатом является следующая теорема (ср. с [15, 16]).

Теорема 1. *Для каждого неограниченного самосопряженного оператора* A, *определенного на* $\mathfrak{D}(A)$, *в сепарабельном гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *существует сингулярно возмущенный оператор* $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$, *решающий задачу о собственных значениях (1) для заданного счетного множества* $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ *действительных чисел* $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$, $|\lambda_i| < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, *и системы ортонормированных векторов* $\Psi := \{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, *для которых выполняются условия (2) и (3).*

Заметим, что оператор $\tilde{A}$ определяется однозначно, если множество Λ конечно. Краткое доказательство теоремы в случае конечного Λ имеется в [16], а детальное доказательство приведено в [17].

Доказательство. По условию теоремы предполагается существование множества $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющего условию (2). В следующей лемме доказывается существование такого множества.

Лемма 1. *Для неограниченного самосопряженного оператора* A, *определенного на* $\mathfrak{D}(A)$, *в сепарабельном гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *существует подпространство* Φ *такое, что* $\Phi \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$, *при этом* $\dim \Phi = \infty$.

Для заданного счетного множества $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $|\lambda_i| < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, и ортонормированной системы векторов $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\|\psi_i\| = 1$, $\psi_i \perp \psi_j$, $i \neq j$, удовлетворяющих условию (2), построим последовательность операторнозначных функций $R_k(z)$:

для $k = 0$

$$R_0(z) := (A_0 - z)^{-1}, \quad A_0 \equiv A,$$

для $k \geq 1$

$$R_k(z) := R_{k-1}(z) + b_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z), \quad \mathrm{Im}\,(z) \neq 0, \tag{4}$$

где $R_{k-1}(z)$ — резольвента самосопряженного оператора A_{k-1}, построенного индуктивным путем с помощью векторнозначной $\eta_k(z)$ и скалярнозначной $b_k(z)$ функций

$$\eta_k(z) := (A_{k-1} - \lambda_k)R_{k-1}(z)\psi_k, \tag{5}$$

$$b_k(z) := (\lambda_k - z)(\psi_k, \eta_k(\bar{z})). \tag{6}$$

Рассмотрим последовательность (4), определенную с помощью (5) и (6), а также сильный предел

$$\tilde{R}(z) := \mathrm{s} - \lim_{k\to\infty} R_k(z), \tag{7}$$

т. е.

$$\tilde{R}(z) := R_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z).$$

Покажем, что

$$\tilde{B}(z) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z) \tag{8}$$

является ограниченным оператором для некоторого $z \in \mathbb{C}$ (а следовательно, и для всех $z \in \mathbb{C}$ таких, что $\mathrm{Im}\,(z) \neq 0$).

Заметим, что все операторы $R_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены для фиксированного $z\,(\mathrm{Im}\,(z) \neq 0)$:

$$\|R_k(z)\| = \frac{1}{\mathrm{dist}(\sigma(A_k), z)} \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\,(z)|} = c_0.$$

Кроме того,

$$\|b_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z})\eta_k(z)\| = \|b_k^{-1}(z)\|\|\eta_k(z)\|^2 =$$
$$= \|R_k(z) - R_{k-1}(z)\| \leq \|R_k(z)\| + \|R_{k-1}(z)\| \leq 2c_0, \tag{9}$$

и, вообще, для $n < \infty$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z)\right\| = \|R_k(z) - R_0(z)\| \leq \|R_k(z)\| + \|R_0(z)\| \leq 2c_0.$$

Из (5) имеем

$$\eta_k(z) = \psi_k + (z - \lambda_k)R_{k-1}(z)\psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Все векторы $\eta_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены (по норме)

$$\|\eta_k(z)\| = \|\psi_k + (z - \lambda_k)R_{k-1}(z)\psi_k\| \leq$$
$$\leq \|\psi_k\| + |z - \lambda_k|\,\|R_{k-1}(z)\psi_k\| \leq 1 + \frac{M}{\mathrm{Im}\,(z)} = 1 + Mc_0 = c_1,$$

где $M := \sup_k |z - \lambda_k| < \infty$, поскольку числа множества $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ не стремятся к $\pm\infty$.

Напомним, что $\operatorname{spsupp}_n(\psi_k) = \operatorname{spsupp}_{R_n(z)}(\psi_k)$ обозначает спектральный носитель вектора ψ_k относительно разложения единицы оператора A_n (его резольвенты $R_n(z)$).

Лемма 2. *Для ортонормированной системы векторов Ψ и последовательности $R_k(z)$, определенной в (4), выполняются неравенства*

$$\operatorname{dist}(z, \operatorname{spsupp}_0(\psi_k)) \leq \operatorname{dist}(z, \operatorname{spsupp}_{k-1}(\psi_k)). \tag{10}$$

Доказательство. Для $k = 1$ из (4) имеем

$$R_1(z) = R_0(z) + b_1^{-1}(z)(\cdot, \eta_1(\bar{z}))\eta_1(z), \tag{11}$$

где

$$\eta_1(z) = \psi_1 + (z - \lambda_1)R_0(z)\psi_1, \quad b_1(z) = (\lambda_1 - z)(\psi_1, \eta_1(\bar{z})) \tag{12}$$

получены из (5) и (6). Подставляя ψ_2 в (11), получаем

$$R_1(z)\psi_2 = R_0(z)\psi_2 + b_1^{-1}(z)(\psi_2, \eta_1(\bar{z}))\eta_1(z)$$

и

$$(R_1(z)\psi_2, \psi_2) = (R_0(z)\psi_2, \psi_2) + b_1^{-1}(z)|(\psi_2, \eta_1(\bar{z}))|^2 =$$

$$= (R_0(z)\psi_2, \psi_2) + b_1^{-1}(z)|(\bar{z} - \lambda_1)|^2 \, |(R_0(\bar{z})\psi_2, \psi_1)|^2,$$

а также

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} d(E_x^1\psi_2, \psi_2) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z}\, d(E_x^0\psi_2, \psi_2) + b_1^{-1}(z)|(z - \lambda_1)|^2 \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z}\, d(E_x^0\psi_2, \psi_1) \right|^2. \tag{13}$$

Из равенства следует, что для интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$ такого, что $E^0(\Delta)\psi_2 = 0$, следует $E^1(\Delta)\psi_2 = 0$, т. е. $\operatorname{spsupp}_0(\psi_2) \supseteq \operatorname{spsupp}_1(\psi_2)$.

Аналогично для произвольного k имеем $\operatorname{spsupp}_{k-2}(\psi_k) \supseteq \operatorname{spsupp}_{k-1}(\psi_k)$. По транзитивности $\operatorname{spsupp}_0(\psi_k) \supseteq \operatorname{spsupp}_{k-1}(\psi_k)$. Следовательно, для фиксированного z, $\operatorname{Im}(z) \neq \neq 0$, получаем (10).

Лемма 2 доказана.

Теперь, используя лемму, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|R_{k-1}(z)\psi_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{dist}(z, \operatorname{spsupp}_{k-1}(\psi_k)))^{-2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{dist}(z, \operatorname{spsupp}_0(\psi_k)))^{-2} < \infty. \tag{14}$$

Поскольку $\|\eta_k(z)\| \geq |1 - |z-\lambda_k|\|R_{k-1}(z)\psi_k\||$, существует константа $c_2 > 0$ такая, что $\|\eta_k(z)\| \geq c_2$ для достаточно больших номеров k.

Таким образом, последовательность $\eta_k(z)$ является почти нормированным базисом в $\mathfrak{N}_z$ [18, 19], т. е.

$$0 < c_2 \leq \|\eta_k(z)\| \leq c_1 < \infty. \tag{15}$$

Из (9) имеем $|b_k^{-1}(z)|\,\|\eta_k(z)\|^2 \leq 2c_0$, и, следовательно,

$$|b_k^{-1}(z)| \leq \frac{2c_0}{c_2^2} =: c_3. \tag{16}$$

Покажем, что векторы $\{\eta_k(z)\}$ линейно независимы. Для достаточно больших номеров k

$$|(\eta_k(z), \eta_n(z))| < c_4 < \|\eta_k(z)\|\,\|\eta_n(z)\|.$$

Для $k > n$ имеет место $\psi_k \perp \eta_n(z)$, поэтому

$$|(\eta_k(z), \eta_n(z))| = |((\psi_k + (z-\lambda_k)R_{k-1}(z)\psi_k), \eta_n(z))| =$$

$$= |z-\lambda_k|\,|(R_{k-1}(z)\psi_k, \eta_n(z))| \leq M\|R_{k-1}(z)\psi_k\|\,\|\eta_n(z)\|.$$

Из (14) следует $\|R_{k-1}(z)\psi_k\| \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. Тогда для достаточно больших номеров k найдется константа c_4 такая, что

$$M\|R_{k-1}(z)\psi_k\|\,\|\eta_n(z)\| \leq c_4 < c_2 \leq \|\eta_k(z)\|.$$

Покажем, что $\eta_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, является базисом Рисса в $\mathfrak{N}_z := (\mathrm{span}\{\eta_i(z)\}_{i=1}^{\infty})^{\mathrm{cl}}$ для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,(z) \neq 0$. (Базисом Рисса называется базис, эквивалентный ортонормированному [8, 18, 19].)

Поскольку все векторы $\{\eta_k(z)\}$ линейно независимы и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\tilde{\eta}_k(z) - \psi_k(z)\|^2 = \|\sum_{k=1}^{\infty}(z-\lambda_k)R_{k-1}(z)\psi_k\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}|z-\lambda_k|\,\|R_{k-1}(z)\psi_k\|^2 \leq M\sum_{k=1}^{\infty}\|R_{k-1}(z)\|^2 < \infty,$$

согласно теореме VI.2.3 [19] базис $\{\eta_k(z)\}$ является эквивалентным ортонормированному и, следовательно, оператор, переводящий базис в базис,

$$T : \psi_k \longrightarrow \tilde{\eta}_k(z) = \psi_k + (z-\lambda_k)R_{k-1}(z)\psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

ограничен и имеет ограниченный обратный.

Рассмотрим линейный оператор

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-1}(z)(\cdot, \psi_k)\psi_k.$$

Он ограничен, поскольку $|b_k^{-1}(z)| \leq c_3$ и $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — множество ортонормированных векторов. Тогда оператор

$$\tilde{B}(z) = TS(z)T,$$

точнее

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_k^{-1}(z)(\cdot, T(\bar{z})\psi_k)T(z)\psi_k,$$

ограничен как произведение трех ограниченных операторов.

Теперь для произвольного ненулевого вектора $\eta \neq 0, \eta \in \mathfrak{N}_z := \operatorname{span}\{\eta_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ имеем разложение

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tilde{\eta}_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - \lambda_k) R_0 \psi_k,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, так как $\{\eta_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис Рисса [8, 18, 19]. Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k \notin \mathfrak{D}(A)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k (z - \lambda_k) R_0 \psi_k \in \mathfrak{D}(A)$, то $\eta \notin \mathfrak{D}(A)$. Таким образом, $\mathfrak{N}_z \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$.

Покажем, что определенный в (7) оператор $\tilde{R}(z)$ — резольвента некоторого замкнутого оператора. Проверим тождество Гильберта для $\tilde{R}(z)$. Действительно, при переходе в выражении

$$R_n(z) - R_n(\xi) = (z - \xi) R_n(z) R_n(\xi), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

к пределу при $n \to \infty$ (в сильном смысле) получаем

$$\tilde{R}(z) - \tilde{R}(\xi) = (z - \xi)\tilde{R}(z)\tilde{R}(\xi).$$

Покажем, что $\ker \tilde{R}(z) = \{0\}$. Действительно, для любого $f \in \mathcal{H}$

$$\tilde{R}(z) f = R_0(z) f + \tilde{B}(z) f \neq 0,$$

поскольку $R_0(z) f \in \mathfrak{D}(A)$ и $R_0(z) f \neq 0$ вследствие того, что $R_0(z)$ является резольвентой самосопряженного оператора и $\tilde{B}(z) f \notin \mathfrak{D}(A)$.

Покажем, что $\tilde{R}(z)$ также является резольвентой самосопряженного оператора. Действительно, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $(R_k(z))^* = R_k(\bar{z})$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем $(\tilde{R}(z))^* = \tilde{R}(\bar{z})$.

Принимая во внимание предыдущие рассуждения и теорему 7.7.3 [20], заключаем, что определенный в (7) оператор $\tilde{R}(z)$ является резольвентой самосопряженного оператора.

Покажем, что $\tilde{R}(z)\psi_m = \dfrac{1}{\lambda_m - z}\psi_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $(\psi_k, \eta_n(z)) = 0 \; \forall k < n$. Действительно,

$$\begin{aligned}(\psi_k, \eta_n(z)) &= (\psi_k, [\psi_n + (z - \lambda_n) R_n(z)\psi_n]) = \\ &= (\psi_k, \psi_n) + (\bar{z} - \lambda_n)(\psi_k, R_n(z)\psi_n) = \\ &= (\bar{z} - \lambda_n)(R_n(\bar{z})\psi_k, \psi_n) = \frac{\bar{z} - \lambda_n}{\lambda_k - \bar{z}}(\psi_k, \psi_n) = 0.\end{aligned}$$

Теперь можно получить

$$\tilde{R}\psi_m = R_0(z)\psi_m + \tilde{B}^{-1}(z)\psi_m = R_0(z)\psi_m + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(z)(\psi_m, \eta_j(\bar{z}))\eta_j(z) =$$

$$= R_0(z)\psi_m + \sum_{j=1}^{m} b_j(z)(\psi_m, \eta_j(\bar{z}))\eta_j(z) = R_m(z)\psi_m = \frac{1}{\lambda_m - z}\,\psi_m,$$

$$m = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, не только доказано существование сингулярно возмущенного оператора со свойствами, сформулированными в теореме 1, а и приведено его конструктивное построение.

Теорема 1 доказана.

Заметим, что выполнение условия (3) не зависит от первых k членов для достаточно большого номера k. Потому в некоторых оценках в доказательстве теоремы 1 этот факт принят во внимание.

3. Сингулярный спектр сингулярно возмущенного оператора. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$ — компактное множество. Выберем счетное плотное подмножество Γ_0 в Γ. Положим $\Gamma_0 = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$. Обозначим через $\sigma(\tilde{A})$, $\sigma_{ac}(\tilde{A})$, $\sigma_s(\tilde{A})$, $\sigma_{sc}(\tilde{A})$, $\sigma_c(\tilde{A})$ и $\sigma_{pp}(\tilde{A})$ соответственно абсолютно непрерывный, сингулярный, сингулярно непрерывный, непрерывный и чисто точечный спектры оператора $\tilde{A}$ (согласно классификации [8]). Напомним, что $\sigma(\tilde{A}) = \sigma_{ac}(\tilde{A}) \cup \sigma_s(\tilde{A})$, $\sigma_s(\tilde{A}) = \sigma_{sc}(\tilde{A}) \cup \sigma_{pp}(\tilde{A})$ и $\sigma_c(\tilde{A}) = \sigma_{ac}(\tilde{A}) \cup \sigma_{sc}(\tilde{A})$. Используя критерий Вейля (теорема 1, п. 93 в [8]), можно доказать такой факт.

Теорема 2. *Для неограниченного самосопряженного оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и компактного подмножества $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$ существует чисто сингулярно возмущенный оператор $\tilde{A} \in P_s(A)$ такой, что*

$$\Gamma \subset \sigma(\tilde{A}), \tag{17}$$

$$\Gamma_0 \subset \sigma_{pp}(\tilde{A}), \tag{18}$$

где Γ_0 — счетное подмножество, плотное в Γ;

$$\Gamma \setminus \Gamma_0 \subset \sigma_{sc}(\tilde{A}). \tag{19}$$

Доказательство. Включение (17) следует из теоремы 1, если выбрать ортонормированную последовательность векторов $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$, удовлетворяющую условиям (2) и (3). Покажем включение (18). Для любого $\lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ найдется последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Gamma_0$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda$. Согласно критерию Вейля (теорема 1, п. 93 в [8]) точка λ принадлежит непрерывному спектру $\lambda \in \sigma_c(\tilde{A})$ тогда и только тогда, когда существует ортонормированная последовательность векторов $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|(\tilde{A} - \lambda)f_k\| =$

$= 0$. В данном случае мы вибираем векторы $\{f_k := \psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, соответствующие $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда для $\lambda \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ имеем

$$\|(\tilde{A} - \lambda)\psi_k\| = \|(\tilde{A} - \lambda_k)\psi_k + (\lambda_k - \lambda)\psi_k\| \leq |\lambda_k - \lambda| \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty,$$

где $(\tilde{A} - \lambda_k)\psi_k = 0$ и $\|\psi_k\| = 1$. Поскольку $\lambda \notin \sigma_{ac}(\tilde{A})$, доказано, что $\lambda \in \sigma_{sc}(\tilde{A})$.

Включение (19) следует из (17) и (18).

Теорема 2 доказана.

Замечание. В работе используется классификация спектра самосопряженного оператора, предложенная в [8]. Как известно, при таком подходе замыкание точечного спектра является сингулярно непрерывным спектром. При ином подходе [21, 22] замыкание точечного спектра по определению полагается множеством, содержащимся в точечном спектре. При таком подходе также возможно решить поставленную задачу, однако это требует дополнительных рассуждений, предложенных, например, в [13].

4. Сингулярно возмущенный оператор, содержащий в спектре фрактальное множество заданного типа. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^1$ является фрактальным множеством в том смысле, что у него дробная размерность Хаусдорфа [23, 24]. Пусть Γ построено с помощью матрицы $Q = \{q_{ik}\}_{i,k=1}$ и матрицы распределений $P = \{p_{ik}\}_{i,k=1}$, $i = 1, 2, \ldots, n \leq \infty$, $k = 1, 2, \ldots$ [24]. Напомним коротко суть построения. Разбиваем заданный отрезок на n частей в отношении чисел, взятых из первого столбца матрицы Q. Затем распределяем конечный вес (на первом этапе, как правило, единичный) по полученным отрезкам в отношениях чисел из первого столбца матрицы P. На втором шаге разбиваем каждый отрезок, полученный на предыдущем шаге, уже в отношениях чисел, взятых со второго столбца матрицы Q, и распределяем вес из первого шага на отрезке между новыми (более мелкими) отрезками в отношениях чисел, взятых со второго столбца матрицы P, и т. д. В пределе получаем фрактальное множество. Одновременно строится сингулярная мера. Например, канторово множество строится следующими матрицами (с повторяющимися элементами):

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & \ldots \\ 1/3 & 1/3 & \ldots \\ 1/3 & 1/3 & \ldots \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ 1/2 & 1/2 & \ldots \end{pmatrix},$$

а соответствующая мера является мерой Хаусдорфа. Если элементы матриц Q и P не повторяются, то любое фрактальное (не обязательно самоподобное) множество может быть генерировано описанным методом. В данном случае нас интересует не мера, а лишь ее носитель — само фрактальное множество.

Напомним [23], что множество Γ называется множеством C-типа [24, 25], если оно совершенно и нигде не плотно лебеговой меры нуль; множеством P-типа, если для любого замкнутого интервала $[a, b]$ множество $[a, b] \cap \Gamma$ или пустое или совершенное нигде не плотное ненулевой меры Лебега; множеством S-типа, если оно является замыканием не более чем счетного множества замкнутых интервалов.

В [23] доказано, что любая сингулярно непрерывная вероятностная мера с носителем на Γ может быть однозначно представлена в виде линейной комбинации сингулярно непрерывных мер соответственно S-, C- и P-типа относительно носителя (см. также [25]).

Используя теорему 8 [24], можно сформулировать очевидные следствия из теорем 1 и 2.

Следствие 1. *Оператор* $\tilde{A}$, *построенный в теореме 1, имеет множество* Γ, *определенное с помощью матриц* Q *и* P, *в сингулярно непрерывном спектре* S*-типа, если матрица* $\tilde{P}$ *содержит только конечное множество нулевых элементов.*

Следствие 2. *Оператор* $\tilde{A}$, *построенный в теореме 1, имеет множество* Γ, *определенное с помощью матриц* $\tilde{Q}$ *и* $\tilde{P}$, *в сингулярно непрерывном спектре* C*-типа, если матрица* $\tilde{P}$ *содержит бесконечно много столбцов с элементами* $p_{ik} = 0$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1, p_{ik}=0} q_{ik}\right) = \infty. \tag{20}$$

Следствие 3. *Оператор* $\tilde{A}$, *построенный в теореме 1, имеет множество* Γ, *определенное с помощью матриц* $\tilde{Q}$ *и* $\tilde{P}$, *в сингулярно непрерывном спектре* P*-типа, если матрица* $\tilde{P}$ *содержит бесконечно много столбцов с элементами* $p_{ik} = 0$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1, p_{ik}=0} q_{ik}\right) < \infty. \tag{21}$$

В качестве множества Γ_0 в следствиях следует использовать точки, получаемые при разбиении заданного интервала элементами матрицы Q. Фактически множество Γ_0 — это замыкание этих точек.

Заметим, что в [24] (см. также [25]) авторы конструируют вероятностную меру с носителем на множестве Γ заданного типа. В данном случае несущественно, какая мера задается с помощью $\tilde{Q}$ и $\tilde{P}$, а важен лишь ее носитель, который определяет тип, т. е. количество позиций с нулевыми элементами в матрице $\tilde{P}$ и суммы в (20), (21).

Используя следствия, можно предложить более тонкую классификацию сингулярно непрерывного спектра самосопряженного оператора, т. е. $\sigma_{sc(S)}(\tilde{A})$, $\sigma_{sc(C)}(\tilde{A})$ и $\sigma_{sc(P)}(\tilde{A})$ — сингулярно непрерывные спектры S-, C- и P-типов соответственно [25]. В данной работе предложен метод построения операторов, соответствующих заданым спектральным типам.

1. *Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V.* Square power of singularly perturbed operators // Math. Nachr. — 1995. — **173**. — P. 5–24.
2. *Albeverio S., Koshmanenko V.* Singular rank one perturbations of self-adjoint operators and Krein theory of self-adjoint extensions // Potential Analysis. — 1999. — **11**. — P. 279–287.
3. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. — Cambridge: Univ. Press, 2000. — 265 p.
4. *Koshmanenko V. D.* Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Ukr. Math. J. — 1991. — **43**, № 11. — P. 1559–1566.
5. *Koshmanenko V.* Singular quadratic forms in perturbation theory. — Kluwer Acad. Publ., 1999.
6. *Gesztesy F., Simon B.* Rank-one perturbations at infinite coupling // J. Funct. Anal. — 1995. — **128**. — P. 245–252.
7. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Мат. сб. — 1947. — **20(62)**, № 3. — P. 431–495.

8. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 544 с.

9. *Alonso A., Simon B.* The Birman – Krein – Vishik theory of self-adjoint extensions of semibounded operators // J. Operator Theory. — 1980. — **4**. — P. 251 – 270.

10. *Кошманенко В., Самойленко О.* Сингулярные возмущения конечного ранга. Точечный спектр // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 11. — С. 1186 – 1212.

11. *Posilicano A.* A Krein-like formula for singular perturbations of self-adjoint operators and applications // J. Funct. Anal. — 2001. — **183**. — P. 109 – 147.

12. *Derkach V. A., Malamud M. M.* General resolvents and the boundary value problem for Hermitian operators with gaps // Ibid. — 1991. — **95**. — P. 1 – 95.

13. *Albeverio S., Brasche J. F., Neidhardt H.* On inverse spectral theory of self-adjoint extensions mixed types of spectra // Ibid. — 1998. — **154**. — P. 130 – 173.

14. *Brasche J. F., Malamud M. M., Neidhardt H.* Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions // Integr. Equat. and Operator Theory. — 2002. — **43**. — P. 264 – 289.

15. *Koshmanenko V.* A variant of inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory // Meth. Funct. Anal. and Top. — 2002. — **8**, № 1. — P. 49 – 69.

16. *Дудкін М. Є., Кошманенко В. Д.* Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу // Укр. мат. журн. — 1997. — **55**, № 9. — С. 1269 – 1276.

17. *Дудкін М.* Сингулярно збурені самоспряжені оператори (скінченного рангу) із заданими власними значеннями і власними векторами // Наук. вісті НТУУ „КПІ". — 2002. — № 5. — С. 140 – 145.

18. *Бари Н.* О базисах в гильбертовом пространстве // Докл. СССР. — 1946. — **54**, № 5. — С. 383 – 386.

19. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

20. *Плеснер А. И.* Спектральная теория линейных операторов. — М.: Наука, 1965. — 624 с.

21. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

22. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977. — 357 с.

23. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Нац. пед. ун-т, 1998. — 296 с.

24. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\tilde{Q}$-representation of real numbers and fractal probability distributions. — Bonn, 2002. — 22 p. — Preprint № 12.

25. *Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G.* Fine structure of the singular continuous spectrum // Meth. Funct. Anal. and Top. — 2003. — **9**, № 2. — P 101 – 119.

Получено 11.04.2006