УДК 512 . 647 . 2+512 . 562

ПРО СЕРІЙНІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ З ДОДАТНО ОЗНАЧЕНОЮ КВАДРАТИЧНОЮ ФОРМОЮ ТІТСА

В. М. Бондаренко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

М. В. Стьопочкіна

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, прос. Акад. Глушкова, 2, корп. 6
e-mail: StMar@ukr.net

We have described all series partially ordered sets with positive definite Tits form and prove that an arbitrary partially ordered set of order greater than 7 with a positive definite Tits form is series.

Описано всі серійні частково впорядковані множини з додатно означеною квадратичною формою Тітса і доведено, що довільна частково впорядкована множина порядку більшого за 7 із додатно означеною формою Тітса є серійною.

Квадратичні форми виникають при розв'язанні різних задач в алгебрі, геометрії, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії операторів та інших областях математики (див., наприклад, [1 – 26]). Серед них важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса для зорієнтованих графів, частково впорядкованих множин, алгебр, тощо. Ця стаття пов'язана з такими формами.

1. Формулювання основного результату. Нагадаємо спочатку деякі означення.

Нехай S — скінченна чи нескінченна частково впорядкована (ч. в.) множина. Говорять, що S є *сумою* своїх підмножин $A_1, \ldots, A_s$ і записують $S = A_1 + \ldots + A_s$, якщо $S = \cup_{i=1}^{s} A_i$ і до того ж $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Якщо при цьому елементи різних доданків завжди непорівнянні, то S називають *прямою сумою* вказаних підмножин. Далі, згідно з [27] сума $S = A_1 + \ldots + A_s$ називається *односторонньою*, якщо (з точністю до нумерації доданків) $i < j$ кожного разу, коли існують елементи $b \in A_i$ і $c \in A_j$ для $i \neq j$ такі, що $b < c$. Знову ж таки згідно з [27] сума $S = A_1 + \ldots + A_s$ називається *мінімаксною*, якщо із $x < y$, де x і y належать різним доданкам, випливає, що x є мінімальним, а y — максимальним елементом множини S. Хоча формально пряма сума є мінімаксною, далі, розглядаючи мінімаксні суми, ми завжди вважаємо (для зручності), що вони не є прямими.

Зауважимо, що під підмножиною ч. в. множини S ми завжди розуміємо повну ч. в. підмножину (тобто частковий порядок на ній індукується частковим порядком на S).

Квадратичною формою Тітса ч. в. множини S називають форму $q_S(z) : \mathbb{Z}_0^{S \cup 0} \to \mathbb{Z}$, що задається рівністю

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j,\, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i,$$

де $\mathbb{Z}_0^{S\cup 0}$ — підмножина декартового добутку $\mathbb{Z}^{S\cup 0} = \{(z_i), i \in S\cup 0\}$, що складається з усіх векторів із скінченним числом ненульових координат (якщо S скінченна, то $\mathbb{Z}_0^{S\cup 0} = \mathbb{Z}^{S\cup 0}$).

Переходимо до формулювання основного результату.

Скінченну чи нескінченну ч. в. множину S із додатно означеною формою Тітса називатимемо *серійною*, якщо для будь-якого натурального m існує ч. в. множина T, така, що:

а) S є підмножиною T;

б) $|T \setminus S| = m$;

в) форма Тітса множини T є додатно означеною.

Теорема 1. *Будь-яка ч. в. множина порядку більшого за 7 із додатно означеною формою Тітса є серійною.*

У процесі доведення теореми ми вкажемо явний вигляд серійних ч. в. множин.

2. Будова серійних частково впорядкованих множин. Ч. в. множину з єдиною парою непорівнянних елементів назвемо *майже ланцюгом* (ланцюгом називається довільна лінійно впорядкована множина). *Шириною ч. в. множини* називаємо максимальне число її попарно непорівнянних елементів.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 2. *Ч. в. множина S з додатно означеною формою Тітса є серійною тоді і лише тоді, коли виконано одну з таких умов:*

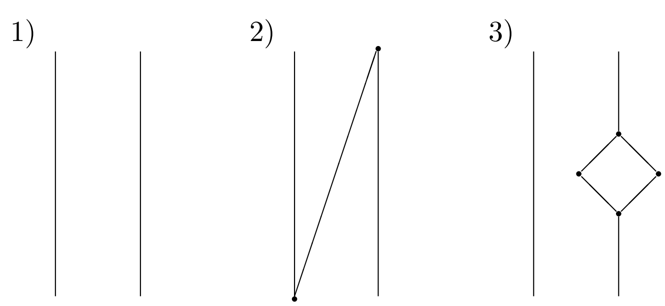
1) S — пряма сума двох ланцюгів;

2) S — одностороння мінімаксна сума двох ланцюгів;

3) S — пряма сума ланцюга і майже ланцюга.

Зауважимо, що в умовах 1) і 3) ланцюги можуть бути порожніми.

Геометрично умови 1) – 3) мають такий вигляд:



(тут вертикальні лінії є ланцюгами, а похилі відрізки не містять проміжних точок).

Ця теорема випливає по суті із результатів роботи [27]. А саме, згідно з основною теоремою цієї роботи нескінченна ч. в. множина має додатно означену форму Тітса тоді і лише тоді, коли вона має вигляд 1), 2) або 3); це означає, що теорема 2 справедлива для нескінченних ч. в. множин. Зауважимо, що звідси випливає, що для нескінченних ч. в. множин має місце і теорема 1 (тому що в ч. в. множині вигляду 1), 2) або 3) легко вказати таку точку, після заміни якої на ланцюг із m точок нова ч. в. множина має, відповідно, такий же вигляд).

При доведенні теореми з роботи [27] її автори використали деякий список ч. в. множин, форма Тітса яких не є додатно означеною; оскільки цей список скінченний і складається лише із скінченних ч. в. множин, то тим самим доведено, що існує деяке натуральне число N таке, що будь-яка скінченна ч. в. множина порядку більшого за N із додатно означеною формою Тітса має вигляд 1), 2) або 3). Звідси випливає теорема 2 для скінченних ч. в. множин (див. пояснення для нескінченних ч. в. множин). Зауважимо, що довести теорему 1 для скінченних ч. в. множин — це означає показати, що за N можна взяти число 7.

З огляду на теорему 2 легко побачити, що ч. в. множина порядку $n \leq 7$ з додатно означеною формою Тітса може не бути серійною. Наприклад, не є серійною ч. в. множина (порядку 5) $T = \{a, b_1, b_2, c_1, c_2 \,|\, b_1 < b_2, c_1 < c_2\}$.

3. Доведення теореми 1 (для скінченних ч. в. множин). При доведенні теореми будемо використовувати поняття (min, max)-еквівалентності ч. в. множин, введене в [28].

Нагадаємо означення такої еквівалентності.

Нехай S — ч. в. множина і a — її мінімальний (відповідно максимальний) елемент. Для елементів $x, y \in S$ запис $x \asymp y$ означатиме, що x і y непорівнянні. Множину елементів $x \in \in S$, непорівнянних із фіксованим елементом $a \in S$, позначатимемо $S^{\asymp}(a)$. Одноелементні підмножини S завжди ототожнюємо із самими елементами.

Означимо ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ (відповідно $S_a^{\downarrow}$) таким чином. Як звичайна множина (тобто без урахування часткового порядку) це S, і при цьому частковий порядок на $S \setminus a$ збережено, а a є вже максимальним (відповідно мінімальним) елементом і до того ж $a > x$ (відповідно $a < x$) тоді і лише тоді, коли $x \in S^{\asymp}(a)$.

Далі будемо писати $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ замість $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$ тощо.

Нехай S і T — ч. в. множини, такі, що $S = T$ як звичайні множини. Ми називаємо їх (min, max)-еквівалентними і пишемо $T \cong_{(\min,\max)} S$, якщо

$$T = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p} \ (p \geq 0),$$

де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ і для кожного $i = 1, \ldots, p$ x_i — мінімальний (відповідно максимальний) елемент $S_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}}$, якщо $\varepsilon_i = \uparrow$ (відповідно $\varepsilon_i = \downarrow$); зауважимо, що при цьому $x_1, x_2, \ldots, x_p$ не обов'язково є різними. Для $p = 0$ вважаємо, що $T = S$.

У випадку, коли всі стрілки в цьому означенні направлені вгору відповідно вниз), ч. в. множини S і T назвемо min-*еквівалентними* (відповідно max-*еквівалентними*). Зауважимо, що будь-які (min, max)-еквівалентні ч. в. множини є як min-еквівалентними, так і max-еквівалентними, але ні доводити це, ні користуватися цим ми в цій статті не будемо.

У роботі [28] доведено, що (min, max)-еквівалентні ч. в. множини мають еквівалентні форми Тітса, і тому природно вивчати ч. в. множини з додатно означеною формою Тітса з точністю до такої еквівалентності.

Безпосередньо з означення (min, max)-еквівалентності випливає наступне твердження.

Твердження. *Нехай T_1 — множина всіх мінімальних елементів ч. в. множини T порядку n і (індуктивно) T_i, $i > 1$, — множина всіх мінімальних елементів $T \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} T_j)$, запис $h(x) = i$ для $x \in T$ означатиме, що $x \in T_i$. Тоді для будь-якої послідовності без повторів $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такої, що $h(x_1) \leq h(x_2) \leq \ldots \leq h(x_n)$, вираз $T' = T^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{x_1 x_2 \ldots x_n}$ має сенс, до того ж $T' = T$.*

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1 для скінченних ч. в. множин (відносно нескінченних ч. в. множин див. попередній пункт). Згідно з теоремою 2 достатньо показати, що довільна ч. в. множина порядку більшого за 7 із додатно означеною формою Тітса має вигляд 1), 2) або 3).

Ширину ч. в. множини X (максимальне число її попарно непорівнянних елементів) позначаємо через $w(X)$.

Нехай S — (скінченна) ч. в. множина. Зафіксуємо в S деякий максимальний елемент a і позначимо через $S(a)$ множину всіх елементів $x \in S$, таких, що $x < a$. Зафіксуємо для $S(a)$ деяку послідовність $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$, про яку йшла мова у твердженні, і розглянемо ч. в. множину $T = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{y_1 y_2 \ldots y_s}$. Очевидно, що в T елемент a є як мінімальним, так і максимальним.

Оскільки форма Тітса $q(z)$ ч. в. множини, що складається із чотирьох попарно непорівнянних елементів, наприклад 1, 2, 3, 4, не є додатно означеною ($q(z) = 0$ для $z_0 = 2$, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$), то випадок $w(T) \geq 4$ є неможливим, а отже, $w(T) \leq 3$. Тоді, очевидно, ч. в. множина $P = T^{\uparrow}_a$ має ширину $w \leq 2$.

Отже, ми довели, що ч. в. множина S min-еквівалентна деякій частково впорядкованій множині P, яка має ширину 2: $P = S^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\uparrow}_{y_1 y_2 \ldots y_s a}$. Тоді $S = P^{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow\downarrow}_{a y_s \ldots y_2 y_1}$ (оскільки $X^{\uparrow\downarrow}_{yy} = X$ і $X^{\downarrow\uparrow}_{zz} = X$ для довільного мінімального елемента y і довільного максимального елемента z будь-якої ч. в. множини X). Звідси (з урахуванням п. 2) випливає, що завершити доведення теореми 1 можна за такою схемою.

I. Показати, шо довільна ч. в. множина S ширини $w \leq 2$ і порядку $n > 7$ з додатно означеною формою Тітса має вигляд 1), 2) або 3) (в останньому випадку ланцюг, що є прямим доданком, повинен бути порожнім, інакше $w = 3$).

II. Показати, що якщо ч. в. множина S ширини $w \leq 3$ і порядку $n > 7$ має вигляд 1), 2) або 3) і x — максимальний елемент S, то $S^{\downarrow}_x$ є або ч. в. множиною ширини $w' \leq 2$ (а тоді згідно з п. I вона матиме вигляд 1), 2) або 3)), або ч. в. множиною ширини 3, що має вигляд 3).

Вказане в п. I твердження доведено авторами в роботі [29].

Перейдемо до кроку II.

Нехай S — ч. в. множина ширини $w \leq 3$ і порядку $n > 7$, яка має вигляд 1), 2) або 3). У другому випадку для визначеності будемо вважати, що мінімальний елемент 1-го ланцюга менший за максимальний елемент 2-го ланцюга. Нехай x — максимальний елемент S і $T = S^{\downarrow}_x$. Тоді

1.1) якщо S має вигляд 1), то $w(T) \leq 2$ (а саме, T має також вигляд 1));

2.1) якщо S має вигляд 2) і x належить 1-му ланцюгу, то $w(T) \leq 2$ (а саме, T має також вигляд 2));

2.2) якщо S має вигляд 2) і x належить 2-му ланцюгу, то T має вигляд 3) (при цьому можливий як випадок $w(T) = 2$, так і випадок $w(T) = 3$);

3.1) якщо S має вигляд 3) і x належить ланцюгу, то T має вигляд 3) (при цьому можливий як випадок $w(T) = 2$, так і випадок $w(T) = 3$);

3.2) якщо S має вигляд 3) і x належить майже ланцюгу, причому майже ланцюг має 1 максимальний елемент, то $w(T) = 3$ і T має вигляд 3);

3.3) якщо S має вигляд 3) і x належить майже ланцюгу, причому майже ланцюг має 2 максимальних елементи, то $w(T) \leq 2$ (а саме, T має також вигляд 2)).

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що вказане в п. II твердження є правильним і для $n \leq 7$ (доведення аналогічне).

1. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функцион. анализ и его прил. — 1974. — **8**. — С. 34 – 42.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1985. — **21**, № 5. — С. 776 – 788.
3. *Кочубей А. Н.* Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p-адическими квадратичными формами // Изв. РАН. — 1998. — **62**, № 6. — С. 103 – 124.
4. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscr. math. — 1972. — **6**. — P. 71 – 103, 309.
5. *Brenner S.* Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. Int. Conf. Represent. Algebras. — Ottawa, Ontario: Carleton Univ., 1974. — Paper № 5.
6. *Bongartz K.* Algebras and quadratic forms // J. London Math. Soc. — 1983. — **28**, № 3. — P. 461 – 469.
7. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadratic forms // Lect. Noths Math. — Berlin etc.: Springer, 1984. — **1099**. — 376 p.
8. *Crandall M. G.* Semidifferentials, quadratic forms and fully nonlinear elliptic equations of second order // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéare. — 1989. — **6**, № 6. — P. 419 – 435.
9. *Corovei I.* Some functional equations connected with quadratic forms // Anal. Numér. Théor. Approxim. — 1990. — **19**, № 2. — P. 123 – 127.
10. *Al-Naggar I., Pearson D. B.* Quadratic forms and solutions of the Schrödinger equation // J. Phys. A. — 1996. — **29**, № 20. — P. 6581 – 6584.
11. *Alsina M., Bayer P.* Quaternion orders, quadratic forms, and Shimura curves // CRN Monogr. Ser. 22. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. — 196 p.
12. *Shimura G.* Arithmetic and analytic theories of quadratic forms and Clifford groups // Math. Surv. and Monogr. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. — **109**. — 275 p.
13. *Hoffmann D. W., Lanhribi A.* Quadratic forms and Pfister neighbors in characteristic 2 // Trans. Amer. Math. Soc. — 2004. — № 10. — P. 4019 – 4052.
14. *Ateiwi A. M.* A study of dichotomy of linear systems of difference equations using the quadratic forms // J. Fract. Calc. — 2004. — **25**. — P. 93 – 100.
15. *Fang F., Pan J.* Secondary Brown-Kervaire quadratic forms and π-manifolds // Forem Math. — 2004. — **16**, № 4. — P. 459 – 481.
16. *Ueno T.* Modular forms arising from zeta functions in two variables attached to prehomogeneous vector spaces related to quadratic forms // Nagoya Math. J. — 2004. — **175**. — P. 1 – 37.
17. *Chan W. K., Peters M.* Quaternary quadratic forms and Hilbert modular surfaces // Contemp. Math. — 2004. — **344**. — P. 85 – 97.
18. *Kohnen W.* Special Siegel modular forms and singular series polynomials of quadratic forms // Ibid. — P. 229 – 236.
19. *Laghribi A.* Quasi-hyperbolicity of totally singular quadratic forms // Ibid. — P. 237 – 248.
20. *Schulze-Pillot R.* Representation by integral quadratic forms — a survey // Ibid. — P. 303 – 321.

21. *Fitzgerald R. W., Yucas J. L.* Pensils of quadratic forms over finite fields // Discrete Math. — 2004. — **283**. — P. 71 – 79.

22. *Li M., Dezhong C.* Systems of Hermitian quadratic forms // Can. Math. Bull. — 2004. — **47**, № 1. — P. 73 – 81.

23. *Car M.* Quadratic forms with polynomial coefficients // Acta arithm. — 2004. — **113**, № 2. — P. 131 – 155.

24. *Bevelacqua A. J.* Four dimensional quadratic forms over $F(X)$ where $I_t^3F(X) = 0$ and a failure of the strong Hasse principle // Communs Algebra. — 2004. — **32**, № 3. — P. 855 – 877.

25. *Teksan A.* Representations of positive integers by a direct sum of quadratic forms // Results Math. — 2004. — **46**. — P. 146 – 163.

26. *Jaschke S., Keúppelberg C., Lindner A.* Asymptotic behavior of tails and quantiles of quadratic forms of Gaussian vectors // J. Multivar. Anal. — 2004. — **88**, № 2. — P. 252 – 273.

27. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 1. — С. 3 – 14.

28. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms// Вісн. Київ. ун-ту. Фізика і математика. — 2005. — № 1. — С. 24 – 25.

29. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On posets of width two with positive Tits form// Algebra and Discrete Math. — 2005. — № 2. — P. 11 – 22.

Одержано 05.04.2006