УДК 517.927

НОВИЙ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ІСНУВАННЯ ТА ПОБУДОВИ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А. Ю. Лучка

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We apply the methods developed for solutions of general equations with restrictions to construction of periodic solutions of systems of differential equations.

Методы, разработанные для решения общих уравнений с ограничениями, применяются к построению периодических решений систем дифференциальных уравнений.

Серед різноманітних методів дослідження існування та побудови розв'язків задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(0) = \gamma, \quad x(t+T) = x(t), \tag{1}$$

в якій $t \in \mathbb{R}$, $x, f \in \mathbb{R}^m$, $f(t+T,x) = f(t,x)$, широко використовується чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка і методи, розвинені в [1–3]. У більшості праць вважається, що параметр $\gamma \in \mathbb{R}^m$ підлягає визначенню. В даній статті розглядається випадок, коли γ — відомий параметр, а задача (1) трактується як задача Коші з обмеженням, методи дослідження якої викладено, наприклад, в [3–6].

1. Лінійна задача. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

і встановимо умови існування розв'язку системи, який справджує умови

$$x(0) = \gamma, \quad x(t+T) = x(t), \tag{3}$$

де $f(t+T) = f(t)$, $P(t+T) = P(t)$, а елементи $(m \times m)$-матриці $P(t)$ і компоненти вектор-функції $f(t)$ сумовні з квадратом на періоді $[0,T]$.

Ставиться задача: знайти вектор-функцію $x(t)$ із класу неперервних періодичних вектор-функцій, похідна яких сумовна з квадратом на періоді $[0,T]$, таку, яка майже скрізь задовольняє рівняння (2) та справджуються умови (3). В цьому випадку задачу вважаємо сумісною.

Для цієї мети розглянемо задачу (2), (3) на періоді $[0,T]$, тобто

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = f(t), \quad x(0) = \gamma, \quad x(0) = x(T), \tag{4}$$

дослідимо питання існування розв'язку $x \in W_2^1([0,T],\mathbb{R}^m)$ і, якщо він існує, періодично продовжимо його на всю вісь. Отримана таким чином вектор-функція, очевидно, буде розв'язком задачі (2), (3).

Задачу (4), як зазначалось вище, трактуємо як задачу Коші з обмеженням. Згідно з методикою, розробленою в [4–6], питання існування розв'язку задачі (4) зводиться до питання існування розв'язку системи інтегральних рівнянь, який задовольняє певну умову. Щоб її отримати, використовується допоміжна задача з керуванням

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x + C(t)\lambda = y(t), \tag{5}$$

$$x(0) = \gamma, \quad x(0) = x(T), \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

в якій неперервна $(m \times m)$-матриця $A(t)$, $(m \times m)$-матриця $C(t)$ із сумовними з квадратом на $[0,T]$ елементами і вектор-функція $y \in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$ задані, причому стовпці матриці $C(t)$ лінійно незалежні, а потрібно знайти $\lambda \in \mathbb{R}^m$ та $x \in W_2^1([0,T],\mathbb{R}^m)$.

Лема 1. *Нехай матриці $A(t)$ та $C(t)$ підібрано таким чином, що однорідна задача*

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x + C(t)\lambda = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(0) = x(T), \tag{7}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Тоді існують вектор-функція $h(t)$, вектор σ і матриці $G(t,s)$ та $\Gamma(s)$ розміру $m \times m$ такі, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (5), (6) зображується формулами

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)y(s)ds, \quad \lambda = \sigma + \int_0^T \Gamma(s)y(s)ds. \tag{8}$$

Справджуються властивості

$$\int_0^T G(t,s)C(s)ds = O, \quad \int_0^T \Gamma(s)C(s)ds = I, \tag{9}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right)\int_0^T G(t,s)w(s)ds = w(t) - \int_0^T C(t)\Gamma(s)y(s)\,ds, \tag{10}$$

де I — одинична матриця в $\mathbb{R}^m$ і $w \in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$ — довільна вектор-функція.

Справді, виберемо матрицю $A(t)$ таким чином, щоб фундаментальну матрицю $X(t)$, яка визначається із задачі

$$\frac{dX}{dt} + A(t)X = O, \quad X(0) = I, \tag{11}$$

можна було б побудувати в явному вигляді порівняно легко. Тоді вектор-функція

$$x(t) = X(t)\gamma + \int_0^t H(t,s)y(s)ds - Y(t)\lambda, \tag{12}$$

де $H(t,s)$ — ядро Коші і

$$Y(t) = \int_0^t H(t,s)C(s)\,ds, \tag{13}$$

задовольняє рівняння (5) і початкову умову. Задовольнивши періодичні умови (6), для визначення $\lambda \in \mathbb{R}^m$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D\lambda = \rho + \int_0^T H(T,s)y(s)\,ds, \tag{14}$$

в якій $\rho = X(T)\gamma - \gamma$ і $(m \times m)$-матриця

$$D = \int_0^T H(T,s)C(s)\,ds, \tag{15}$$

згідно з припущенням стосовно однорідної задачі (7), є невиродженою. Отже, існує єдиний розв'язок системи рівнянь (14)

$$\lambda = D^{-1}\rho + \int_0^T D^{-1}H(T,s)y(s)\,ds. \tag{16}$$

Підставивши цей розв'язок у формулу (12), одержимо

$$x(t) = X(t)\gamma - Y(t)D^{-1}\rho + \int_0^t H(t,s)y(s)\,ds - Y(t)\int_0^T D^{-1}H(T,s)y(s)\,ds. \tag{17}$$

Поклавши в формулах (16), (17)

$$\begin{gathered}\sigma = D^{-1}\rho, \quad \Gamma(s) = D^{-1}H(T,s), \quad h(t) = X(t)\gamma - Y(t)\sigma, \\ G(t,s) = Y(t)\Gamma(s) + \begin{cases} H(t,s), & 0 \le s \le t, \\ 0, & t < s \le T, \end{cases}\end{gathered} \tag{18}$$

отримаємо співвідношення (8).

На основі формул (18), (15), (17) та (13) маємо

$$\int\limits_0^T \Gamma(s)C(s)\,ds = \int\limits_0^T D^{-1}H(T,s)C(s)ds = I,$$

$$\int\limits_0^T G(t,s)C(s)\,ds = \int\limits_0^t H(t,s)C(s)\,ds - Y(t)\int\limits_0^T \Gamma(s)C(s)ds = O,$$

отже, властивості (9) є правильними.

Зауважимо, що правильність співвідношення (10) безпосередньо випливає із властивостей ядра Коші.

Лема 2. *Якщо однорідна задача (7) має лише тривіальний розв'язок, то для довільної вектор-функції $w(t)$ із класу $W_2^1\left([0,T],\mathbb{R}^m\right)$, яка задовольняє умови*

$$w(0) = \gamma, \quad w(0) = w(T), \tag{19}$$

правильними є співвідношення

$$w(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)\left(\frac{d}{ds} + A(s)\right)w(s)ds, \tag{20}$$

$$\sigma + \int\limits_0^T \Gamma(s)\left(\frac{d}{ds} + A(s)\right)w(s)ds = 0, \tag{21}$$

де $h(t)$ та σ визначаються формулами (18).

Справді, розглянемо задачу

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right)z + C(t)\mu = \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right)w(t), \tag{22}$$

$$z(0) = \gamma, \quad z(0) = z(T). \tag{23}$$

Згідно з лемою 1, оскільки виконуються її умови, задача (22), (23) має єдиний розв'язок

$$z(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)\left(\frac{d}{ds} + A(s)\right)w(s)\,ds, \tag{24}$$

$$\mu = \sigma + \int\limits_0^T \Gamma(s)\left(\frac{d}{ds} + A(s)\right)w(s)\,ds. \tag{25}$$

Нехай $v(t) = z(t) - w(t)$, тоді на основі формул (22), (19), (23) отримаємо

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) v + C(t)\mu = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(0) = v(T). \tag{26}$$

За умови леми однорідна задача (26) має лише тривіальний розв'язок $v(t) = 0$, $\mu = 0$, а отже, $z(t) = w(t)$. Враховуючи останні співвідношення і формули (24), (25), переконуємось у правильності формул (20), (21).

Зауваження 1. Із формул (18), (11), (13) та (10) очевидним чином випливає, що $h(t)$ та σ — розв'язок задачі

$$\frac{dh}{dt} + A(t)h + C(t)\sigma = 0, \quad h(0) = \gamma, \quad h(0) = h(T), \tag{27}$$

а також можна показати, що розв'язок задачі

$$\frac{dz}{dt} + A(t)z + C(t)\mu = y(t), \quad z(0) = z(T) = 0, \tag{28}$$

має вигляд

$$z(t) = \int\limits_0^T G(t,s)y(s)\,ds, \quad \mu = \int\limits_0^T \Gamma(s)y(s)\,ds. \tag{29}$$

Отже, розв'язок (8) задачі (5), (6) можна подати у вигляді

$$x(t) = h(t) + z(t), \quad \lambda = \sigma + \mu, \tag{30}$$

а для його побудови використовувати задачі (27) та (28).

Зведемо тепер задачу (4) до рівносильного інтегрального рівняння. Для цього рівняння (4) подамо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t) + B(t)x, \quad B(t) = A(t) - P(t), \tag{31}$$

і будемо трактувати задачу (28) як заміну, в якій $y(t)$ — нова невідома вектор-функція. Тоді для її знаходження отримаємо інтегральне рівняння

$$y(t) = g(t) + \int\limits_0^T R(t,s)y(s)\,ds + \int\limits_0^T K(t,s)y(s)\,ds, \tag{32}$$

в якому

$$g(t) = q(t) + C(t)\sigma, \quad q(t) = f(t) + B(t)h(t), \tag{33}$$

$$R(t,s) = C(t)\Gamma(s), \quad K(t,s) = B(t)G(t,s). \tag{34}$$

Справді, вважатимемо, що розв'язок рівняння (31) визначається першою формулою (30), і врахуємо рівняння (27) та (28). Тоді воно набуде вигляду

$$y(t) - C(t)\mu - C(t)\sigma = f(t) + B(t)h(t) + B(t)z(t).$$

Підставивши сюди вираз (29) і врахувавши позначення (33), (34), отримаємо рівняння (32).

Зазначимо, що на основі властивостей (9) ядра (34) також мають такі ж властивості

$$\int_0^T R(t,s)C(s)\,ds = C(t), \quad \int_0^T K(t,s)C(s)\,ds = O. \tag{35}$$

Використовуючи властивості (35), приходимо до висновку, що розв'язок інтегрального рівняння (32) існує лише за певних умов, яким повинен задовольняти вільний член $g(t)$. Цю умову не станемо виписувати, оскільки вона характерна лише для лінійних рівнянь, а нижче висвітлимо новий підхід до встановлення умови існування розв'язку рівняння (32), який поширюється і на нелінійні рівняння.

Нехай

$$L_2\left([0,T],\mathbb{R}^m\right) = U\left([0,T],\mathbb{R}^m\right) \oplus V\left([0,T],\mathbb{R}^m\right),$$

де $U\left([0,T],\mathbb{R}^m\right)$ — підпростір, породжений системою лінійно незалежних стовпців матриці $C(t)$. Введемо оператор ортогонального проектування

$$(Sz)(t) = \int_0^T S(t,\xi)z(\xi)d\xi, \tag{36}$$

ядро якого визначається за формулою

$$S(t,\xi) = C(t)\left(\int_0^T C^*(s)C(s)ds\right)^{-1} C^*(\xi), \tag{37}$$

де $C^*(t)$ — матриця, спряжена до $C(t)$.

Використавши оператор (36), (37) та властивості (9), (35), першій із формул (8) можна надати вигляду

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)v(s)\,ds, \tag{38}$$

де

$$v(t) = y(t) - \int_0^T S(t,\xi)y(\xi)\,d\xi, \tag{39}$$

а рівняння (32) записати таким чином:

$$y(t) = g(t) + \int_0^T R(t,s)y(s)\,ds + \int_0^T K(t,s)v(s)\,ds. \tag{40}$$

Якщо тепер підставити (40) у (39), то для визначення невідомої вектор-функції $v(t)$ отримаємо рівняння

$$v(t) = p(t) + \int_0^T M(t,s)v(s)\,ds \tag{41}$$

у підпросторі $V\left([0,T],\mathbb{R}^m\right)$, де з урахуванням формули (33)

$$p(t) = q(t) - \int_0^T S(t,\xi)q(\xi)d\xi, \quad M(t,s) = K(t,s) - \int_0^T S(t,\xi)K(\xi,s)d\xi. \tag{42}$$

Теорема 1. *Якщо однорідна задача (7) має лише тривіальний розв'язок, то задача (2), (3) сумісна тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок $v^*(t)$ рівняння (41) і виконується умова*

$$\sigma + \int_0^T \Gamma(s)w^*(s)\,ds = 0, \tag{43}$$

в якій

$$w^*(t) = q(t) + \int_0^T K(t,s)v^*(s)\,ds, \tag{44}$$

де $\sigma, \Gamma(s)$ і $q(t)$ визначаються формулами (18) та (33).

Доведення. Нехай $v^*(t)$ — розв'язок рівняння (41), тобто

$$v^*(t) = p(t) + \int_0^T M(t,s)v^*(s)\,ds, \tag{45}$$

і справджується умова (43). Тоді правильною є рівність

$$w^*(t) = q(t) + \int_0^T K(t,s)w^*(s)\,ds. \tag{46}$$

Справді, враховуючи формули (44), (42) та (45), маємо

$$w^*(t) - \int\limits_0^T S(t,\xi) w^*(\xi)\, d\xi = q(t) + \int\limits_0^T K(t,s) v^*(s)\, ds -$$

$$- \int\limits_0^T S(t,\xi) \left(q(\xi) + \int\limits_0^T K(\xi,s) v^*(s)\, ds \right) d\xi = p(t) + \int\limits_0^T M(t,s) v^*(s)\, ds = v^*(t). \tag{47}$$

Отже, використовуючи властивість (35), згідно з якою у співвідношенні (44) можна замінити $v^*(t)$ на $w^*(t)$, переконуємось у правильності рівності (46).

Встановимо, що розв'язком задачі (4) є

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s) v^*(s)\, ds. \tag{48}$$

Для цього зазначимо, що умови $x^*(0) = \gamma$ та $x(0) = x(T)$ виконуються очевидним чином, а згідно з властивістю (9) і рівністю (47) вираз (48) можна записати у вигляді

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s) w^*(s)\, ds. \tag{49}$$

Тепер на основі формул (49), (27), (10), (33), (34), (46) та умови (43) остаточно маємо

$$f(t) - \left(\frac{d}{dt} + P(t) \right) x^*(t) = f(t) + B(t) x^*(t) - \left(\frac{d}{dt} + A(t) \right) x^*(t) =$$

$$= f(t) + B(t) h(t) + \int\limits_0^T B(t) G(t,s) w^*(s)\, ds - \left(\frac{d}{dt} + A(t) \right) h(t) -$$

$$- \left(\frac{d}{dt} + A(t) \right) \int\limits_0^T G(t,s) w^*(s)\, ds = q(t) + \int\limits_0^T K(t,s) w^*(s)\, ds - w^*(t) +$$

$$+ C(t)\sigma + C(t) \int\limits_0^T \Gamma(s) w^*(s)\, ds = C(t) \left(\sigma + \int\limits_0^T \Gamma(s) w^*(s)\, ds \right) = 0.$$

Продовживши періодично вектор-функцію (48), отримаємо розв'язок задачі (2), (3).

Навпаки, нехай $x^*(t)$ — розв'язок задачі (2), (3) тобто на періоді $[0,T]$ справджується рівність

$$\left(\frac{d}{dt} + P(t) \right) x^*(t) = f(t), \tag{50}$$

а згідно з лемою 2 виконуються співвідношення

$$x^*(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)\left(\frac{d}{ds} + A(s)\right) x^*(s)\,ds, \tag{51}$$

$$\sigma + \int_0^T \Gamma(s)\left(\frac{d}{ds} + A(s)\right) x^*(s)\,ds = 0. \tag{52}$$

Встановимо, що рівняння (41) має розв'язок, який визначається формулами

$$v^*(t) = w^*(t) - \int_0^T S(t,\xi) w^*(\xi) d\xi, \quad w^*(t) = \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x^*(t), \tag{53}$$

і справджується умова (43). Для цього спершу встановимо правильність рівності

$$w^*(t) = q(t) + \int_0^T B(t) G(t,s) w^*(s)\,ds. \tag{54}$$

Вона випливає із формул (51), (53) та (50). Справді, маємо

$$f(t) - w^*(t) + B(t)\left(h(t) + \int_0^T G(t,s) w^*(s)\,ds\right) =$$

$$= f(t) - w^*(t) + B(t)\left(h(t) + \int_0^T G(t,s)\left(\frac{d}{ds} + A(s)\right) x^*(s)\,ds\right) =$$

$$= f(t) - \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x^*(t) + B(t) x^*(t) = f(t) - \left(\frac{d}{dt} + P(t)\right) x^*(t) = 0.$$

Врахувавши першу формулу, позначення (34) та властивість (35), рівність (54) можна записати у вигляді

$$w^*(t) = q(t) + \int_0^T K(t,s) v^*(s)\,ds, \tag{55}$$

а спроектувавши її на підпростір $V\left([0,T], \mathbb{R}^m\right)$ і використавши позначення (42), остаточно отримаємо

$$v^*(t) = p(t) + \int_0^T M(t,s) v^*(s)\,ds. \tag{56}$$

Рівність (56) засвідчує, що справді $v^*(t)$ — розв'язок рівняння (41). Він справджує умову (43), правильність якої безпосередньо випливає із формул (52), (53) та (55).

Зауваження 2. Можна встановити, що у випадку, коли інтегральне рівняння (41) має єдиний розв'язок, існує єдиний розв'язок задачі (2), (3), а також зворотне твердження.

Зауваження 3. Теорема 1 є правильною і в тому випадку, коли вектор-функція $h \in$ $\in W_2^1([0,T],\mathbb{R}^m)$ не обов'язково визначається із задачі (27). Її можна задати довільним чином, вимагаючи лише виконання умов $h(0) = h(T) = \gamma$.

Зауваження 4. Самостійне значення має випадок, коли в задачі з керуванням (5), (6) $A(t) = 0$. В цьому випадку викладений метод і чисельно-аналітичний метод істотно не відрізняються один від одного.

2. Нелінійна задача. Запропонований підхід до дослідження періодичних розв'язків лінійної задачі без істотних змін переноситься на нелінійні задачі. Застосуємо його у зміненій формі до задачі

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t) + F(t,x), \quad x(0) = \gamma, \quad x(0) = x(T), \tag{57}$$

до якої можна звести періодичну задачу (1). У подальшому будемо припускати, що оператор Немицького, який породжується вектор-функцією $F(t,x)$, відображає простір $W_2^1([0,T],\mathbb{R}^m)$ у простір $L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$.

Зведемо встановлення умов сумісності задачі (57) до дослідження питання існування розв'язків інтегрального рівняння. Для цього використаємо задачу з керуванням (5), (6). Нехай

$$x(t) = h(t) + \int\limits_0^t H(t,s)y(s)\,ds - Y(t)\lambda, \tag{58}$$

де $h(t)$ не визначається із задачі (27), а задається довільним чином, з вимогою лише виконання умови $h(0) = h(T) = \gamma$, $h \in W_2^1([0,T],\mathbb{R}^m)$.

Використавши позначення (13), очевидно, будемо мати $x(0) = \gamma$, а задовольнивши умову $x(0) = x(T)$ і врахувавши при цьому формули (58), (15), (18), за умови $D \neq 0$ отримаємо

$$\lambda = \int\limits_0^T \Gamma(s)y(s)\,ds. \tag{59}$$

Отже, на основі формул (58), (59) маємо

$$x(t) = h(t) + \int\limits_0^t H(t,s)y(s)\,ds - \int\limits_0^T Y(t)\Gamma(s)y(s)\,ds \tag{60}$$

або з урахуванням позначень (18)

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)y(s)\,ds. \tag{61}$$

Нехай в задачі з керуванням (5), (6)

$$y(t) = g(t) + F(t, x(t)), \tag{62}$$

де

$$g(t) = f(t) - \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) h(t). \tag{63}$$

Тоді на основі формул (61) та (62), підставивши першу в другу, одержимо рівняння

$$y(t) = g(t) + F\left(t, h(t) + \int_0^T G(t,s)y(s)ds\right). \tag{64}$$

Використавши формулу (38), дослідження існування розв'язків рівняння (64) можна звести до аналогічного питання стосовно рівняння

$$v(t) = p(t) + F\left(t, h(t) + \int_0^T G(t,s)v(s)\,ds\right) -$$
$$- \int_0^T S(t,\xi)F\left(\xi, h(\xi) + \int_0^T G(\xi,s)v(s)ds\right)\,d\xi \tag{65}$$

у підпросторі $V\left([0,T], \mathbb{R}^m\right)$, де

$$p(t) = g(t) - \int_0^T S(t,\xi)g(\xi)d\xi,$$

а $g(t)$ має вигляд (63).

Повторюючи доведення теореми 1, переконуємось у тому, що за умови

$$\int_0^T \Gamma(s)y^*(s)\,ds = 0, \tag{66}$$

у якій $y^*(t)$ — розв'язок рівняння (64), який у випадку існування розв'язку $v^*(t)$ рівняння (65) визначається формулою

$$y^*(t) = g(t) + F\left(t, h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)v^*(s)\,ds\right), \tag{67}$$

розв'язком задачі (57) є

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)v^*(s)\,ds, \tag{68}$$

і можемо встановити зворотне твердження, що

$$v^*(t) = y^*(t) - \int\limits_0^T S(t,\xi)y^*(\xi)d\xi, \quad y^*(t) = \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right)(x^*(t) - h(t)), \tag{69}$$

де $x^*(t)$ — розв'язок задачі (57), задовольняє рівняння (65).

Із викладеного безпосередньо випливає правильність такого твердження.

Теорема 2. *Якщо матриця D, яка визначається формулою (15), є невиродженою, то задача (57) сумісна лише тоді, коли існує розв'язок рівняння (65) і справджується умова (66), причому їх розв'язки пов'язані співвідношеннями (67) – (69).*

Якщо існує єдиний розв'язок одного з рівнянь (57), (64) та (65), то й інші мають єдиний розв'язок.

Зауваження 5. У випадку, коли в рівнянні (57) $A(t) = 0$ і $h(t) = \gamma$, формула (60) набирає вигляду

$$x(t) = \gamma + \int\limits_0^t y(s)\,ds - \frac{t}{T}\int\limits_0^T y(s)\,ds. \tag{70}$$

Зауваження 6. Задачу (57) можна звести до інтегрального рівняння відносно невідомої вектор-функції $x(t)$. Для цього достатньо лише підставити вираз (62) у формулу (61). Зокрема, для задачі (1), поклавши в (70) $y(t) = f(t, x(t))$, будемо мати

$$x(t) = \gamma + \int\limits_0^t f(s, x(s))\,ds - \frac{t}{T}\int\limits_0^T f(s, x(s))\,ds.$$

Зауваження 7. У формулі (61) вектор-функцію $h(t)$ можна знайти із задачі $\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right)h = r(t), h(0) = \gamma, h(0) = h(T)$, задавши довільним чином $r \in L_2\left([0,T], \mathbb{R}^m\right)$, зокрема $r(t) = f(t)$.

3. Ітераційний метод. Оскільки точний розв'язок задачі (57) можна зобразити в явному вигляді у виняткових випадках, виникає потреба побудови наближених розв'язків даної задачі. Для цього можна використати різноманітні існуючі наближені методи, зокрема ітераційні, проекційні чи проекційно-ітеративні.

Згідно з ітераційним методом послідовні наближення $x_k(t)$ до шуканого розв'язку $x^*(t)$ задачі (57) визначаємо з допоміжної задачі

$$\frac{dx_k}{dt} + A(t)x_k + C(t)\lambda_k = y_k(t), \quad x_k(0) = \gamma, \quad x_k(0) = x_k(T), \tag{71}$$

в якій

$$y_k(t) = g(t) + F(t, x_{k-1}(t)), \tag{72}$$

де $g(t)$ визначається формулою (63).

Початкове наближення визначаємо із задачі (71) при $k = 0$ та довільній заданій вектор-функції $y_0(t)$.

За умови леми 1 метод (71), (72) зводиться до методу послідовних наближень

$$v_k(t) = p(t) + F\left(t, h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)v_{k-1}(s)\,ds\right) - \\ - \int\limits_0^T S(t,\xi)F\left(\xi, h(\xi) + \int\limits_0^T G(\xi,s)v_{k-1}(s)\,ds\right)d\xi \tag{73}$$

для системи інтегральних рівнянь (65).

Справді, за лемою 1 задача (71) має єдиний розв'язок, який визначається формулами

$$x_k(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)y_k(s)\,ds, \quad \lambda_k = \int\limits_0^T \Gamma(s)y_k(s)\,ds. \tag{74}$$

Нехай

$$v_k(t) = y_k(t) - \int\limits_0^T S(t,\xi)y_k(\xi)d\xi, \tag{75}$$

тоді на підставі першої властивості (9) неважко показати, що зображення (74) можна записати у вигляді

$$x_k(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)v_k(s)\,ds. \tag{76}$$

Замінивши у формулі (76) індекс k на $k-1$ і підставивши її у співвідношення (72), отримаємо

$$y_k(t) = g(t) + F\left(t, h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)v_{k-1}(s)\,ds\right). \tag{77}$$

Тепер уже видно, що із формул (77) та (75) правильність співвідношення (73) випливає очевидним чином.

Таким чином, питання збіжності ітераційного методу (71), (72) для задачі (57) звелось до питання збіжності методу послідовних наближень (73) для рівняння

$$v(t) = p(t) + (Mv)(t), \tag{78}$$

де

$$(Mv)(t) = F\left(t, h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)v(s)\,ds\right) -$$
$$- \int\limits_0^T S(t,\xi)F\left(\xi, h(\xi) + \int\limits_0^T G(\xi,s)v(s)\,ds\right)d\xi, \tag{79}$$

яке в наш час достатньо повно досліджено. Зокрема, правильним є таке твердження.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови леми 1, оператор* $M : V([0,T],\mathbb{R}^m) \to \to V([0,T],\mathbb{R}^m)$, *який визначається формулою (79), є оператором стискання і*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \tag{80}$$

то існує єдиний розв'язок $x^* \in W_2^1([0,T],\mathbb{R}^m)$ *задачі (57) і послідовність* $\{x_k(t), k \geq \geq 0\} \subset W_2^1([0,T],\mathbb{R}^m)$, *побудована за ітераційним методом (71), (72), збігається до цього розв'язку.*

Доведення. За умови теореми, як відомо, існує єдиний розв'язок $v^*(t)$ рівняння (78) і послідовність $\{v_k(t),\ k \geq 0\}$, побудована за формулою (73), збігається до цього розв'язку, тобто

$$\lim_{k\to\infty} v_k(t) = v^*(t). \tag{81}$$

Виконавши граничний перехід у рівності (77) з урахуванням (81), отримаємо

$$\lim_{k\to\infty} y_k(t) = y^*(t), \quad y^*(t) = g(t) + F\left(t, h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)v^*(s)ds\right), \tag{82}$$

а перейшовши до границі в рівностях (74) і врахувавши при цьому (82), неважко впевнитись в існуванні границь

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t), \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*, \tag{83}$$

в яких, очевидно,

$$x^*(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)v^*(s)\,ds, \quad \lambda^* = \int\limits_0^T \Gamma(s)y^*(s)\,ds. \tag{84}$$

За умови (80) $\lambda^* = 0$, а тому із другої формули (84) випливає рівність

$$\int\limits_0^T \Gamma(s)y^*(s)\,ds = 0. \tag{85}$$

Оскільки $v^*(t)$ — розв'язок рівняння (78) і виконується рівність (85), то за теоремою 2 існує розв'язок $x^*(t)$ задачі (57), який визначається формулою (84), і, як це випливає із (83), до цього розв'язку збігається послідовність $\{x_k(t),\ k \geq 0\}$.

Встановимо єдиність розв'язку задачі (57). Для цього припустимо, що існує другий розв'язок $\overline{x}(t)$, відмінний від першого $x^*(t)$. Тоді за теоремою 2 існує розв'язок $\overline{v}(t)$ рівняння (78) і справедливим є твердження

$$\overline{x}(t) = h(t) + \int\limits_0^T G(t,s)\overline{v}(s)\,ds, \tag{86}$$

причому $\overline{v}(t) \neq v^*(t)$, оскільки в протилежному випадку, як це випливає із співвідношень (84) та (86), було б $\overline{x}(t) = x^*(t)$. Отже, за зробленого припущення рівняння (78) мало б два розв'язки, що є неможливим за умови теореми 3. Таким чином, задача (57) має лише один розв'язок, що і завершує доведення теореми.

Зауваження 8. Ітераційний метод очевидним чином застосовний до лінійної задачі (4), яка зводиться до задачі (57) з $F(t,x) = B(t)x$. У цьому випадку формула (72) набирає вигляду

$$y_k(t) = g(t) + B(t)x_{k-1}(t), \quad g(t) = f(t) - \left(\frac{d}{dt} + P(t)\right)h(t), \tag{87}$$

а метод (71), (87) зводиться до методу послідовних наближень для лінійного інтегрального рівняння другого роду, ядро якого визначається формулою (42). Для лінійної задачі теорему 3 можна послабити. Достатньо вимагати виконання умови $\rho(L) < 1$, де $\rho(L)$ — спектральний радіус інтегрального оператора, що фігурує в правій частині рівняння (41).

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в краевых задачах обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 279 с.

2. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 1. — С. 102 – 117. — № 2. — С. 225 – 243.

3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.

4. *Лучка А. Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з обмеженнями // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання: Праці Укр. мат. конгресу. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. — С. 43 – 59.

5. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із загаюванням та обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 2. — С. 206 – 232.

6. *Лучка А. Ю.* Парні системи функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями і методи їх розв'язування // Там же. — 2007. — **10**, № 1. — С. 113 – 125.

Одержано 10.10.07