УДК 517.5

ГІПЕРБОЛІЧНА ПІДКОВА ДЛЯ ДИФЕОМОРФІЗМІВ КОЛА ЗІ ЗЛАМОМ

О. Ю. Теплінський

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

The hyperbolic horseshoe for renormalization operator acting on commuting pairs which correspond to circle diffeomorphisms with a break is constructed.

Построена гиперболическая подкова для ренормализационного оператора на коммутирующих парах функций, соответствующих диффеоморфизмам окружности с изломом.

1. Вступ. Мета цієї статті — побудова гіперболічної структури, яка носить назву „підкова Смейла", для ренормалізаційного оператора на комутуючих парах функцій, що відповідають дифеоморфізмам кола зі зламом. Цей результат було анонсовано в оглядовій роботі [1].

Так званий метод ренормалізаційної групи було розроблено фізиками для вивчення властивостей певних структур з рисами самоподібності, тобто таких, які на різних масштабах розгляду поводяться аналогічно. Фактично, метод діє як лупа: мікроскопічний об'єкт (фрагмент макроскопічної структури) перенормовується знову на макроскопічний рівень. Легко повірити, що в багатьох випадках із зменшенням масштабу розгляду таких структур відмінності між різними представниками досліджуваного класу поступово зникають, тобто зростає їхня регулярність — аж до повної універсальності в границі. Зрозуміло також, що перехід від певного малого масштабу розгляду до ще меншого часто можна зробити, незважаючи взагалі на макроскопічний рівень структури, тобто послідовність „ренормалізацій" фактично породжується ітеруванням певного оператора у відповідному просторі. Математики зацікавилися ренорм-груповим методом тоді, коли фізик М. Фейгенбаум [2], застосувавши цей метод, наприкінці 70-х років минулого століття відкрив (за допомогою комп'ютера) універсальні властивості послідовностей біфуркацій подвоєння періоду для унімодальних (тобто гладких з єдиною точкою екстремуму) відображень відрізка. Математичне обґрунтування універсальності Фейгенбаума (для аналітичних відображень) тривало майже 20 років [3–5], але за цей час інструмент ренормалізації набув великої популярності, зокрема в теорії динамічних систем із дискретним часом.

Паралельно з вивченням унімодальних відображень відрізка відбувалося дослідження критичних поворотів кола (тобто його гладких гомеоморфізмів з єдиною критичною точкою). О. Ланфорд висловив [6] гіпотезу, згідно з якою в цьому випадку ренорм-оператор є рівномірно гіперболічним з єдиним нестійким напрямком, який відповідає зміні числа обертання гомеоморфізму кола, що виливається в наявність у просторі, де цей оператор діє, так званої підкови Смейла [7], до якої стягуються всі траєкторії даного оператора. Виконати програму Ланфорда з побудови гіперболічної підкови Смейла для критичних відображень кола в аналітичному випадку спромігся М. Ямпольський [8]. Це дало змогу, зокрема, довести C^1-гладкість спряження довільних двох критичних аналітичних поворотів кола з однаковим порядком критичної точки і однаковим числом обертання [9].

Інший клас динамічних систем на колі, який дозволяє застосувати до себе ренорм-груповий підхід, складають дифеоморфізми зі зламом, тобто такі гомеоморфізми кола, які є гладкими скрізь, крім однієї точки, в якій їхня похідна має розрив першого роду. Їхнє дослідження [10, 11] показало, що ренормалізації таких гомеоморфізмів експоненціально швидко збігаються до класу дробово-лінійних відображень, в якому ренорм-оператор виявляє гіперболічні властивості, аналогічні до передбачених Ланфордом у випадку критичних поворотів.

У даній статті доведено рівномірну гіперболічність ренорм-оператора на дробово-лінійних комутуючих парах і дано наочну побудову підкови Смейла в класі цих пар. Зауважимо, що це є єдиним відомим результатом такого типу, доведеним методами дійсного аналізу для функцій обмеженої гладкості.

Скрізь далі для заданого відображення F запис F^n позначає його n-ту ітерацію $F \circ \circ F \circ \cdots \circ F$ (n разів).

2. Два підходи до означення ренормалізацій. ***2.1. Ренормалізації гомеоморфізмів кола.*** *Одиничним колом* ми називаємо фактор-простір $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ із зрозумілим чином заданими орієнтацією, метрикою, мірою Лебега та операцією додавання за модулем 1. Основною арифметичною характеристикою зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму T одиничного кола $\mathbb{T}^1$ є *число обертання* $\rho = \rho(T)$, яке визначається як границя $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{x_i}{i}$, де $x_i = L_T^i x_0$ — траєкторія *підняття* L_T гомеоморфізму T з $\mathbb{T}^1$ на $\mathbb{R}$. (Тобто L_T — строго зростаюча функція з $\mathbb{R}$ до $\mathbb{R}$, що має властивість $L_T(x+1) \equiv L_T(x)+1$ і при факторизації по $\mathbb{Z}$ дає T.)

Будемо використовувати розклад числа обертання у *ланцюговий дріб* [12]:

$$\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\cdots}{k_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}} \in (0,1). \tag{1}$$

Послідовність натуральних *неповних часток* k_n, $n \geq 1$, може бути скінченною (числу нуль відповідає порожній розклад) або нескінченною. В останньому випадку числовим значенням виразу (1) за означенням є границя послідовності *раціональних наближень* $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$. Взаємопрості натуральні числа p_n та q_n задовольняють рекурентні співвідношення $p_n = k_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = k_n q_{n-1} + q_{n-2}$ для $n \geq 1$, де для зручності покладено $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ та $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$.

Для будь-якого числа $\rho \in (0,1)$ послідовність неповних часток визначається індуктивно за допомогою перетворення Гаусса

$$\mathcal{G} : \rho \to \left\{\frac{1}{\rho}\right\} = \frac{1}{\rho} - \left[\frac{1}{\rho}\right], \tag{2}$$

де $\{x\}$ позначає дробову, а $[x]$ — цілу частину x. Послідовність неповних часток визначається цілими частинами у формулі (2), а саме $k_n = [1/\rho_{n-1}]$, $n \geq 1$, де $\rho_n = \mathcal{G}^n \rho$.

Зауважимо, що при такому підході у випадку раціонального $\rho \in (0,1)$ остання неповна частка завжди буде більшою за 1. Але, в принципі, кожне раціональне $\rho \in (0,1)$ допускає два способи його запису у вигляді (1), а саме $p/q = [k_1, \ldots, k_m] = [k_1, \ldots, k_{m-1}, k_m - 1, 1]$, де $k_m \geq 2$.

У цьому підпункті ми даємо означення n-ї ренормалізації гомеоморфізму відповідно до розкладу його числа обертання у ланцюговий дріб. Всі наведені нижче конструкції є дійсними для будь-якого $n \geq 0$ у випадку ірраціонального числа обертання, а у випадку раціонального числа обертання вони є дійсними лише впродовж скінченної кількості кроків відповідно до довжини скінченного розкладу (1).

Для заданого гомеоморфізму T можна розглянути траєкторію $\xi_i = T^i \xi_0$, $i \geq 0$, певної *відміченої точки* $\xi_0 \in \mathbb{T}^1$ і вибрати з неї послідовність *динамічних наближень* ξ_{q_n}, $n \geq 0$, індексами яких є знаменники відповідних раціональних наближень до ρ. Зручно також використовувати $\xi_{q_{-1}} = \xi_0 - 1$. Добре вивчені арифметичні властивості раціональних наближень з огляду на комбінаторну еквівалентність між T та R_ρ показують, що динамічні наближення наближаються до відміченої точки по черзі з двох боків:

$$\xi_{q_{-1}} < \xi_{q_1} < \xi_{q_3} < \ldots < \xi_{q_{2m+1}} < \ldots < \xi_0 < \ldots < \xi_{q_{2m}} < \ldots < \xi_{q_2} < \xi_{q_0}. \qquad (3)$$

У відповідності з (3) означимо n-й *фундаментальний відрізок* $\Delta_0^{(n)}$ як дугу $[\xi_0, \xi_{q_n}]$ для парного n та як дугу $[\xi_{q_n}, \xi_0]$ для n непарного. Ітерації T^{q_n} та $T^{q_{n-1}}$, обмежені на фундаментальні відрізки $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ відповідно, є нічим іншим як двома неперервними компонентами відображення першого повернення для T на їхнє об'єднання $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$ із склеєними між собою кінцевими точками $\xi_{q_{n-1}}$ і ξ_{q_n}. (Зауважимо, що послідовні образи відрізків $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ до свого повернення на $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$ цілком вкривають коло $\mathbb{T}^1$, перекриваючись лише своїми кінцевими точками.)

Назвемо n-ю *ренормалізацією*, $n \geq 0$, зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму T одиничного кола $\mathbb{T}^1$ відносно відміченої точки $\xi_0 \in \mathbb{T}^1$ пару функцій (f_n, g_n), які одержуються з обмежень T^{q_n} на $\Delta_0^{(n-1)}$ і $T^{q_{n-1}}$ на $\Delta_0^{(n)}$ відповідно за допомогою афінної заміни координат, яка переводить ξ_0 в 0, а $\xi_{q_{n-1}}$ в -1. При цьому f_n є визначеною на $[-1, 0]$, а g_n — на $[0, a^{(n)}]$, де $a^{(n)} = f_n(0)$. Зауважимо, що з цього означення автоматично випливає, що f_n і g_n неперервні і строго зростають, причому графік f_n лежить строго вище за графік тотожного відображення відрізка $[-1, 0]$ на себе, який ми надалі називатимемо *діагоналлю*.

2.2. Ренорм-оператор на комутуючих парах. Послідовність ренормалізацій, визначену в попередньому підпункті, можна одержати іншим шляхом.

Будемо говорити, що дві дійсні функції F та G складають комутуючу пару (F, G), якщо виконуються наступні умови: $F(0) \geq 0$, $G(0) \leq 0$, функції F та G визначені, неперервні і строго зростають на проміжках $[G(0), 0]$ та $[0, F(0)]$ відповідно і комутують в точці 0, тобто $F(G(0)) = G(F(0))$. *Ітерацією Фарея* комутуючої пари (F, G) такої, що $F(G(0)) < 0$, називається комутуюча пара $(F, F \circ G)$.

Комутуючу пару (F, G) називають *нормалізованою*, якщо $G(0) = -1$ (таким чином, функція F діє з відрізка $[-1, 0]$). Для пари функцій (F, G) такої, що $G(0) \neq 0$, їхня *нормалізація* — це пара $\overline{(F, G)} = (\mathbf{n}^{-1} \circ F \circ \mathbf{n}, \mathbf{n}^{-1} \circ G \circ \mathbf{n})$, де $\mathbf{n}(z) = -G(0)z$. Нормалізована комутуюча пара (F, G) називається *виродженою*, якщо $F(0) = 0$ (таким чином, функція G визначена лише в точці 0 і $G(0) = F(-1) = -1$).

Множину всіх нормалізованих комутуючих пар (F, G) позначаємо $\mathfrak{P}$ (далі її елементи називаємо просто „парами”). Позначимо $\dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} \backslash \mathfrak{Z}$, де $\mathfrak{Z}$ — множина всіх вироджених пар. Визначимо „шари” $\Pi_k \subset \mathfrak{P}$, $0 \leq k < \infty$, умовою $F^k(-1) \leq 0 < F^{k+1}(-1)$, їхні „внутрішності” $\dot{\Pi}_k$, $k \geq 0$, умовою $F^k(-1) < 0 < F^{k+1}(-1)$ і межові „поверхні” $\gamma_{1/k}$, $1 \leq k < \infty$, умовою $F^k(-1) = 0$. Означимо також множину Π_∞ всіх таких пар $(F, G) \in \mathfrak{P}$, що $F^i(-1) < 0$ для всіх $i \geq 0$, множину $\gamma_0 = \gamma_{1/\infty}$ всіх таких пар $(F, G) \in \Pi_\infty$, що $F(z) \geq z$ для всіх $z \in [-1, 0]$, і множину $\dot{\Pi}_\infty$ таку, що $F(z) < z$ для певного $z \in [-1, 0]$. Зауважимо, що перша з цих умов еквівалентна існуванню в F нерухомої точки на $[-1, 0]$, друга — тому, що графік F дотикається зверху до діагоналі, а третя — тому, що він її перетинає. Очевидно, розбиття $\mathfrak{P} = \bigcup_{0 \leq k \leq \infty} \Pi_k$ є диз’юнктним (тобто без перекриттів), так само як розбиття $\Pi_k = \dot{\Pi}_k \cup \gamma_{1/k}$, $1 \leq k \leq \infty$ (тоді як для $k = 0$ маємо рівність $\Pi_0 = \dot{\Pi}_0$). Позначимо $\mathfrak{S} = \mathfrak{P} \backslash (\Pi_0 \cup \gamma_1)$ (це множина таких пар (F, G), що $F(-1) < 0$), $\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \cup \gamma_1$ (множина таких пар, що $F(-1) \leq 0$) і $\dot{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \backslash \mathfrak{Z}$ (множина таких пар, що $F(-1) < 0$, $F(0) > 0$).

Оператор *перемикач* $\mathcal{S} : \dot{\mathfrak{P}} \to \dot{\mathfrak{P}}$ (визначаємо як $\mathcal{S}(F, G) = \overline{(G, F)}$) фактично міняє F та G місцями. Легко бачити, що цей оператор є інволютивним, тобто $\mathcal{S}^2 = \mathrm{Id}$, і переводить множини $\dot{\mathfrak{S}}$ та Π_0 одну в одну.

Оператор *крок Фарея* $\mathcal{F} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{P}$ визначаємо як $\mathcal{F}(F, G) = \overline{(F, F \circ G)}$. Очевидно, $\mathcal{F}(\dot{\Pi}_k) \subset \dot{\Pi}_{k-1}$, $k \geq 1$; $\mathcal{F}(\gamma_{1/k}) \subset \gamma_{1/(k-1)}$, $k \geq 2$, $\mathcal{F}(\Pi_\infty) \subset \Pi_\infty$ і $\mathcal{F} = \mathrm{Id}$ на $\mathfrak{Z}$.

Оператор $\mathcal{F}$, який стартував у $\mathfrak{S}$, можна проітерувати деяку кількість разів, але лише до тих пір, поки його траєкторія не вийде за межі $\mathfrak{S}$. З іншого боку, та пара, що „тікає” з $\mathfrak{S}$, швидше за все потрапить до Π_0 (якщо тільки не до межової множини γ_1), і тоді оператор $\mathcal{S}$ поверне її назад до $\mathfrak{S}$. Це міркування приводить до головної концепції в даній роботі — ренормалізації в $\overline{\mathfrak{S}}$.

Ренормалізуючий оператор на парах (далі „ренорм-оператор”) $\mathcal{R} : \overline{\mathfrak{S}} \backslash \Pi_\infty \to \mathfrak{S}$ визначаємо формулою $\mathcal{R}(F, G) = \overline{(F^k \circ G, F)}$ для $(F, G) \in \Pi_k$, $k \geq 1$. Справді, множина визначення $\mathcal{R}$ подається у вигляді $\overline{\mathfrak{S}} \backslash \Pi_\infty = \bigcup_{k \geq 1} \Pi_k$. Її елементи називають *ренормалізовними* парами, при цьому натуральне число $k = k(F, G) \geq 1$ для пари $(F, G) \in \Pi_k$ має назву *висоти* ренормалізації. Відповідно, пари з Π_∞ називають *неренормалізовними*, і їхньою висотою вважають ∞. Зауважимо, що ренормалізовними є ті пари, для яких F не має нерухомих точок на $[-1, 0]$.

Легко переконатися, що на множині $\dot{\Pi}_k$, $1 \leq k < \infty$, має місце наступне подання: $\mathcal{R} = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}^k$. З іншого боку, $\mathcal{R}(\gamma_{1/k}) \subset \mathfrak{Z}$, $1 \leq k < \infty$.

Пару (F, G) називають *нескінченно ренормалізовною*, якщо $\mathcal{R}^n(F, G) \notin \Pi_\infty$ для всіх $n \geq 0$. Множину всіх таких пар позначаємо $\mathfrak{R}$. Тепер неважко перевірити, що кожна означена в попередньому підпункті ренормалізація (f_n, g_n) гомеоморфізму кола T з ірраціональним числом обертання належить до $\mathfrak{R}$, отже, послідовність цих ренормалізацій є траєкторією ренорм-оператора в $\mathfrak{R}$:

$$\mathcal{R}(f_n, g_n) = (f_{n+1}, g_{n+1}). \tag{4}$$

Для пари $(F, G) \in \overline{\mathfrak{S}}$ визначимо *число обертання* $\rho(F, G) \in [0, 1]$, підставивши висоти ренормалізації $k_n = k(\mathcal{R}^{n-1}(F, G))$ на місце неповних часток у ланцюговому дробі $\rho(F, G) = [k_1, k_2, \ldots]$. Цей розклад продовжується поки $\mathcal{R}^{n-1}(F, G) \notin \Pi_\infty$, отже, може виявитися порожнім, скінченним або нескінченним, і при цьому значення $\rho(F, G)$ відповідно буде нулем, раціональним або ірраціональним числом. Зауважимо, що числа обертання $\rho = 0$ та $\rho = 1$ в цьому означенні відрізняються: перше відповідає множині неренормалізовних пар Π_∞, а друге — певній підмножині Π_1.

Для ірраціонального $\rho \in (0,1)$ позначаємо як γ_ρ множину всіх пар із числом обертання ρ. Зауважимо, що всі пари з $\gamma_{1/k}$ мають число обертання $1/k$, $1 \le k \le \infty$, але не всі пари з числом обертання $\rho = 1/k$ належать до $\gamma_{1/k}$. З іншого боку, для раціональних чисел $\rho = [k_1, \ldots, k_m]$ з $m > 1$ ми не означаємо γ_ρ зовсім. Аби уникнути непорозумінь, ми користуватимемось позначенням γ_ρ лише у випадку ірраціонального ρ (і явно писатимемо $\gamma_{1/k}$ у протилежному випадку).

Оскільки перетворення Гаусса (2) зсуває розклад у ланцюговий дріб на одну позицію вліво $\overline{\mathcal{G}}[k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] = [k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots]$, можемо записати, що

$$\rho(\mathcal{R}(F,G)) = \mathcal{G}\rho(F,G), \quad (F,G) \in \overline{\mathfrak{S}} \backslash \Pi_\infty.$$

Наведена конструкція дозволяє розглядати суцільну послідовність ренормалізацій (f_n, g_n), побудованих для певного гомеоморфізму кола T, як єдину траєкторію нескінченновимірної динамічної системи $(\overline{\mathfrak{S}}; \mathcal{R})$, що породжена дією ренорм-оператора на просторі комутуючих пар. У наступному пункті ми вивчатимемо гіперболічні властивості цього оператора, обмеженого на підпростір пар, що відповідають дифеоморфізмам кола зі зламом.

Зауважимо, що $(\overline{\mathfrak{S}}; \mathcal{R})$ не є динамічною системою в класичному сенсі, оскільки відображення $\mathcal{R}$ не є визначеним на всій множині $\overline{\mathfrak{S}}$. Проте класичні поняття легко поширюються на подібні *динамічні системи зі втратою міри* (зокрема, підмножину $M \subset \overline{\mathfrak{S}}$ називаємо *інваріантною* відносно $\mathcal{R}$, якщо $\mathcal{R}(M \cap \mathfrak{R}) \subset M$). Треба лише мати на увазі, що траєкторії в такій системі можуть бути скінченними: вони зупиняються, коли потрапляють до Π_∞.

3. Дифеоморфізми кола зі зламом. Гомеоморфізм кола T називається *дифеоморфізмом* гладкості $C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, *зі зламом* в точці ξ_0, якщо виконуються наступні умови:

1) $T \in C^{2+\alpha}\big([\xi_0, \xi_0 + 1]\big)$;
2) $\inf_{\xi \ne \xi_0} T'(\xi) > 0$;
3) однобічні похідні $T'(\xi_0+)$ і $T'(\xi_0-)$ між собою не рівні.

Розміром зламу називається число $c = \sqrt{\dfrac{T'(\xi_0-)}{T'(\xi_0+)}}$. Для дифеоморфізму зі зламом розмір останнього є додатним дійсним числом, відмінним від одиниці. Легко переконатися, що гладка заміна координат на колі залишає розмір зламу дифеоморфізму зі зламом незмінним.

Означимо множину пар, що відповідає множині дифеоморфізмів гладкості $C^{2+\alpha}$ зі зламом розміру c. Аби це зробити, розглянемо, по-перше, множину $\dot{\mathfrak{P}}_c^{2+\alpha} \subset \dot{\mathfrak{P}}$ всіх невироджених пар (F,G), обидві функції в яких є $C^{2+\alpha}$-гладкими, їхні перші похідні додатні скрізь на (замкнених!) відрізках визначення і задовольняють умову $c^2 = \dfrac{F'(0)G'(F(0))}{G'(0)F'(-1)}$. По-друге, розглянемо множину $\mathfrak{Z}_c^{2+\alpha} \subset \mathfrak{Z}$ усіх вироджених пар (F,G) таких, що $F \in C^{2+\alpha}([-1,0])$, $F' > 0$ і $c^2 = \dfrac{F'(0)}{F'(-1)}$. Виявляється природним покласти $\mathfrak{P}_c^{2+\alpha} = \dot{\mathfrak{P}}_c^{2+\alpha} \cup \mathfrak{Z}_c^{2+\alpha}$ і запровадити весь набір позначень за зразком $*_c^{2+\alpha} = * \cap \mathfrak{P}_c^{2+\alpha}$, де $*$ пробігає всі підмножини $\mathfrak{P}$, означені в попередньому пункті. Легко перевірити, що $\mathcal{F}(\mathfrak{S}_c^{2+\alpha}) \subset \mathfrak{P}_c^{2+\alpha}$, $\mathcal{S}(\dot{\mathfrak{P}}_c^{2+\alpha}) = \dot{\mathfrak{P}}_{1/c}^{2+\alpha}$, $\mathcal{R}(\overline{\mathfrak{S}}_c^{2+\alpha} \setminus \Pi_{\infty,c}^{2+\alpha}) \subset \mathfrak{S}_{1/c}^{2+\alpha}$ і $\mathcal{R}(\gamma_{1/k,c}^{2+\alpha}) \subset \mathfrak{Z}_{1/c}^{2+\alpha}$. Оскільки кожна дія $\mathcal{R}$ перемикає розмір зламу з c на $1/c$, то виникає потреба або розглядати простори $\mathfrak{P}_c^{2+\alpha}$ і $\mathfrak{P}_{1/c}^{2+\alpha}$ разом, або вивчати дію другої ітерації ренорм-оператора $\mathcal{R}^2$ на двічі диференційовні пари з $\mathfrak{S}_c^{2+\alpha}$. Зауважимо, що множина $\mathfrak{R}_c^{2+\alpha}$ є інваріантною відносно $\mathcal{R}^2$.

Зв'язок між щойно означеними просторами і дифеоморфізмами гладкості $C^{2+\alpha}$ зі зламом розміру c є наступним: ренормалізації (f_n, g_n), визначені в попередньому пункті, належать до $\mathfrak{S}_c^{2+\alpha,}$ для парних n і до $\mathfrak{S}_{1/c}^{2+\alpha}$ для непарних n.

Тепер розглянемо інваріантну відносно $\mathcal{R}$ сім'ю пар дробово-лінійних функцій, заданих формулами

$$F_{a,v,c}(z) = \frac{a + cz}{1 - vz}, \quad G_{a,v,c}(z) = \frac{-c + z}{c - \frac{c-1-v}{a} z}. \tag{5}$$

Зручно покласти $G_{0,c-1,c}(0) = -1$; таким чином, для кожного розміру зламу c маємо в цій сім'ї єдину вироджену пару, а саме, пару з $a = 0$, $v = c - 1$.

Сім'я (5) є особливо важливою у вивченні дифеоморфізмів кола зі зламом, оскільки ренормалізації (f_n, g_n) таких дифеоморфізмів експоненціально швидко наближаються до цієї сім'ї при $n \to +\infty$. А саме, справджується наступне твердження [10]. Уведемо позначення:

$$c^{(n)} = c^{(-1)^n}, \quad a^{(n)} = \frac{|\xi_{q_n} - \xi_0|}{|\xi_{q_{n-1}} - \xi_0|}, \quad b^{(n)} = \frac{|\xi_{q_n + q_{n-1}} - \xi_0|}{|\xi_{q_{n-1}} - \xi_0|}, \quad v^{(n)} = \frac{c^{(n)} - a^{(n)} - b^{(n)}}{b^{(n)}}.$$

Теорема (Вул – Ханін). *Існують такі сталі* $C = C(T) > 0$, $\lambda = \lambda(T) \in (0,1)$, *що для всіх* $n \geq 0$ *справджуються оцінки*

$$\|f_n - F_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}}\|_{C^2} \leq C\lambda^n, \quad \|g_n - G_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}})\|_{C^1} \leq C\lambda^n, \tag{6}$$

а також $\left\| g_n'' - G''_{a^{(n)},v^{(n)},c^{(n)}} \right\|_{C^0} \leq \dfrac{C\lambda^n}{a^{(n)}}$.

4. Ренормалізації у дробово-лінійній сім'ї. ***4.1. Основна система координат.*** Оскільки ренормалізації дифеоморфізмів зі зламом збігаються до дробово-лінійної сім'ї (5), будемо вивчати дію ренорм-оператора на цій сім'ї. Для кожного фіксованого значення розміру зламу c зручно ототожнити точку (a, v) на площині $\mathbb{R}^2$ з відповідною парою функцій $(F_{a,v,c}, G_{a,v,c})$, якщо остання визначена і належить до простору $\mathfrak{P}_c^{2+\alpha}$. Позначимо через $\mathfrak{P}_c$ множину всіх таких точок, і аналогічно означимо інші множини з індексом c, такі як $\mathfrak{S}_c, \mathfrak{R}_c, \gamma_{1/k,c}, 1 \leq k \leq \infty$, тощо. Легко переконатися, що крок Фарея відображає $\mathfrak{S}_c$ в $\mathfrak{P}_c$, оператор перемикання — $\dot{\mathfrak{P}}_c$ на $\dot{\mathfrak{P}}_{1/c}$, а ренорм-оператор — $\overline{\mathfrak{S}}_c \setminus \Pi_{\infty,c}$ в $\mathfrak{S}_{1/c}$. Позначимо обмеження цих операторів на зазначені множини точок як $\mathcal{F}_c$, $\mathcal{S}_c$, $\mathcal{R}_c$ відповідно. Ці оператори є двовимірними, і в цьому пункті ми вивчатимемо саме їхню двовимірну динаміку.

Можна показати [11], що $\dot{\mathfrak{S}}_c = \{(a, v) : 0 < a < c, v > c - a - 1\}$, $\mathfrak{S}_c = \dot{\mathfrak{S}}_c \cup$ $\cup \{(0, c-1)\}$, $\gamma_{1,c} = \{(a, v) : a = c, v > -1\}$, $\Pi_{0,c} = \{(a, v) : a > c, v > -c/a\}$, а отже, $\mathfrak{P}_c = \mathfrak{S}_c \cup \gamma_{1,c} \cup \Pi_{0,c}$. Множина точок із нульовим числом обертання $\Pi_{\infty,c}$ складається з єдиної виродженої точки $(0, c-1)$ у випадку $c < 1$ і дорівнює $\{(a, v) : 4av \leq (c-1)^2\} \cap \mathfrak{S}_c$ у випадку $c > 1$.

В роботі [11] доведено (для значень $v/(c-1) \in [0,1]$), що кожна з множин $\gamma_{r,c}$, де $r \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$ або $r = 1/k$, $1 \le k < \infty$, є графіком певної неперервної функції $a = \gamma_{r,c}(v)$. Ці функції впорядковані: $\gamma_{r_1,c}(v) > \gamma_{r_2,c}(v)$ для $r_1 > r_2$. Криві $a = \gamma_{1/k}(v)$, $1 \le k < \infty$, насправді навіть є алгебраїчними. Щоправда, чим більше k, тим складнішими виразами вони задаються.

Оператори $\mathcal{F}$ та $\mathcal{S}$ діють згідно з формулами

$$\mathcal{F}_c(a,v) = \left(\frac{v+1}{c-a}a, \frac{c-a}{v+1}v\right), \quad \mathcal{S}_c(a,v) = \left(\frac{1}{a}, \frac{v+1-c}{c}\right).$$

Безпосереднє обчислення переконує, що їхні якобіани зберігають знаки:

$$\det\frac{\partial\mathcal{F}_c(a,v)}{\partial(a,v)} = \frac{c+av}{(v+1)(c-a)} > 0 \quad \text{в} \quad \mathfrak{S}_c, \quad \det\frac{\partial\mathcal{S}_c(a,v)}{\partial(a,v)} = -\frac{1}{ca^2} < 0 \quad \text{в} \quad \dot{\mathfrak{P}}_c. \tag{7}$$

Ця важлива властивість дозволяє визначати образи даних областей під дією цих операторів шляхом визначення лише образів їхніх меж і стверджувати, що обмежені на ці області відображення є бієктивними, якщо це відомо для меж.

Ренорм-оператор діє [10, 11] відповідно до формули

$$\mathcal{R}_c(a,v) = \left(-\frac{1}{a}F^k_{a,v,c}(-1), \frac{1}{c}\left(1 - vF^k_{a,v,c}(-1)\right) - 1\right), \quad (a,v) \in \Pi_{k,c}, \quad 1 \le k < \infty.$$

Зокрема, маємо $F^k_{a,v,c}(-1) = 0$ для $(a,v) \in \gamma_{1/k,c}$, отже,

$$\mathcal{R}_c\left(\bigcup_{1\le k<\infty}\gamma_{1/k,c}\right) = \left\{\left(0, \frac{1}{c} - 1\right)\right\},$$

що є обґрунтуванням нашої домовленості щодо виродженої точки $(0, c-1, c) \in \mathfrak{S}_c$.

Отже, дію оператора $\mathcal{R}$ на сім'ї (5) слід уявляти собі як два оператори $\mathcal{R}_c$ та $\mathcal{R}_{1/c}$, що діють почергово з $\mathfrak{S}_c$ в $\mathfrak{S}_{1/c}$ та назад згідно з наведеною формулою. Їхня композиція $\mathcal{R}_{1/c} \circ \mathcal{R}_c = \mathcal{R}^2$ відображає двічі ренормалізовні точки з $\mathfrak{S}_c$ до $\mathfrak{S}_c$, отже, $(\mathfrak{S}_c; \mathcal{R}^2)$ є динамічною системою зі втратою міри.

4.2. Абсорбуючі області. Нехай $\mathfrak{D}_c = \{(a,v) : 1/2 \le v/(c-1) \le 1, c(c-v-1)/v \le a \le c\} \subset \mathfrak{S}_c$. Наступне твердження показує, що ці множини *абсорбують* всі нескінченні траєкторії в динамічній системі $(\mathfrak{S}_c; \mathcal{R}^2)$.

Твердження 1. *Для кожного* $0 < c \ne 1$ *маємо* $\mathcal{R}_c(\mathfrak{D}_c\backslash\Pi_{\infty,c}) \subset \mathfrak{D}_{1/c}$. *Кожна траєкторія оператора* $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}_{1/c}\circ\mathcal{R}_c$ *в* $\mathfrak{R}_c$ *зрештою потрапляє до множини* $\mathfrak{D}_c$, *після чого залишається там назавжди.*

Доведення. У [11] аналогічне твердження доведено для множин $\Phi_c = \{(a,v) \in \mathfrak{S}_c : 0 \le v/(c-1) \le 1\}$. Оскільки $\mathfrak{D}_c \subset \Phi_c$, то доведення включення $\mathcal{R}_c(\Phi_c) \subset \mathfrak{D}_{1/c}$ доведе дане твердження.

Безпосередня перевірка показує, що $\mathcal{F}_c(\Phi_c \cap \mathfrak{S}_c) = \{(a,v) \in \mathfrak{P}_c : 0 \le v/(c-1) \le 1, a \le c(c-v-1)/v\}$, і перетин цієї множини з $\mathfrak{S}_c$ включається до Φ_c. Тому для $1 \le k < \infty$

маємо $\mathcal{F}_c^k(\dot{\Pi}_{k,c}) \subset \mathcal{F}_c(\Phi_c \cap \mathfrak{S}_c) \cap \Pi_{0,c} = \{(a,v) : 0 \le v/(c-1) \le 1, c < a \le c(c-v-1)/v\} = \{(a,v) : 0 \le v/(c-1) \le 1/2, c < a \le c(c-v-1)/v\}$. Також легко обчислити, що $\mathcal{S}_c(\{(a,v) : 0 \le v/(c-1) \le 1/2, c \le a \le c(c-v-1)/v\}) = \mathfrak{D}_{1/c} \setminus \{(0, 1/c-1)\}$, тому $\mathcal{R}_c(a,v) = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}^k(a,v) \in \mathfrak{D}_{1/c}$ для $(a,v) \in \dot{\Pi}_{k,c}$, $1 \le k < \infty$. А для $(a,v) \in \bigcup_{1 \le k < \infty} \gamma_{1/k,c}$ ми вже показали вище, що $\mathcal{R}_c(a,v) = (0, 1/c-1) \in \mathfrak{D}_{1/c}$.

Твердження доведено.

З доведення твердження 1 легко вивести, що $\mathcal{R}_{1/c} \circ \mathcal{R}_c(\mathfrak{D}_c \cup \mathfrak{R}_c) \subset \dot{\mathfrak{D}}_c$, де $\dot{\mathfrak{D}}_c$ — внутрішність множини $\mathfrak{D}_c$. Отже, насправді кожна траєкторія оператора $\mathcal{R}_{1/c} \circ \mathcal{R}_c$ в $\mathfrak{R}_c$ зрештою потрапляє до $\dot{\mathfrak{D}}_c$, де залишається назавжди. Ми незабаром ще більше звузимо абсорбуючі множини (див. нижче твердження 3).

Нами було показано, що після певного перехідного періоду вся динаміка ренормалізацій даної дробово-лінійної сім'ї відбувається всередині двох множин трикутної форми $\mathfrak{D}_c$ та $\mathfrak{D}_{1/c}$ під почерговою дією відображень $\mathcal{R}_c$ та $\mathcal{R}_{1/c}$ відповідно. В наступному підпункті ми віднайдемо дивовижну симетрію в їхній дії, яка і приводить до виникнення гіперболічної підкови.

4.3. Симетричні властивості ренорм-оператора. На області $\Psi_c = \{(a,v) : a > 0, 0 < v/(c-1) < 1\}$ розглянемо відображення

$$\mathcal{T}_c(a,v) = \left(\frac{av}{c-1-v}, c-1-v \right), \quad \det \frac{\partial \mathcal{T}_c(a,v)}{\partial(a,v)} = \frac{v}{v-c+1} < 0.$$

Очевидно, $\mathcal{T}_c$ на Ψ_c є інволюцією, тобто $\mathcal{T}_c^2 = \mathrm{Id}$.

Зауважимо, що $\mathcal{T}_c$ відображає область $\Psi_c \cap \mathfrak{P}_c$ на себе (ця область відрізняється від області Ψ_c лише у випадку $c > 1$). Крок Фарея $\mathcal{F}$ на $\Psi_c \cap \mathfrak{S}_c$ є ін'єктивним, і безпосередні обчислення показують, що на множині $\mathcal{T}_c(\Psi_c \cap \mathfrak{S}_c) = \mathcal{F}_c(\Psi_c \cap \mathfrak{S}_c) = \{(a,v) \in \mathfrak{P}_c : a < c(c-1-v)/v\}$ виконується рівність

$$\mathcal{F}_c^{-1} = \mathcal{T}_c \circ \mathcal{F}_c \circ \mathcal{T}_c. \tag{8}$$

Відповідно до розбиття області $\Psi_c \cap \mathfrak{P}_c$ на послідовність областей $\Psi_c \cap \dot{\Pi}_{k,c}$, $0 \le k \le \infty$, і межових дуг $\Psi_c \cap \gamma_{1/k,c}$, $1 \le k \le \infty$, інволюція $\mathcal{T}_c$ породжує розбиття області $\Psi_c \cap \mathfrak{P}_c$ на послідовність областей $\dot{\Omega}_{k,c} = \mathcal{T}_c(\Psi_c \cap \dot{\Pi}_{k,c})$, $0 \le k \le \infty$, і межових кривих $\beta_{1/k,c} = \mathcal{T}_c(\Psi_c \cap \gamma_{1/k,c})$, $1 \le k \le \infty$. (Множини $\Psi_c \cap \dot{\Pi}_{\infty,c}$, $\Psi_c \cap \gamma_{0,c}$, $\dot{\Omega}_{\infty,c}$ та $\beta_{0,c}$ у випадку $c < 1$ є порожніми.)

Лема 1. $\mathcal{F}_c(\dot{\Pi}_{k,c} \cap \dot{\Omega}_{l,c}) = \dot{\Pi}_{k-1,c} \cap \dot{\Omega}_{l+1,c}$ *для* $1 \le k < \infty$, $0 \le l < \infty$.

Доведення. Легко бачити, що $\mathcal{F}_c(\dot{\Pi}_{k,c} \cap \Psi_c) = \dot{\Pi}_{k-1,c} \cap \mathcal{F}_c(\Psi_c \cap \mathfrak{S}_c) = \dot{\Pi}_{k-1,c} \cap \Psi_c \setminus (\dot{\Omega}_{0,c} \cup \beta_{0,c})$, а з (8) випливає $\mathcal{F}_c(\dot{\Omega}_{k-1,c} \cap \mathfrak{S}_c) = \dot{\Omega}_{k,c}$, $1 \le k < \infty$.

Зауваження 1. Твердження 4, яке ми доведемо нижче, зокрема, засвідчує, що крива $\beta_{1,c} = \{(a,v) : a = c(c-v-1)/v, 0 < v/(c-1) < 1\}$ (вона включає в себе одну з меж множини $\mathfrak{D}_c$) перетинає кожну з кривих $\gamma_{1/k,c}$, $1 \le k < \infty$, в єдиній точці. З цього випливає, що всі області $\dot{\Pi}_{k,c} \cap \dot{\Omega}_{l,c}$, $1 \le k < \infty$, $0 \le l < \infty$, є чотирикутними комірками ґрат, що утворюють дві трансверсальні одна до одної послідовності простих кривих $\{\gamma_{1/k,c}\}_k$ та $\{\beta_{1/l,c}\}_l$.

Введемо ще декілька позначень. Легко безпосередньо перевірити, що $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{T}_c = \mathcal{T}_{1/c} \circ \circ \mathcal{S}_c$. Інволюція $\mathcal{T}_c$ відображає область $\dot{\mathfrak{D}}_c$ на $\mathcal{S}_{1/c}\dot{\mathfrak{D}}_{1/c}$, і композиція $\mathcal{I}_c = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{T}_c : \Psi_c \to \to \Psi_{1/c}$, що діє згідно з формулами

$$\mathcal{I}_c(a, v) = \left(\frac{c - 1 - v}{av}, -\frac{v}{c}\right), \quad \det \frac{\partial \mathcal{I}_c(a, v)}{\partial(a, v)} = \frac{c - 1 - v}{a^2 cv} > 0, \tag{9}$$

відображає $\dot{\mathfrak{D}}_c$ на $\dot{\mathfrak{D}}_{1/c}$ і також є інволюцією в сенсі $\mathcal{I}_{1/c} \circ \mathcal{I}_c = \mathrm{Id}$.

Область $\dot{\mathfrak{D}}_c$ розбивається на послідовність чотирикутних областей $\dot{\Pi}^+_{k,c} = \dot{\mathfrak{D}}_c \cap \dot{\Pi}_{k,c}$, $1 \le k \le \infty$, і межових дуг $\gamma^+_{1/k,c} = \dot{\mathfrak{D}}_c \cap \gamma_{1/k,c}$, $2 \le k \le \infty$. З іншого боку, вона ж виявляється розбитою на послідовність трансверсальних трикутних областей $\dot{\Pi}^-_{k,c} = = \mathcal{I}_{1/c}(\dot{\Pi}^+_{k,1/c}) = \mathcal{S}_{1/c}(\Pi_{0,c} \cap \dot{\Omega}_{k,c})$, $1 \le k \le \infty$, і межових дуг $\gamma^-_{1/k,c} = \mathcal{I}_{1/c}(\gamma^+_{1/k,1/c})$, $2 \le k \le \infty$. (Множини $\dot{\Pi}^+_{\infty,c}$ та $\gamma^+_{0,c}$ є порожніми у випадку $c < 1$, тоді як $\dot{\Pi}^-_{\infty,c}$ та $\gamma^-_{0,c}$ є порожніми у випадку $c > 1$.)

Взагалі кажучи, точка $(a, v) \in \dot{\mathfrak{D}}_{1/c}$ має нескінченно багато прообразів відносно дії $\mathcal{R}_c$ на $\mathfrak{S}_c$, але лише один із них належить $\dot{\mathfrak{D}}_c$. Та оскільки $\mathfrak{D}_c$ є абсорбуючою множиною, то саме цей прообраз нас найбільше цікавить. У цьому сенсі можна визначити однозначне обернене відображення для $\mathcal{R}_c$. Наступне твердження засвідчує, що обмеження ренорм-оператора $\mathcal{R}$ на (незв'язну) область $\bigcup_{1 \le k < \infty} \dot{\Pi}^+_{k,c}$ є оборотним відображенням, і ці два відображення — пряме та обернене — спряжені одне з одним щойно означеною інволюцією $\mathcal{I}_c$. Варто звернути увагу на те, що інволюція, яка спрягає $\mathcal{R}_c$ із $\mathcal{R}_c^{-1}$, виписується явно, ще й у дуже простій формі (9), і не залежить від висоти ренормалізації в конкретній точці (a, v), в той час як ці два оператори залежать від цієї висоти, і явні вирази для них стають все більш складними при збільшенні висоти.

Твердження 2. *Для кожного* $1 \le k < \infty$ *ренорм-оператор* $\mathcal{R}_c$ *відображає* $\dot{\Pi}^+_{k,c}$ *на* $\dot{\Pi}^-_{k,1/c}$ *взаємно однозначним чином; більш того,* $\mathcal{R}_c^{-1} = \mathcal{I}_{1/c} \circ \mathcal{R}_c \circ \mathcal{I}_{1/c}$, *де* $\mathcal{R}_c^{-1}$ *позначає єдиним чином визначений обернений до* $\mathcal{R}_c$ *оператор, що діє з* $\bigcup_{k \ge 1} \dot{\Pi}^-_{k,1/c} \subset \dot{\mathfrak{D}}_{1/c}$ *на* $\bigcup_{k \ge 1} \dot{\Pi}^+_{k,c} \subset \dot{\mathfrak{D}}_c$.

Доведення. Застосовуючи до області $\dot{\Pi}^+_{k,c} = \dot{\Pi}_{k,c} \cap \dot{\Omega}_{0,c}$ лему 1 k разів, одержуємо $\mathcal{F}_c^k(\dot{\Pi}^+_{k,c}) = \Pi_{0,c} \cap \dot{\Omega}_{k,c} = \mathcal{S}_{1/c}(\Pi^-_{k,1/c})$, отже, справді $\mathcal{R}_c(\dot{\Pi}^+_{k,c}) = \dot{\Pi}^-_{k,1/c}$ взаємно однозначним чином.

Спряження випливає з (8): маємо $\mathcal{R}_c^{-1} = (\mathcal{S}_c \circ \mathcal{F}_c^k)^{-1} = \mathcal{F}_c^{-k} \circ \mathcal{S}_{1/c} = (\mathcal{T}_c \circ \mathcal{F}_c^k \circ \mathcal{T}_c) \circ \mathcal{S}_{1/c} = = (\mathcal{T}_c \circ \mathcal{S}_{1/c}) \circ (\mathcal{S}_c \circ \mathcal{F}_c^k) \circ (\mathcal{T}_c \circ \mathcal{S}_{1/c}) = \mathcal{I}_{1/c} \circ \mathcal{R}_c \circ \mathcal{I}_{1/c}$ незалежно від $1 \le k < \infty$.

Твердження доведено.

Щойно знайдена симетрія в дії ренорм-оператора дозволяє означити для кожної точки $(a, v) \in \mathfrak{D}_c$ число обертання „у два боки". Покладемо $\rho(a, v, c) = \rho(F_{a,v,c}, G_{a,v,c})$. *Двобічним числом обертання* для $(a, v) \in \mathfrak{D}_c$ назвемо пару чисел $(\rho^-(a, v, c), \rho^+(a, v, c))$, де $\rho^+(a, v, c) = \rho(a, v, c)$, $\rho^-(a, v, c) = \rho(\mathcal{I}_c(a, v))$. Ці два числа логічно називати відповідно прямим і зворотним числами обертання. Зручно подавати двобічне число обертання у вигляді узагальненого розкладу в ланцюговий дріб — продовженої в обидва боки послідовності натуральних чисел $[\ldots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \ldots]$, де $[k_1, k_2, \ldots]$ — розклад для прямого числа ρ^+, а $[k_0, k_{-1}, k_{-2}, \ldots]$ — розклад для зворотного числа ρ^- (кожен з яких може бути нескінченним, скінченним або ж порожнім).

Тепер ми можемо посилити твердження 1 таким чином. Позначимо через $\check{\mathfrak{D}}_c$ область $\dot{\mathfrak{D}}_c \backslash \Pi^+_{\infty,c}$ для $c > 1$ і $\dot{\mathfrak{D}}_c \backslash \Pi^-_{\infty,c}$ для $c < 1$. Очевидно, $\mathcal{I}_c(\check{\mathfrak{D}}_c) = \check{\mathfrak{D}}_{1/c}$.

Твердження 3. *Для кожного* $0 < c \neq 1$ *маємо* $\mathcal{R}_c(\check{\mathfrak{D}}_c \cap \mathfrak{R}_c) \subset \check{\mathfrak{D}}_{1/c}$. *Кожна траєкторія оператора* $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}_{1/c} \circ \mathcal{R}_c$ *в* $\mathfrak{R}_c$ *зрештою потрапляє до* $\check{\mathfrak{D}}_c$, *після чого залишається там назавжди.*

Доведення. Для $c > 1$ маємо $\check{\mathfrak{D}}_c \cap \mathfrak{R}_c = \dot{\mathfrak{D}}_c \cap \mathfrak{R}_c$, отже, перше твердження випливає з твердження 2, а друге — з твердження 1.

Для $c < 1$ перше твердження випливає з твердження 1 внаслідок того, що $\mathfrak{R}_{1/c} \cap \cap \mathfrak{D}_c \subset \check{\mathfrak{D}}_{1/c}$. Оскільки $1/c > 1$, з доведеного в попередньому абзаці випливає, що будь-яка траєкторія $\mathcal{R}$ з початком у $\mathfrak{R}_c$ зрештою потрапляє до $\check{\mathfrak{D}}_{1/c}$, отож на наступному кроці вона потрапить до $\check{\mathfrak{D}}_c$.

4.4. Альтернативна система координат. Запровадимо нову систему координат на площині заміною

$$(x, y) = \pi_c(a, v) = \left(av, \frac{v + 1 - c}{ca}\right), \quad \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, v)} = \frac{v - (c-1)/2}{ac}. \tag{10}$$

Пояснимо геометричний сенс параметрів x та y. Якщо нормалізувати функцію $F_{a,v,c}$ з пари $(F_{a,v,c}, G_{a,v,c}) \in \dot{\mathfrak{P}}_c$ за допомогою лінійного перетворення координат, що переводить $F(0)$ в 1, то одержимо дробово-лінійну функцію

$$M_{x,c} : t \mapsto \frac{1 + ct}{1 - xt}.$$

Аналогічна нормалізація функції $G_{a,v,c}$ перетворює її на функцію $M_{y,1/c} : t \mapsto \dfrac{1 + t/c}{1 - yt}$. Таким чином, x та y можна розглядати як незалежні одна від одної міри нелінійності двох функцій, що складають пару з $\dot{\mathfrak{P}}_c$. Отож не є дивним, що крок Фарея $\mathcal{F}$ не змінює x, а перемикач $\mathcal{S}$ міняє x та y місцями (обидві властивості легко перевірити безпосередньо). Що насправді є дивним, так це те, що інволюція $\mathcal{T}_c$ на Ψ_c зберігає і x, і y! Оскільки перетворення π_c є ін'єктивним на кожній із множин $\{(a, v) \in \Psi_c, 0 < v/(c-1) < 1/2\}$ та $\{(a, v) \in \Psi_c, 1/2 < v/(c-1) < 1\}$ (що також легко перевірити з огляду на формулу (10) для якобіана), а $\mathcal{T}_c$ відображає ці дві множини одну на одну, то π_c на Ψ_c є дволистим, зі згином уздовж променя $v = (c-1)/2, a > 0$.

Нагадаємо, що нас цікавлять динамічні структури всередині абсорбуючої множини $\check{\mathfrak{D}}_c \subset \dot{\mathfrak{D}}_c$ (див. твердження 3). Легко переконатися, що π_c відображає $\dot{\mathfrak{D}}_c$ на прямокутний трикутник зі сторонами $x = 0, y = 0$ та $x + c^3 y = 0$ взаємно однозначним чином. Ми збережемо позначення для множин і відображень у межах області $\dot{\mathfrak{D}}_c$ в координатах (x, y), нехтуючи символом π_c і вказуючи на поточну систему координат шляхом явного запису аргументів відображення. Наприклад, запис $\mathcal{R}_c(x, y)$ означатиме $\pi_c(\mathcal{R}_c(\pi_c^{-1}(x, y)))$.

Лема 2. *Для кожної точки* $(x, y) \in \dot{\mathfrak{D}}_c$ *маємо* $\mathcal{I}_c(x, y) = (y, x)$ *і* $\mathcal{R}_c(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ *з* $\bar{y} = x$.

Доведення. Твердження стосовно $\mathcal{I}_c$ перевіряється безпосереднім обчисленням, а твердження стосовно $\mathcal{R}_c$ випливає зі згаданих вище властивостей операторів $\mathcal{F}$ та $\mathcal{S}$, які теж перевіряються безпосередньо.

Зауважимо, що множина $\gamma_{0,c} \cap \dot{\mathfrak{D}}_c$ для $c > 1$ в координатах (x, y) є відрізком прямої лінії $x = (c-1)^2/4$. Відповідно, область $\check{\mathfrak{D}}_c$ є прямокутним трикутником із сторонами $x + c^3 y = 0$, $x = (c-1)^2/4$ та $y = 0$ у випадку $c > 1$ і прямокутним трикутником із сторонами $x + c^3 y = 0$, $x = 0$ та $y = (c-1)^2/4$ (остання є множиною $\gamma_{0,c}^-$) у випадку $c < 1$. Ці два трикутники, звичайно ж, є симетричними відносно діагоналі, оскільки $\mathcal{I}_c$ є цією симетрією.

Лема 2 природно заохочує вивчати метричні властивості $\mathcal{R}_c$ на $\dot{\mathfrak{D}}_c$ у метриці

$$\mathbf{d}_c[(x, y), (\widetilde{x}, \widetilde{y})] = |x - \widetilde{x}| + |y - \widetilde{y}|.$$

Наступне твердження встановлює певні умови Ліпшиця для кривих $\gamma_{\rho,c}$ та $\gamma_{1/k,c}$ всередині $\check{\mathfrak{D}}_c$ в координатах (x, y).

Твердження 4. *Нехай дві точки $(x, y), (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \check{\mathfrak{D}}_c$ належать до однієї і тієї ж самої кривої з-посеред $\gamma_{\rho,c}$, $\rho \notin \mathbb{Q}$, та $\gamma_{1/k,c}$, $k \geq 2$. Тоді має місце нерівність $|\widetilde{x} - x| \leq c^3 |\widetilde{y} - y|$. Більш того, у випадку $c < 1$ має місце посилена нерівність $|\widetilde{x} - x| \leq B_c |\widetilde{y} - y|$, де $B_c < c^3$ не залежить від вибору точок.*

Доведення цього твердження є дуже технічним, тому його винесено в окремий підпункт (який можна пропустити при першому читанні статті).

4.5. Доведення умов Ліпшиця. Канонічне підняття. Для даної невиродженої пари $(F, G) \in \overline{\mathfrak{S}}$ розглянемо дійсну функцію $H_{F,G}$, яка дорівнює $\phi \circ F \circ \phi^{-1}$ на проміжку $[-1, \phi(F^{-1}(0)))$ і $1 + \phi \circ G \circ F \circ \phi^{-1}$ на проміжку $[\phi(F^{-1}(0)), 0]$, де ϕ — дробово-лінійна функція, яка переводить $-1, 0$ та $F(0)$ у $-1, 0$ та 1 відповідно. Легко бачити, що $H_{F,G}(0) = H_{F,G}(-1) + 1$, отже, цю функцію можна продовжити на всю дійсну пряму за співвідношенням $H_{F,G}(w + 1) \equiv H_{F,G}(w) + 1$, і вона буде підняттям певного гомеоморфізму кола. Ми називаємо цю $H_{F,G}$ *канонічним підняттям* для пари (F, G). Гомеоморфізм кола, який відповідає канонічному підняттю, позначатимемо тим самим символом $H_{F,G}$ і називатимемо гомеоморфізмом, *породженим* парою (F, G). Внаслідок комбінаторних властивостей траєкторій, що є такими самими для гомеоморфізму, як для відповідного жорсткого повороту, маємо рівність $\rho(H_{F,G}) = \rho(F, G)$.

Зауваження 2. Гомеоморфізм $H_{F,G}$, породжений парою з $\mathfrak{S}_c^{2+\alpha}$, має, взагалі кажучи, не один, а два злами, але вони належать до однієї й тієї ж самої траєкторії, і добуток їхніх розмірів дорівнює c.

Будемо розглядати сім'ю гомеоморфізмів кола, породжених парами з $\check{\mathfrak{D}}_c$, як неперервне відображення $H_c : \mathbb{T}^1 \times \check{\mathfrak{D}}_c \to \mathbb{T}^1$. В області $\check{\mathfrak{D}}_c$ можна вводити координати різним чином. У координатах (a, v) пари з $\check{\mathfrak{D}}_c$ записуються в раціональних виразах. В альтернативній системі координат (x, y) це не так, але вона є зручною для вивчення гіперболічних властивостей ренорм-оператора. Введемо ще дві змінні:

$$s = x - c^3 y, \quad \overline{s} = x + c^3 y.$$

Будь-які дві з-поміж координатних систем (a, v), (x, y), (a, s) та $(a, \overline{s})$ на $\check{\mathfrak{D}}_c$ є спряженими між собою за допомогою певної бієктивної алгебраїчної заміни координат. Ми будемо користуватися однією і тією ж самою літерою H_c для позначення відповідних функцій у різних координатних системах на $\check{\mathfrak{D}}_c$, вказуючи на поточну систему координат шляхом явного запису набору аргументів в $H_c(w; \cdot, \cdot)$.

Тривимірний многовид $\mathbb{T}^1 \times \check{\mathfrak{D}}_c$ розбивається на дві компоненти двома поверхнями зламу $w = -1$ та $w = \phi(F_{a,v,c}^{-1}(0))$, і функція H_c є $C^{2+\alpha}$-гладкою на замиканні кожної з цих компонент. В основній системі координат (a, v) маємо $\phi(z) = \dfrac{(a+1)z}{2a + (a-1)z}$, $\phi(F_{a,v,c}^{-1}(0)) = -(a+1)/(c+1+(c-a))$. Позначимо через $H_c^{(1)}$ та $H_c^{(2)}$ обмеження H_c на компоненти $w \in [-1, -(a+1)/(c+1+(c-a))]$ та $w \in [-(a+1)/(c+1+(c-a)), 0]$ відповідно. Обчислення[1] показують, що

$$H_c^{(1)}(w; a, v) = \phi\left(F_{a,v,c}(\phi^{-1}(w))\right) = \frac{A_1 + B_1 w}{C_1 + D_1 w},$$

$$H_c^{(2)}(w; a, v) = \phi\left(G_{a,v,c}(F_{a,v,c}(\phi^{-1}(w)))\right) = \frac{A_2 + B_2 w}{C_2 + D_2 w},$$

де $A_1 = (a+1)^2$, $B_1 = (a+1)(c+1+(c-a))$, $C_1 = (a+1)^2$, $D_1 = 1 - 4va - a^2 + 2ca - 2c$, $A_2 = (a+1)^2(c-a)$, $B_2 = (a+1)(c-a+a^2-3ca-2cva)$, $C_2 = (a+1)(-a^2+ac-a-2av-c)$, $D_2 = (a^3 + 2va^2 - 3ca^2 + 2cva^2 + 4c^2a - a - 2va - 2cva - c)$.

Лема 3. *В* $\check{\mathfrak{D}}_c$ *маємо* $\dfrac{\partial H_c^{(i)}(w; a, s)}{\partial a} > 0$, $i \in \{1, 2\}$.

Доведення. Оскільки $v = (c^3 - c^2 - sa)/(c^2 - a^2)$, після перетворень отримаємо $H_c^{(1)}(w; a, s) = \dfrac{A_1 + B_1 w}{C_1 + D_1 w}$, $H_c^{(2)}(w; a, s) = \dfrac{A_2 + B_2 w}{C_2 + D_2 w}$, де $A_1 = (c^2 - a^2)(a+1)^2$, $B_1 = (c^2-a^2)(a+1)(c+1+(c-a))$, $C_1 = (c^2-a^2)(a+1)^2$, $D_1 = -a^2 - 2c^3a + c^2 + 4c^2a + a^4 - a^2c^2 - 2a^3c + 2a^2c - 2c^3 + 4a^2s$; $A_2 = (a+1)^2(a+c)(c-a)^2$, $B_2 = (a+1)(3a^3c + a^2c^2 - 2c^4a - c^3a + a^3 - a^4 - c^2a + c^3 - a^2c + 2a^2cs)$, $C_2 = (a+1)(a^4 - a^3c + a^3 - a^2c^2 + a^2c - c^3a + c^2a - c^3 + 2a^2s)$, $D_2 = c^2a - 3c^3a^2 - 3a^3c^2 + 3a^4c - a^5 + 2c^4a + 2c^4a^2 + a^3 + a^2c - c^3 - 2a^2c^2 + 2a^2(c+1)(1-a)s$.

Похідна $\dfrac{\partial H_c^{(1)}(w; a, s)}{\partial a} = -4wP_1/Q_1^2$, де $P_1 = 2a(-a^4 + c^2 + c^3a + 2c^3 + a^3c)sw + c(-5c^3a^2 + a^2c + 3a^4c^2 - a^4c + c^4 - 4c^3a^3 - 2a^5 + c^3 - 2c^4a + a^2c^2 + 8a^3c^2 - c^4a^2)w + 2a(a+1)(a^3 + c^2)s + c(a+1)(2a^4 - 3a^3c^2 + 3a^3c - 5a^2c^2 + a^2c - c^3a + c^4a + c^3 + c^4)$ та $Q_1 = 4a^2sw + (-a^2 - 2c^3a + c^2 + 4c^2a + a^4 - a^2c^2 - 2a^3c + 2a^2c - 2c^3)w + (a+1)^2(c-a)(a+c)$. Зафіксуємо довільні $0 < c \neq 1$ та $a \in (0, c)$. Легко перевірити, що для точок всередині $\check{\mathfrak{D}}_c$ виконуються оцінки $s \in (a(c-1), c(c-1))$ у випадку $c > 1$ та $s \in \big(c(c-1), (a + (1-c)(c^2-a^2)/(4c))(c-1)\big)$ у випадку $c < 1$. Оскільки вираз $-4w/Q_1^2$ є додатним, а P_1 — лінійним відносно як s, так і w, то достатньо переконатися, що $P_1 > 0$ у чотирьох кутових точках: $w = -1$, $s = c(c-1)$, $w = -(a+1)/(c+1+(c-a))$, $s = c(c-1)$; $w = -1$, $s = a(c-1)$ у випадку $c > 1$; $w = -1$, $s = (a + (1-c)(c^2-a^2)/(4c))(c-1)$ у випадку $c < 1$ та $w = -(a+1)/(c+1+(c-a))$, $s = a(c-1)$ (ця точка за збігом обставин працює в обох випадках). Підстановка показує, що в цих точках вираз P_1 справді набуває додатних значень: $4a(c-a)^2c^2(a+1)^2$, $2(1+c)(a+1)^2(c-a)^2(a+c)c^2/(c+1+(c-a))$; $2a(c-a)^2(a+c)(2a^2(c-1) + a(2c-1) + c^2a + 2c^2)$, $a(c-a)^2(ac + (c-a) + c)(a+c)(2a^2c + 2(c-a)(c+a) + c^2a + 4ac + (c-a) + c^3)/(2c)$ та $2(c+1)(a+1)(c-a)^2(a+c)^2(ac + c - a)/(c+1+(c-a))$ відповідно.

[1]Необхідно зауважити, що перетворення складних раціональних виразів, що складають основу даного підпункту, автор виконував за допомогою комп'ютера. Зацікавленому читачеві варто підходити до них аналогічним чином, тобто скористатися якоюсь системою комп'ютерної алгебри.

Далі, $\dfrac{\partial H_c^{(2)}(w;a,s)}{\partial a} = 2aP_2/Q_2^2$, де $P_2 = (a+1)^2(c-a)(c(-2a^3 - a^2 + 3a^2c^2 - 4a^2c - 3ac + c^3a + 4c^2a + 2c^3) - (2a^3 + a^2 + a^2c + ac + c^2a + 2c^2)s) - 2(c+1)(a-1)(a+1)(c - a)(c(-2a^3 - a^2 + 3a^2c^2 - 4a^2c - 3ac + c^3a + 4c^2a + 2c^3) - (2a^3 + a^2 + a^2c + ac + c^2a + 2c^2)s)w + (c(10a^3c^2 - 6a^4c^2 + a^3 + 2a^2c + 2a^4c - 3a^5c^2 + 12c^4a^4 - 6a^5c^3 + 2a^2c^2 - 3a^5 - 3c^2a - 2a^3c^5 - 4c^6a + 4c^5 - 4c^3a + 2a^6 - 2c^3a^3 + 4ca^6 - 14a^4c^3 + 2c^4 - 10c^3a^2 + 4c^4a^2 + 17c^4a^3 - 2c^5a + c^4a - 4a^2c^5) + (-3a^5c - 2c^3 + a^3 + c^2a + 4c^5a - 4c^4a^2 + a^3c + 5c^3a + c^3a^3 - 2a^2c^2 + 2a^6 - 6a^5c^2 - 3a^5 - 6c^4a^3 + 3a^3c^2 - 4c^4 + 2c^4a + 4ca^6 + 6a^4c)s + 4a^3c(c+1)s^2)w^2$ та $Q_2 = -(a+1)(a^4 + a^3 - a^3c - a^2c^2 + a^2c - c^3a + c^2a - c^3) + (-3a^4c - 2c^4a + 2a^2c^2 - c^2a + 3a^3c^2 + c^3 - a^2c - a^3 - 2c^4a^2 + 3c^3a^2 + a^5)w - 2a^2(a+1)s + 2a^2(c+1)(a-1)sw$. Оскільки вираз $2a/Q_2^2$ є додатним, достатньо перевірити, що $P_2 > 0$. Зафіксуємо довільні $0 < c \neq 1$ та $a \in (0,c)$. Значення P_2 при $w = -(a+1)/(c+1+(c-a))$ є $4ac(c+1)(a+1)^2L/(c+1+(c-a))^2$, де $L = (s - c^2 + a - ac + a^2)(a^2c + a^2s - c^3a + c^2a - c^3)$; значення P_2 при $w = 0$ є $(a+1)^2R/(2a)$, де $R = 2a(c-a)(-(2a^3 + a^2 + a^2c + ac + c^2a + 2c^2)s - c(2a^3 - 3a^2c^2 + a^2 + 4a^2c + 3ac - c^3a - 4c^2a - 2c^3))$ — це в точності значення P_1 при $w = -1$, додатність якого доведено в попередньому абзаці. Зауважимо, що поліном L є квадратним тричленом відносно s. Похідна $\dfrac{dL}{ds}$ дорівнює $-(a+1)(c-a)(a^2+c^2)$ при $s = c(c-1)$ і $-(a^2+ca+c-a)(c-a)(a+c)$ при $s = a(c-1)$; оскільки обидва ці значення є від'ємними, то вершина параболи лежить поза межами відрізка, який нас цікавить. У його кінцях $s = c(c-1)$ та $s = a(c-1)$ маємо $L = (a+1)^2(c-a)^2c^2 > 0$ та $L = (c-a)^2(a+c)^2(ac+c-a) > 0$ відповідно. Отже, вирази L та R є додатними в кожній точці $(a,s) \in \check{\mathfrak{D}}_c$. Тепер зафіксуємо також s і помітимо, що вираз P_2/w^2 є квадратним тричленом відносно $1/w$, і його вершина $1/w = (1+c)(a-1)/(a+1)$ лежить поза проміжком $(-\infty, -(c+1+(c-a))/(a+1)]$, що нас цікавить.

Лему доведено.

Лема 4. *В* $\check{\mathfrak{D}}_c$ *маємо* $\dfrac{\partial H_c^{(i)}(w;a,\overline{s})}{\partial a} > 0$, $i \in \{1,2\}$.

Доведення. Оскільки $v = (c^3 - c^2 + \overline{s}a)/(c^2 + a^2)$, після перетворення маємо

$$H_c^{(1)}(w;a,\overline{s}) = \frac{A_1 + B_1w}{C_1 + D_1w}, \quad H_c^{(2)}(w;a,\overline{s}) = \frac{A_2 + B_2w}{C_2 + D_2w},$$

де $A_1 = (c^2+a^2)(a+1)^2$, $B_1 = (c^2+a^2)(a+1)(c+1+(c-a))$, $C_1 = (c^2+a^2)(a+1)^2$, $D_1 = a^2 - 2ac^3 + c^2 + 4c^2a - a^4 - a^2c^2 + 2ca^3 - 2ca^2 - 2c^3 - 4a^2\overline{s}$; $A_2 = (a+1)^2(c^2+a^2)(c-a)$, $B_2 = (a+1)(-3ca^3 + a^2c^2 - 2c^4a - c^3a - a^3 + a^4 - c^2a + c^3 + a^2c - 2ca^2\overline{s})$, $C_2 = (a+1)(-a^4 + a^3c - a^3 - a^2c^2 - a^2c - c^3a + c^2a - c^3 - 2a^2\overline{s})$, $D_2 = c^2a - 3c^3a^2 + 5a^3c^2 - 3a^4c + a^5 + 2c^4a + 2c^4a^2 - a^3 - a^2c - c^3 - 2a^2c^2 + 2a^2(c+1)(a-1)\overline{s}$.

Похідна $\dfrac{\partial H_c^{(1)}(w;a,\overline{s})}{\partial a} = -4wP_1/Q_1^2$, де $P_1 = 2a(-a^4 - c^2 - c^3a - 2c^3 + a^3c)\overline{s}w + c(c - a)(2a^4 + 3a^3c^2 - 3a^3c - a^2c^3 + 5a^2c^2 + ca - 2c^3a + c^2a + c^2 + c^3)w + 2a(a+1)(a^3 - c^2)\overline{s} + c(a+1)(2a^4 + 3a^3c^2 - 3a^3c + 5a^2c^2 - a^2c - c^3a + c^4a + c^3 + c^4)$ та $Q_1 = 4a^2\overline{s}w + (-a^2 + 2c^3a - c^2 - 4c^2a + a^4 + a^2c^2 - 2a^3c + 2a^2c + 2c^3)w - (a+1)^2(a^2+c^2)$. Зафіксуємо довільні $0 < c \neq 1$ та $a \in (0,c)$. Легко перевірити, що для точок всередині $\check{\mathfrak{D}}_c$ виконуються оцінки $\overline{s} \in (a(c-1), -c(c-1))$ у випадку $c < 1$ та $\overline{s} \in (-(c+1)(c-1)/2, a(c-1))$ у випадку $c > 1$. Оскільки вираз $-4w/Q_1^2$ є додатним, а P_1 — лінійним відносно як $\overline{s}$, так і w, то достатньо переконатися, що $P_1 > 0$ у чотирьох кутових точках: $w = -1$, $\overline{s} = a(c-1)$;

$w = -(a+1)/(c+1+(c-a)), \overline{s} = a(c-1); w = -1, \overline{s} = -c(c-1)$ у випадку $c < 1$; $w = -1$, $\overline{s} = -(c+1)(c-1)/2$ у випадку $c > 1$ і $w = -(a+1)/(c+1+(c-a)), \overline{s} = -c(c-1)$ (ця точка за збігом обставин працює в обох випадках). Підстановка показує, що в цих точках вираз P_1 справді набуває додатних значень: $2a(a^2+c^2)(2a^3c+2a^2c+(2a^2+c^2a+a+2c^2)(c-a))$; $2(c+1)(a+1)(a^2+c^2)^2(ac+c-a)/(c+1+(c-a))$; $4ac((ac^2+a^2c^2+a^4+a^3)(1-c)+a^2(c-a)^2+c(c^2-a^2)+2a^2c^2(a+1))$; $a(2a^4c+a^4c^2+c^3+a^3+2a^4+3a^2c^3+a^3c^3+3c^3a+a^3c+c^4a+(2+a)c(c-a)^4+c(c+a^4+4ca+a^2c)(c-a))$ та $2(c+1)(a+1)(a^2+c^2)c(2a^2+(a+1)c(c-a))$ відповідно.

Далі, $\dfrac{\partial H_c^{(2)}(w;a,\overline{s})}{\partial a} = 2aP_2/Q_2^2$, де $P_2 = (a+1)^2(c(2a^4-4ca^3+a^3+3a^3c^2-2ca^2-2a^2c^3+8a^2c^2+3c^2a+ac^4-4ac^3+2c^4)+(2a^4+a^3-ca^3-c^2a+ac^3+2c^3)\overline{s}) - 2(1+c)(a-1)(a+1)(c(2a^4-4ca^3+a^3+3a^3c^2-2ca^2-2a^2c^3+8a^2c^2+3c^2a+ac^4-4ac^3+2c^4)+(2a^4+a^3-ca^3-c^2a+ac^3+2c^3)\overline{s})w+(c(-4a^2c^4-19a^3c^4-11ac^4+3c^2a+a^3-2a^2c^2+2ac^3+2ca^3-2ca^2-3a^5-14a^3c^2+10ca^4+14a^2c^3+6a^4c^2-6ca^5+2a^6+2c^4+6a^3c^5-9c^2a^5-2c^5a+12a^2c^5+14a^4c^3+6a^5c^3-12a^4c^4+4ca^6+4c^5-4c^6a)+(7a^3c^3+2a^2c^2-2c^4a+4a^2c^4+6a^3c^4+a^3+2a^6+a^3c^2-6c^2a^5-5c^3a+2c^3-c^2a-4c^5a+4c^4-3a^5+4ca^6+a^3c+6a^4c-3a^5c)\overline{s}+4a^3c(c+1)\overline{s}^2)w^2$ та $Q_2 = -(a+1)(a^4-ca^3+a^3+a^2c^2+ca^2+ac^3-c^2a+c^3)+(2ac^4+2a^2c^4-3ca^4-ca^2-3a^2c^3+c^2a-2a^2c^2-a^3+5a^3c^2+a^5-c^3)w-2a^2(a+1)\overline{s}+2a^2(1+c)(a-1)\overline{s}w$. Оскільки вираз $2a/Q_2^2$ є додатним, достатньо перевірити, що $P_2 > 0$. Зафіксуємо довільні $0 < c \neq 1$ та $a \in (0,c)$. Значення P_2 при $w = -(a+1)/(c+1+(c-a))$ є $4ac(c+1)(a+1)^2L/(c+1+(c-a))^2$, де $L = (\overline{s}+c^2+a-ac+a^2)(a^2\overline{s}+c^3-c^2a+ac^3+ca^2)$; значення P_2 при $w = 0$ є $(a+1)^2R/(2a)$, де $R = 2a(c(-4ac^3+2c^4-2a^2c^3+3a^3c^2-2a^2c^1+ca^2+3ac^2+8a^2c^2-4a^3c^1+2a^4+c^4a)+(a^3-c^2a+ac^3-ca^3+2a^4+2c^3)\overline{s})$ — це в точності значення P_1 при $w = -1$, додатність якого доведено в попередньому абзаці. Зауважимо, що поліном L є квадратним тричленом відносно s. Похідна $\dfrac{dL}{d\overline{s}}$ дорівнює $(ac+c-a+a^2)(a^2+c^2)$ при $\overline{s} = a(c-1)$ і $3ca^2+a^3+a(c+a)(c-a)^2+c^2(c-a)$ при $\overline{s} = -c(c-1)$; оскільки обидва ці значення є від'ємними, то вершина параболи лежить поза межами відрізка, який нас цікавить. У його кінцях $\overline{s} = a(c-1)$, $\overline{s} = -c(c-1)$ при $c < 1$ і $\overline{s} = -(c+1)(c-1)/2$ при $c > 1$. Вираз L справді набуває додатних значень $(a^2+c^2)^2(ac+c-a)$, $(c+a(1-c)+a^2)(a^2(1-c)+a^2+c(c-a)+c^2a)$ і $((a+1)^2+(a+c)^2)(2c^2(c-a)+ac^2(c-a)+a^2+ac^3+2ca^2)/4$ відповідно. Отже, вирази L та R є додатними в кожній точці $(a,\overline{s}) \in \check{\mathfrak{D}}_c$. Тепер зафіксуємо також $\overline{s}$ і зауважимо, що вираз P_2/w^2 є знову ж таки квадратним тричленом відносно $1/w$. Його вершина $1/w = (1+c)(a-1)/(a+1)$ лежить поза проміжком $(-\infty, -(c+1+(c-a))/(a+1)]$, який нас цікавить.

Лему доведено.

Наступним кроком встановлюємо монотонність функції $H_c(w;\cdot,\cdot) : \check{\mathfrak{D}}_c \to \mathbb{T}^1$ для кожного $w \in \mathbb{T}^1$ уздовж певних одновимірних многовидів, які в координатах (x,y) є відрізками прямих. (Зауважимо, що цілком коректно говорити про функцію із значеннями на колі, що вона є монотонною, якщо відомо, що вона є неперервною, а для H_c це так.)

Лема 5. *Для кожного $w \in \mathbb{T}^1$ функція $H_c(w;\cdot,\cdot)$ строго зростає відносно a в області $\check{\mathfrak{D}}_c$ уздовж кожної прямої $s = \mathrm{const}$ та уздовж кожної прямої $\overline{s} = \mathrm{const}$.*

Доведення. Змінна точка зламу H_c визначається співвідношенням $w^{\mathrm{br}} = -(a+1)/(c+1+(c-a)) = (H_c^{(1)})^{(-1)}(0)$. Оскільки $\dfrac{\partial H_c^{(1)}(w;a,*)}{\partial a} > 0$ внаслідок лем 3 та 4 (тут зірочка позначає s або $\overline{s}$), то для будь-яких двох достатньо близьких між собою значень

$0 < a_1 < a_2 < c$ відповідні точки зламу впорядковані протилежним чином: $w_1^{\mathrm{br}} > w_2^{\mathrm{br}}$. Отже, $H_c^{(1)}(w; a_1, *) < H_c^{(1)}(w; a_2, *)$ для $w \in [-1, w_2^{\mathrm{br}}]$, $H_c^{(2)}(w; a_1, *) < H_c^{(2)}(w; a_2, *)$ для $w \in [w_1^{\mathrm{br}}, 0]$ і $H_c^{(1)}(w; a_1, *) < 1 < H_c^{(2)}(w; a_2, *)$ для $w \in (w_2^{\mathrm{br}}, w_1^{\mathrm{br}})$.

Лему доведено.

Лема 6. *Уздовж кожної прямої* $s = \mathrm{const}$ *та уздовж кожної прямої* $\overline{s} = \mathrm{const}$ *в* $\check{\mathfrak{D}}_c$ *функція* $H_c(w; \cdot, \cdot)$ *для кожного* $w \in \mathbb{T}^1$ *строго зростає (спадає) відносно* x *у випадку* $c > 1$ $(c < 1)$.

Доведення. У випадку $c > 1$ легко перевірити, що $s \in (a(c-1), c(c-1))$ в $\dot{\mathfrak{D}}_c$. Оскільки $x = a(c^2(c-1) - as)/(c^2 - a^2)$, то для фіксованого s маємо $\dfrac{\partial x(a,s)}{\partial a} = c^2((c-1)(c^2 + a^2) - 2as)/(c^2 - a^2)^2 > (c-1)/(c(c+a)^2) > 0$. У випадку $c < 1$ аналогічно отримуємо $\dfrac{\partial x(a,s)}{\partial a} < (c-1)/(c(c+a)^2) < 0$.

У випадку $c > 1$ легко перевірити, що $\overline{s} \in (-c(c-1)(c-a)/(c+a), a(c-1))$ в $\dot{\mathfrak{D}}_c$. Оскільки $x = a(c^2(c-1) + a\overline{s})/(c^2 + a^2)$, то для фіксованого маємо $\dfrac{\partial x(a,\overline{s})}{\partial a} = c^2(2a\overline{s} + (c-1)(c-a)(c+a))/(c^2+a^2)^2 > c^2(c-1)(c-a)/((c^2+a^2)(c+a)) > 0$. У випадку $c < 1$ аналогічно отримуємо $\dfrac{\partial x(a,\overline{s})}{\partial a} < c^2(c-1)(c-a)/((c^2+a^2)(c+a)) < 0$.

Результат випливає з леми 5.

Доведення твердження 4. Перша частина твердження є безпосереднім наслідком леми 6. Дійсно (в [11] цей ефект детально пояснюється), якщо для двох пар з $\check{\mathfrak{D}}_c$ різниця між їхніми підняттями (зокрема, канонічними підняттями) є достатньо малою, але зберігає свій знак на всій прямій, то ці пари не можуть ані мати одне й те ж саме ірраціональне число обертання, ані належати до однієї й тієї ж множини $\gamma_{1/k,c}$.

Посилена нерівність у випадку $c < 1$ є наслідком наступного факту [11]: усі точки, які лежать в області $\dot{\mathfrak{D}}_c$ в певному околі її межі $\gamma_{1,c}$, мають число обертання 1. Інакше кажучи, з тієї умови, що число обертання є ірраціональним або рівним $1/k$, $k \geq 2$, у випадку $c < 1$ випливає, що вираз $c - a > 0$ є відділеним від нуля рівномірно в $\check{\mathfrak{D}}_c$. Якщо прослідкувати за всіма доведеннями у цьому підпункті, маючи на увазі цей факт, то неважко переконатися, що у випадку $c < 1$ похідні $H_c^{(i)}(w; x, y)$, $i = 1, 2$, є від'ємними не лише уздовж векторів $\overline{(1, c^{-3})}$ та $\overline{(1, -c^{-3})}$ (що фактично доведено в лемі 6), а й уздовж векторів $\overline{(1, (1+\varepsilon_c)c^{-3})}$ та $\overline{(1, -(1+\varepsilon_c)c^{-3})}$ для достатньо малого $\varepsilon_c > 0$. Отже, функція $H_c(w; \cdot, \cdot)$ строго спадає відносно x уздовж кожної прямої $x - B_c y = \mathrm{const}$ і уздовж кожної прямої $x + B_c y = \mathrm{const}$, де $B_c = c^3/(1+\varepsilon_c) \in (0, c^3)$.

Твердження доведено.

4.6. Гіперболічність. Перетворення $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}_{1/c} \circ \mathcal{R}_c$ області $\check{\mathfrak{D}}_c$ виявляється дійсно гіперболічним у метриці $\mathbf{d}_c$. А саме, воно стискає область уздовж сім'ї кривих $\{\gamma_{\rho,c}\}$ і розтягує її уздовж трансверсальної сім'ї кривих $\mathcal{I}_{1/c}(\{\gamma_{\rho,1/c}\})$.

Теорема. *Для кожного* $0 < c \neq 1$ *існує така константа* $\mu_c \in (0,1)$, *що для будь-яких двох точок* $(a,v), (\widetilde{a}, \widetilde{v}) \in \check{\mathfrak{D}}_c$ *з одним і тим самим раціональним числом обертання* $\rho(a,v,c) = \rho(\widetilde{a}, \widetilde{v}, c) \notin \mathbb{Q}$ *виконується нерівність*

$$\mathbf{d}_c[\mathcal{R}^2(a,v), \mathcal{R}^2(\widetilde{a}, \widetilde{v})] \leq \mu_c \, \mathbf{d}_c[(a,v), (\widetilde{a}, \widetilde{v})].$$

Доведення. Розглянемо B_c з твердження 4 у випадку $c < 1$ і покладемо $B_c = c^3$ у випадку $c > 1$. Позначимо $(x_0, y_0) = \pi_c(a, v)$, $(x_1, y_1) = \mathcal{R}_c(x_0, y_0)$, $(x_2, y_2) = \mathcal{R}_{1/c}(x_1, y_1)$, і $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) = \pi_c(\widetilde{a}, \widetilde{v})$, $(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1) = \mathcal{R}_c(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$, $(\widetilde{x}_2, \widetilde{y}_2) = \mathcal{R}_{1/c}(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1)$. Внаслідок леми 2 і твердження 4 маємо

$$|x_2 - \widetilde{x}_2| \le B_c|y_2 - \widetilde{y}_2| = B_c|x_1 - \widetilde{x}_1| \le B_c B_{1/c}|y_1 - \widetilde{y}_1| = B_c B_{1/c}|x_0 - \widetilde{x}_0|,$$

$$|y_2 - \widetilde{y}_2| = |x_1 - \widetilde{x}_1| \le B_{1/c}|y_1 - \widetilde{y}_1| = B_{1/c}|x_0 - \widetilde{x}_0| \le B_{1/c}B_c|y_0 - \widetilde{y}_0|,$$

отже, $\mathbf{d}_c[(x_2, y_2), (\widetilde{x}_2, \widetilde{y}_2)] \le \mu_c\, \mathbf{d}_c[(x_0, y_0), (\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)]$, де $\mu_c = B_c B_{1/c} < 1$.

Теорему доведено.

Теорема стверджує, що для кожного $0 < c \neq 1$ ренорм-оператор $\mathcal{R}^2$ є рівномірно гіперболічним на $\check{\mathfrak{D}}_c$ в метриці $\mathbf{d}_c$. Криві $\{\gamma_{\rho,c}\}_{\rho \notin \mathbb{Q}}$ є його стійкими многовидами, а криві $\mathcal{I}_{1/c}\{\gamma_{\rho,1/c} \cap \dot{\mathfrak{D}}_{1/c}\}_{\rho \notin \mathbb{Q}}$ — нестійкими. Множина точок перетину першої сім'ї кривих із другою, тобто елементи множини $\mathfrak{A}_c = (\check{\mathfrak{D}}_c \cap \mathfrak{R}_c) \cap \mathcal{I}_{1/c}(\mathfrak{R}_{1/c} \cap \check{\mathfrak{D}}_{1/c})$, є в точності множиною точок, для яких розклад двобічного числа обертання в узагальнений ланцюговий дріб є нескінченним в обидва боки. Множина $\mathfrak{A}_c$ відображається ренорм-оператором на $\mathfrak{A}_{1/c}$ взаємно однозначним чином, і відповідний зсув вліво в узагальненому ланцюговому дробі для числа обертання реалізує класичну символічну динаміку на гіперболічній множині типу підкови Смейла. Власне підкова — замикання множини $\mathfrak{A}_c$ — є канторівською множиною з лебеговою мірою нуль.

1. *Теплинский А. Ю., Ханин К. М.* Жесткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями // Успехи мат. наук. — 2004. — **59**, № 2. — С. 137 – 160.
2. *Feigenbaum M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Statist. Phys. — 1978. — **19**, № 1. — P. 25 – 52.
3. *Sullivan D.* Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures // AMS Centen. Publ. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992. — Vol. 2. — P. 417 – 466.
4. *McMullen C. T.* Complex dynamics and renormalization. — Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1994.
5. *Lyubich M.* Feigenbaum – Coullet – Tresser universality and Milnor's hairiness conjecture // Ann. Math. — 1999. — **149**, № 2. — P. 319 – 420.
6. *Lanford O. E.* Renormalization group methods for critical circle mapping. Nonlinear evolution and chaotic phenomena // NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B: Phys. — 1988. — **176**. — P. 25 – 36.
7. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — **73**. — P. 747 – 817
8. *Yampolsky M.* The attractor of renormalization and rigidity of towers of critical circle maps // Communs Math. Phys. — 2001. — **218**, № 3. — P. 537 – 568,
9. *Khanin K., Teplinsky A.* Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities // Invent. math. — 2007. — **169**, № 1. — P. 193 – 218.
10. *Вул Е. Б., Ханин К. М.* Гомеоморфизмы окружности с особенностью типа излома // Успехи мат. наук. — 1990. — **45**, № 3. — P. 189 – 190.
11. *Khanin K., Khmelev. D.* Renormalizations and rigidity theory for circle homeomorphisms with singularities of break type // Communs Math. Phys. — 2003. — **235**, № 1. — P. 69 – 124.
12. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М.: Физматгиз, 1960. — 112 с.

Одержано 22.06.07