УДК 517.9

НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ОБМЕЖЕНИМИ НА $\mathbb{R}$ РОЗВ'ЯЗКАМИ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@USUWM.rv.ua

We obtain assertions about bounded solutions of nonlinear differential equations.

Приведены утверждения об ограниченных решениях нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Основний об'єкт дослідження. Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел і E — дійсний повний скінченновимірний евклідовий простір зі скалярним добутком (x, y). Норма в E вводиться за допомогою рівності $\|x\|_E = \sqrt{(x,x)}$.

Позначимо через $C^0(\mathbb{R}, E)$ банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою $\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E$, а через $C^1(\mathbb{R}, E)$ банахів простір функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, похідна кожної з яких є елементом простору $\in C^0(\mathbb{R}, E)$, з нормою $\|x\|_{C^1(\mathbb{R},E)} = \max\left\{\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\right\}$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $f : E \longrightarrow E$ — неперервний обмежений оператор і $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, та диференціальний оператор $L : C^1(\mathbb{R}, E) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається рівністю

$$(Lx)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Наведемо умови існування обмежених розв'язків диференціального рівняння (1) та оборотності оператора L.

2. Умови *A* і *B*. Будемо використовувати наступні умови.

Умова *A*. Існує самоспряжений додатний оператор $W : E \longrightarrow E$, для якого

$$\underline{\lim}_{\|x\|_E \to +\infty} \frac{(Wf(x), x)}{\|x\|_E} = +\infty \tag{3}$$

або

$$\overline{\lim}_{\|x\|_E \to +\infty} \frac{(Wf(x), x)}{\|x\|_E} = -\infty. \tag{4}$$

Умова *B*. Для оператора W, що задовольняє умову A, справджується нерівність

$$(Wf(x_1) - Wf(x_2), x_1 - x_2) \neq 0,$$

якщо $x_1 \neq x_2$.

Оскільки оператор W, що використовується в умовах A і B, самоспряжений і додатний, то на підставі скінченної розмірності простору E цей оператор є рівномірно додатним і його спектр $\sigma(W)$ є скінченною множиною додатних чисел. Нехай

$$\lambda_{\min}(W) = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(W)\}$$

і

$$\lambda_{\max}(W) = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(W)\}.$$

Як відомо [1, 2],

$$\lambda_{\min}(W)\|x\|_E^2 \leq (Wx, x) \leq \lambda_{\max}(W)\|x\|_E^2, \; x \in E, \tag{5}$$

і для норми $\|W\|$ оператора W справджується рівність

$$\|W\| = \lambda_{\max}(W). \tag{6}$$

3. Оцінка норми періодичного розв'язку. Вважатимемо, що виконується умова A.

Для кожного числа $a \geq 0$ розглянемо множину

$$\Omega_a(f) = \{x \in E : |(Wf(x), x)| \leq a\|x\|_E\},$$

що завдяки умові A є обмеженою, і величину

$$\omega_a(f) = \sup_{x \in \Omega_a(f)} \|x\|_E.$$

Очевидно, що для кожного $a \geq 0$

$$\omega_a(f) < +\infty.$$

Позначимо через $\mathcal{W}$ лінійний неперервний оператор, що діє в просторі $C^0(\mathbb{R}, E)$ і визначається рівністю

$$(\mathcal{W}x)(t) = Wx(t), \; t \in \mathbb{R},$$

де $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Лема 1. *Нехай виконується умова A і рівняння (1), де $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, має періодичний розв'язок $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$.*

Тоді

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\right)^{1/2} \omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f). \tag{7}$$

Доведення. Оскільки
$$\frac{dy(t)}{dt} + f(y(t)) \equiv h(t)$$
і завдяки самоспряженості та обмеженості оператора W
$$\left(W\frac{dy(t)}{dt}, y(t)\right) \equiv \frac{1}{2}\frac{d(Wy(t), y(t))}{dt},$$
то
$$\left(W\frac{dy(t)}{dt}, y(t)\right) + (Wf(y(t)), y(t)) \equiv (Wh(t), y(t))$$
і, отже,
$$\frac{1}{2}\frac{d(Wy(t), y(t))}{dt} + (Wf(y(t)), y(t)) \equiv (Wh(t), y(t)).$$
Внаслідок періодичності функції $(Wy(t), y(t))$ існує точка $t^* \in \mathbb{R}$, в якій ця функція досягає найбільше значення. Тоді на підставі диференційовності цієї функції
$$\left.\frac{d(Wy(t), y(t))}{dt}\right|_{t=t^*} = 0.$$
Тому
$$(Wf(y(t^*)), y(t^*)) = (Wh(t^*), y(t^*)).$$
Звідси з урахуванням нерівності Коші – Буняковського [3] отримуємо
$$|(Wf(y(t^*)), y(t^*))| \leq \|Wh(t^*)\|_E \|y(t^*)\|_E \leq \|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \|y(t^*)\|_E.$$
Тому
$$\|y(t^*)\|_E \leq \omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f). \tag{8}$$
Оскільки на підставі (5), (6) і (8)
$$\lambda_{\min}(W)\|y\|^2_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}(Wy(t), y(t)) = (Wy(t^*), y(t^*)) \leq$$
$$\leq \|W\|\|y(t^*)\|^2_E = \lambda_{\max}(W)\|y(t^*)\|^2_E \leq \lambda_{\max}(W)\left(\omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)\right)^2,$$
то
$$\|y\|^2_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\left(\omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)\right)^2.$$
Звідси випливає нерівність (7).

Лему 1 доведено.

4. Умови існування періодичних розв’язків. Позначимо через $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$ банахів простір T-періодичних елементів простору $C^0(\mathbb{R}, E)$ з нормою $\|\cdot\|_{C^0(\mathbb{R},E)}$.

Теорема 1. *Нехай:*
1) виконується умова A;
2) $h \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$.
Тоді диференціальне рівняння (1) має розв'язок $y \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$, *для якого*

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\right)^{1/2} \omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f).$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли виконується співвідношення (3). Виберемо довільні числа числа M_1 і M_2, для яких

$$M_2 > M_1 > \left(\frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\right)^{1/2} \omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f) \tag{9}$$

і

$$\inf_{\|x\|_E \geq M_1} (Wf(x), x) > \sup_{\|x\|_E \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\right)^{1/2} \omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)} (Wf(x), x). \tag{10}$$

Використаємо неперервний оператор $g : E \longrightarrow E$, що визначається рівністю

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } \|x\|_E \leq M_1, \\ F(x), & \text{якщо } M_1 < \|x\|_E \leq M_2, \\ kx, & \text{якщо } \|x\|_E > M_2, \end{cases} \tag{11}$$

де

$$F(x) = \frac{M_2 - \|x\|_E}{M_2 - M_1} f\left(\frac{M_1}{\|x\|_E} x\right) + \frac{\|x\|_E - M_1}{M_2 - M_1}\left(\frac{M_2 k}{\|x\|_E} x\right)$$

і

$$k = \max\left\{\sup_{M_1 \leq \|x\|_E \leq M_2} \frac{\|f(x)\|_E}{\|x\|_E}, 1\right\},$$

а також диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Легко перевірити, що рівняння (12) рівносильне інтегральному рівнянню

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)}(kx(s) - g(x(s)) + h(s))ds. \tag{13}$$

Розглянемо оператор

$$(\mathfrak{B}y)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)}(ky(s) - g(y(s)) + h(s))ds,$$

що діє із $C^0(\mathbb{R}, E)$ в $C^1(\mathbb{R}, E)$, і опуклу обмежену замкнену множину

$$B_R = \{x \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E) : \|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq R\},$$

де

$$R = \sup_{x \in E} \|kx - g(x)\|_E + \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}.$$

Множина B_R обмежена, оскільки

$$kx - g(x) = 0,$$

якщо

$$\|x\|_E \geq M_2,$$

і завдяки неперервності $kx - g(x)$ на E і скінченній розмірності простору E

$$\sup_{x \in E} \|kx - g(x)\|_E < +\infty.$$

Оператор $\mathfrak{B}$ має такі властивості:

1) є неперервним;

2) $\mathfrak{B}B_R \subset B_R \cap C^1(\mathbb{R}, E)$;

3) множина $\mathfrak{B}B_R$ передкомпактна у просторі $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$ (завдяки скінченній розмірності простору E та лемі Арцела – Асколі [3]).

Завдяки теоремі Шаудера про нерухому точку [4] оператор $\mathfrak{B}$ має нерухому точку $y^* \in B_R$. Ця точка є розв'язком рівнянь (13) і (12). За лемою 1

$$\|y^*\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\right)^{1/2} \omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(g).$$

Оскільки на підставі (9) – (11)

$$\omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(g) = \omega_{\|\mathcal{W}h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)$$

і тому

$$g(y^*(t)) \equiv f(y^*(t)),$$

то розв'язок y^* рівняння (12) також є розв'язком рівняння (1).

Отже, у випадку, коли виконується співвідношення (3), теорему доведено.

Випадок, коли виконується співвідношення (4), заміною t на $-t$ зводиться до розглянутого випадку.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай:*

1) виконується умова A;

2) $(Wf(x_1) - Wf(x_2), x_1 - x_2) \neq 0$, *якщо* $x_1 \neq x_2$.

Тоді для кожного $h \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$ диференціальне рівняння (1) має єдиний розв'язок $y \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$.

Доведення. Припустимо, що функції $y_i, y_2 \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, E)$ є розв'язками рівняння (1) і

$$y_1 \neq y_2. \tag{14}$$

Тоді

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + f(y_1(t)) \equiv \frac{dy_2(t)}{dt} + f(y_2(t))$$

і, отже,

$$\frac{dW(y_2(t) - y_1(t))}{dt} \equiv Wf(y_1(t)) - Wf(y_2(t)).$$

Звідси внаслідок самоспряженості оператора W випливає

$$\frac{1}{2}\frac{d(W(y_2(t) - y_1(t)), y_2(t) - y_1(t))}{dt} \equiv -(Wf(y_2(t)) - Wf(y_1(t)), y_2(t) - y_1(t)). \tag{15}$$

Оскільки функція $(W(y_2(t) - y_1(t)), y_2(t) - y_1(t))$ є диференційовною і T-періодичною, то існує точка $t^* \in \mathbb{R}$, в якій ця функція досягає найбільшого значення, причому

$$(W(y_2(t^*) - y_1(t^*)), y_2(t^*) - y_1(t^*)) > 0 \tag{16}$$

завдяки нерівності (14) та додатності оператора W і

$$\left.\frac{d(W(y_2(t) - y_1(t)), y_2(t) - y_1(t))}{dt}\right|_{t=t^*} = 0.$$

Тоді на підставі (15)

$$(Wf(y_2(t^*)) - Wf(y_1(t^*)), y_2(t^*) - y_1(t^*)) = 0.$$

Це співвідношення разом із (16) суперечить умові 2 теореми.

Отже, припущення, що рівняння (1) має більше, ніж один T-періодичний розв'язок, є хибним.

Теорему 2 доведено.

5. Локально збіжні послідовності. Будемо говорити, що послідовність функцій $x_k \in \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, локально збігається до функції $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ при $k \to +\infty$, і позначати

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^0(\mathbb{R},E)} x \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

якщо ця послідовність є обмеженою і

$$\lim_{k\to+\infty} \max_{|t|\le p} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0$$

для кожного $p \in \mathbb{N}$.

Аналогічно послідовність функцій $x_k \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, локально збігається до функції $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ при $k \to +\infty$:

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, C^1(\mathbb{R},E)} x \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

якщо

$$\sup_{k \geq 1} \|x_k\|_{C^1(\mathbb{R},E)} < +\infty$$

і для кожного $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \to +\infty} \max_{|t| \leq p} \left(\|x_k(t) - x(t)\|_E + \left\| \frac{dx_k(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} \right\|_E \right) = 0.$$

Далі розглянемо у просторах $C^0(\mathbb{R}, E)$ і $C^1(\mathbb{R}, E)$ замкнені кулі

$$S_r^i = \{x : \|x\|_{C^i(\mathbb{R},E)} \leq r\}, \ i = \overline{0,1}.$$

Важливим для подальшого є наступне твердження.

Лема 2. *Для кожної послідовності функцій $x_n \in S_r^0 \cap S_R^1$, $n \in \mathbb{N}$, де r і R — довільні додатні числа, існують такі строго зростаюча послідовність натуральних чисел n_k, $k \in \mathbb{N}$, і функція $x \in S_r^0$, що*

$$x_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.},\, C^0(\mathbb{R},E)} x \quad \textit{при} \quad k \to +\infty.$$

Доведення. З умов леми випливає, що функції $x_n = x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, рівномірно обмежені й одностайно неперервні на $\mathbb{R}$. Тому на підставі теореми Арцела – Асколі [3] та скінченної розмірності простору E існують такі підпослідовності

$$x_{n_{1,1}}, x_{n_{1,2}}, \ldots, x_{n_{1,p}}, \ldots,$$

$$x_{n_{2,1}}, x_{n_{2,2}}, \ldots, x_{n_{2,p}}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n_{m,1}}, x_{n_{m,2}}, \ldots, x_{n_{m,p}}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

послідовності $x_n, \ n \in \mathbb{N}$, що:

1) послідовності чисел $n_{l,p}, \ p \in \mathbb{N}$, є строго зростаючими для кожного $l \in \mathbb{N}$ і

$$\{n_{1,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \{n_{2,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \ldots \supset \{n_{m,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \ldots;$$

2) для кожного $m \in \mathbb{N}$ послідовність $x_{n_{m,p}}(t)$, $p \in \mathbb{N}$, є рівномірно збіжною на $[-m, m]$.

Тоді діагональна послідовність $x_{n_{1,1}}, x_{n_{2,2}}, \ldots, x_{n_{p,p}}, \ldots$ буде рівномірно збіжною на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і тому функція

$$x(t) = \lim_{p\to\infty} x_{n_{p,p}}(t),\ t \in \mathbb{R},$$

буде неперервною і, очевидно, $x \in S_r^0$. Звідси випливає, що

$$x_{n_{p,p}} \xrightarrow{\text{лок.},\, C^0(\mathbb{R},E)} x \quad \text{при} \quad p \to +\infty.$$

Лему 2 доведено.

Зазначимо, що у випадку $E = \mathbb{R}$ лему 2 наведено в [5].

6. c-Неперервні оператори. Оператор $F : C^i(\mathbb{R}, E) \longrightarrow C^j(\mathbb{R}, E)$, де $i, j \in \{0, 1\}$, називатимемо c-неперервним, якщо для довільних функції $x \in X$ і послідовності $x_k \in X$, $k \in \in \mathbb{N}$, для яких

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, X} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

випливає, що

$$Fx_k \xrightarrow{\text{лок.},\, Y} Fx \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поняття c-неперервного оператора введено до розгляду Е. Мухамадієвим [6]. За Мухамадієвим лінійний неперервний оператор $A : C^0(\mathbb{R}, E) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ називають c-неперервним, якщо для довільних числа $\varepsilon > 0$ і відрізка $[a, b]$ існують такі число $\delta > 0$ і відрізок $[c, d]$, що справджується нерівність

$$\|(Ax)(t)\|_E < \varepsilon \ \text{ для всіх } \ t \in [a, b]$$

для кожного елемента $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, для якого

$$\|x(t)\|_E < \delta \ \text{ для всіх } \ t \in [c, d]$$

і

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},E)} = 1.$$

Означення c-неперервного оператора, в якому використано локально збіжні послідовності, належить автору.

Прикладом c-неперервного оператора, що діє із $C^1(\mathbb{R}, E)$ в $C^0(\mathbb{R}, E)$, є, очевидно, оператор L, що визначається рівністю (2). Цей оператор, очевидно, також є неперервним.

Зазначимо, що не кожний нелінійний неперервний оператор є c-неперервним і не кожний c-неперервний оператор є неперервним [7].

7. Умови існування обмежених розв'язків. Твердження, аналогічне теоремі 1, також справджується у випадку $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Теорема 3. *Нехай:*

1) виконується умова A;

2) $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$.

Тоді рівняння (1) має хоча б один розв'язок $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$, *для якого*

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le \left(\frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\right)^{1/2} \omega_{\|Wh\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f) \tag{17}$$

і

$$\left\|\frac{dy}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le \sup_{\|x\|_E \le \left(\frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\right)^{1/2} \omega_{\|Wh\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f)} \|f(x)\|_E + \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)}. \tag{18}$$

Доведення. Нехай $(T_n)_{n\ge1}$ — довільна строго зростаюча послідовність додатних чисел, для якої

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty.$$

Використаємо такі елементи $h_n \in \mathcal{P}_{T_n}(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{N}$, щоб

$$\|h_n\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le \|h\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \tag{19}$$

і

$$h_n \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0(\mathbb{R},E)} h \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{20}$$

Елементи з такими властивостями існують завдяки умові 2. На підставі (19), умови 1 теореми 3 та теореми 1 існують такі функції $y_n \in \mathcal{P}_{T_n}(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{N}$, що

$$\frac{dy_n(t)}{dt} + f(y_n(t)) = h_n(t),\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

і

$$\|y_n\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \le \left(\frac{\lambda_{\max}(W)}{\lambda_{\min}(W)}\right)^{1/2} \omega_{\|Wh\|_{C^0(\mathbb{R},E)}}(f), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Завдяки неперервності оператора f, скінченній розмірності простору E та співвідношенням (19), (21) і (22)

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}} \left|\frac{dy_n(t)}{dt}\right| < +\infty.$$

Тому за лемою 2 (з урахуванням співвідношення (22)) для деякої строго зростаючої послідовності $(n_k)_{k\ge1}$ натуральних чисел та елемента $y \in C^0(\mathbb{R}, E)$

$$y_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0(\mathbb{R},E)} y \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{23}$$

Використаємо співвідношення

$$y_n(t) - y_n(0) + \int\limits_0^t f(y_n(s))ds = \int\limits_0^t h_n(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

що випливають із (21). Звідси на підставі (20), (23) та неперервності оператора f отримуємо

$$y(t) - y(0) + \int_0^t f(y(s))ds = \int_0^t h(s)ds,\ t \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Функції $\int_0^t f(y(s))ds$ і $\int_0^t h(s)ds$ є диференційовними, оскільки підінтегральні функції неперервні. Тому аналогічну властивість має функція $y(t)$ і на підставі (24)

$$\frac{dy(t)}{dt} + f(y(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Звідси, з обмеженості та неперервності функцій $f(y(t))$ і $h(t)$ випливає, що

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{dy(t)}{dt} \right| < +\infty.$$

Отже, $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Нерівність (17) випливає із (22), (23). Нерівність (18) випливає із (17), (25).

Теорему 3 доведено.

8. Умови єдиності обмежених розв'язків. Спочатку наведемо допоміжні твердження.

Лема 3. *Нехай:*

1) оператор $g : E \longrightarrow E$ є неперервним;

2) $(Wg(x_1) - Wg(x_2), x_1 - x_2) > 0,$ якщо $x_1 \neq x_2$ (тут W — оператор, що й в умові А).

Тоді для довільних чисел $r > 0$ і $R > 0, r < R,$ існує таке число $\varepsilon > 0,$ що

$$\inf_{\substack{r \le (W(x_1-x_2), x_1-x_2) \\ \|x_1\|_E \le R,\ \|x_2\|_E \le R}} (Wg(x_1) - Wg(x_2), x_1 - x_2) \ge \varepsilon.$$

Доведення. Припустимо, що лема є хибною. Тоді існують послідовності $(u_n)_{n\ge1}$ і $(v_n)_{n\ge1}$, для яких

$$\|u_n\|_E \le R,\ n \ge 1,$$

$$\|v_n\|_E \le R,\ n \ge 1,$$

$$(W(u_n - v_n), u_n - v_n) \ge r,\ n \ge 1,$$

і

$$\lim_{n\to+\infty} (Wg(u_n) - Wg(v_n), u_n - v_n) = 0. \tag{26}$$

Завдяки скінченній розмірності простору E та обмеженості послідовностей $(u_n)_{n\ge1}$ і $(v_n)_{n\ge1}$ існують строго зростаюча послідовність $(n_k)_{k\ge1}$ натуральних чисел та вектори

$u, v \in E$, для яких

$$\begin{aligned} &\|u\|_E \le R, \\ &\|v\|_E \le R, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = u, \\ &\lim_{k\to+\infty} v_{n_k} = v \end{aligned} \tag{28}$$

і

$$(W(u-v), u-v) \ge r.$$

Тому на підставі умови 1 та співвідношень (26) – (28)

$$(Wg(u) - Wg(v), u-v) = 0,$$

що суперечить умові 2 леми.

Отже, лема не є хибною.

Лему 3 доведено.

Аналогічним чином встановлюється наступна лема.

Лема 4. *Нехай:*

1) оператор $g : E \longrightarrow E$ є неперервним;

2) $(Wg(x_1) - Wg(x_2), x_1 - x_2) < 0$, якщо $x_1 \ne x_2$ (тут W — оператор, що й в умові A).

Тоді для довільних чисел $r > 0$ і $R > 0$, $r < R$, існує таке число $\varepsilon > 0$, що

$$\sup_{\substack{r \le (W(x_1-x_2), x_1-x_2) \\ \|x_1\|_E \le R,\ \|x_2\|_E \le R}} (Wg(x_1) - Wg(x_2), x_1 - x_2) \le -\varepsilon.$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови A і B.*

Тоді для кожного $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Доведення. Зазначимо, що завдяки теоремі 3 та умові A множина обмежених розв'язків рівняння (1) є непорожньою.

Припустимо, що функції $y_i, y_2 \in C^1(\mathbb{R}, E)$ є розв'язками рівняння (1) і

$$y_1 \ne y_2. \tag{29}$$

Тоді

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + f(y_1(t)) \equiv \frac{dy_2(t)}{dt} + f(y_2(t))$$

і, отже,

$$\frac{dW(y_2(t) - y_1(t))}{dt} \equiv Wf(y_1(t)) - Wf(y_2(t)).$$

Звідси на підставі самоспряженості та обмеженості оператора W випливає

$$\frac{d(W(y_2(t)-y_1(t)),y_2(t)-y_1(t))}{dt} \equiv -2(Wf(y_2(t))-Wf(y_1(t)),y_2(t)-y_1(t)). \tag{30}$$

Виберемо довільну точку $t^* \in \mathbb{R}$, для якої

$$(W(y_2(t^*)-y_1(t^*)),y_2(t^*)-y_1(t^*)) > 0. \tag{31}$$

Така точка існує на підставі нерівності (29) та додатності оператора W. Жодна з таких точок не може бути для функції $(W(y_2(t)-y_1(t)),y_2(t)-y_1(t))$ точкою екстремуму, бо тоді

$$\left.\frac{d(W(y_2(t)-y_1(t)),y_2(t)-y_1(t))}{dt}\right|_{t=t^*} = 0,$$

і тому на підставі (30)

$$(Wf(y_2(t^*))-Wf(y_1(t^*)),y_2(t^*)-y_1(t^*)) = 0,$$

що суперечить умові B.

Отже, якщо справджується співвідношення (31), то

$$\left.\frac{d(W(y_2(t)-y_1(t)),y_2(t)-y_1(t))}{dt}\right|_{t=t^*} \neq 0.$$

Тому функція $(W(y_2(t)-y_1(t)),y_2(t)-y_1(t))$ є строго зростаючою на $[t^*,+\infty)$ або строго спадною на $(-\infty,t^*]$. Тоді

$$(W(y_2(t)-y_1(t)),y_2(t)-y_1(t)) > (W(y_2(t^*)-y_1(t^*)),y_2(t^*)-y_1(t^*)) > 0 \tag{32}$$

для всіх $t > t^*$ або

$$(W(y_2(t)-y_1(t)),y_2(t)-y_1(t)) > (W(y_2(t^*)-y_1(t^*)),y_2(t^*)-y_1(t^*)) > 0 \tag{33}$$

для всіх $t < t^*$.

Використаємо числа

$$R = \max\{\|y_1\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \|y_2\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\}$$

і

$$r = (W(y_2(t^*)-y_1(t^*)),y_2(t^*)-y_1(t^*)).$$

У випадку виконання співвідношення (32) існує таке число $\varepsilon > 0$ (на підставі леми 3), що справджується нерівність

$$-2(Wf(y_2(t))-Wf(y_1(t)),y_2(t)-y_1(t)) \geq \varepsilon$$

для всіх $t \geq t^*$. Тоді завдяки (30) для всіх $t \geq t^*$

$$(W(y_2(t) - y_1(t)), y_2(t) - y_1(t)) \geq (W(y_2(t^*) - y_1(t^*)), y_2(t^*) - y_1(t^*)) + \varepsilon(t - t^*).$$

Це співвідношення суперечить тому, що

$$\max\{\|y_1\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \|y_2\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\} < +\infty.$$

До аналогічної суперечності приходимо у випадку виконання співвідношення (33) (тут потрібно використовувати лему 4).

Теорему 4 доведено.

9. Умови оборотності оператора L.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови A і B.*

Тоді оператор $L : C^1(\mathbb{R}, E) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}, E)$ має обернений обмежений неперервний і c-неперервний оператор.

Доведення. Оператор L має обернений оператор L^{-1} на підставі теореми 4.

Обернений оператор L^{-1} є обмеженим завдяки нерівностям (17), (18).

Покажемо c-неперервність цього оператора. Припустимо, що ця властивість для L^{-1} не виконується. Тоді існують елементи $h_n \in C^0(\mathbb{R}, E), y_n \in C^1(\mathbb{R}, E), n \in \mathbb{N}, h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$, відрізок $[a, b]$ і число $\varepsilon > 0$, для яких

$$\frac{dy(t)}{dt} + f(y(t)) = h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

$$\frac{dy_n(t)}{dt} + f(y_n(t)) = h_n(t),\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{35}$$

$$h_n \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0(\mathbb{R},E)} h \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{36}$$

і

$$\max_{t\in[a,b]} \left(\left| \frac{dy_n(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right| + |y_n(t) - y(t)| \right) \geq \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

Послідовність $(h_n)_{n\geq 1}$ є обмеженою (на підставі (36)). Тому завдяки обмеженості оператора L^{-1} послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ також є обмеженою (у просторі $C^1(\mathbb{R}, E)$). За лемою 2 існують функція $y^* \in C^0(\mathbb{R}, E)$ і строго зростаюча послідовність $(n_k)_{n\geq 1}$ натуральних чисел, для яких

$$y_{n_k} \xrightarrow{\text{лок.},\ C^0(\mathbb{R},E)} y^* \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{38}$$

Оскільки на підставі (35)

$$y_{n_k}(t) - y_{n_k}(0) + \int\limits_0^t f(y_{n_k}(s))ds = \int\limits_0^t h_{n_k}(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

то завдяки (36), (38), неперервності оператора f та скінченній розмірності простору E

$$y^*(t) - y^*(0) + \int_0^t f(y^*(s))ds = \int_0^t h(s)ds, \ t \in \mathbb{R}.$$

Звідси отримуємо співвідношення

$$\frac{dy^*(t)}{dt} + f(y^*(t)) = h(t), \ t \in \mathbb{R},$$

і включення $y^* \in C^1(\mathbb{R}, E)$, що суперечать оборотності оператора L^{-1}, оскільки завдяки співвідношенням (34) – (37) та неперервності відображення $f : E \longrightarrow E$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \max_{t \in [a,b]} |y_n(t) - y(t)| > 0$$

і тому

$$y^* \neq y.$$

Отже, оператор L^{-1} є c-неперервним.

Покажемо неперервність оператора L^{-1}. Припустимо, що ця властивість для оператора L^{-1} не виконується. Існують елементи $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $h_n \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $y_n \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{N}$, і число $\gamma > 0$, для яких справджуються співвідношення (34), (35),

$$\lim_{n \to +\infty} \|h_n - h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} = 0 \tag{39}$$

і

$$\|y_n - y\|_{C^1(\mathbb{R}, E)} \geq \gamma, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Послідовність $(h_n)_{n \geq 1}$ є обмеженою (на підставі (39)). Тому завдяки обмеженості оператора L^{-1} для деякого числа $R > 0$

$$\sup_{n \geq 1} \|y_n\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq R. \tag{41}$$

Будемо вважати, що також

$$\|y\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq R. \tag{42}$$

Завдяки співвідношенням (34), (35), (39) і (40) та неперервності відображення f існують такі число $r > 0$ і числова послідовність $(t_n)_{n \geq 1}$, що

$$\|y_n(t_n) - y(t_n)\|_E \geq r, \ n \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що виконується співвідношення (3). За лемою 3 існує число $\varepsilon > 0$, для якого

$$\inf_{\substack{r \leq (W(x_1 - x_2), x_1 - x_2) \\ \|x_1\|_E \leq R, \ \|x_2\|_E \leq R}} (Wf(x_1) - Wf(x_2), x_1 - x_2) \geq \varepsilon.$$

Виберемо натуральне число n^* так, щоб

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |(Wh_{n^*}(t) - Wh(t), y_{n^*}(t) - y(t))| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{43}$$

Таке число існує на підставі (39), (41) і (42).

Оскільки завдяки (34) і (35)

$$\frac{d(W(y_{n^*}(t) - y(t)), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt} + 2(Wf(y_{n^*}(t)) - Wf(y(t)), y_{n^*}(t) - y(t)) \equiv$$

$$\equiv 2(Wh_{n^*}(t) - Wh(t), y_{n^*}(t) - y(t)),$$

то на підставі (41) – (43)

$$\left.\frac{d(W(y_{n^*}(t) - y(t)), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt}\right|_{t=t_{n^*}} \le -\varepsilon.$$

Із цієї нерівності та неперервності функцій $y_{n^*}(t)$, $y(t)$, $h_{n^*}(t)$, $h(t)$ на $(-\infty, t_{n^*}]$ і відображення f на E випливає, що функція $(W(y_{n^*}(t) - y(t)), y_{n^*}(t) - y(t))$ є строго спадною на деякому проміжку $[T, t_{n^*}]$. Не існує числа $T < t_{n^*}$ такого, щоб

$$\left.\frac{d(W(y_{n^*}(t) - y(t)), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt}\right|_{t=T} = 0$$

і

$$\frac{d(W(y_{n^*}(t) - y(t)), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt} < 0$$

для всіх $t \in (T, t_{n^*}]$, оскільки тоді

$$\varepsilon \le (Wf(y_{n^*}(T)) - Wf(y(T)), y_{n^*}(T) - y(T)) =$$

$$= (Wh_{n^*}(T) - Wh(T), y_{n^*}(T) - y(T)) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

що неможливо. З наведених міркувань випливає, що $(W(y_{n^*}(t) - y(t)), y_{n^*}(t) - y(t))$ — строго спадна на проміжку $(-\infty, t_{n^*}]$ функція. Тоді

$$\frac{d(W(y_{n^*}(t) - y(t)), y_{n^*}(t) - y(t))}{dt} \le -\varepsilon$$

для всіх $t \le t_{n^*}$. Звідси випливає, що

$$(W(y_{n^*}(t) - y(t)), y_{n^*}(t) - y(t)) \ge (W(y_{n^*}(t_{n^*}) - y(t_{n^*})), y_{n^*}(t_{n^*}) - y(t_{n^*})) + \varepsilon|t - t_{n^*}|$$

для всіх $t \le t_{n^*}$. Це співвідношення суперечить тому, що

$$\max\{\|y_{n^*}\|_{C^0(\mathbb{R},E)}, \|y\|_{C^0(\mathbb{R},E)}\} \le R.$$

Отже, припущення, що оператор L^{-1} не є неперервним (у випадку виконання співвідношення (3)), є хибним.

Аналогічним чином встановлюється неперервність оператора L^{-1} у випадку виконання співвідношення (4).

Теорему 5 доведено.

Зауважимо, що результати цієї статті не випливають із відповідних результатів про обмежені розв'язки диференціальних рівнянь із монотонними нелінійностями [8]. Відображення f, що задовольняє умову A, може не належати ні класу монотонних відображень, ні класу дисипативних відображень.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1982. — 272 с.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
4. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с.
5. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 4. — С. 523 – 539.
6. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Неявні недиференційовні функції в теорії операторів. — Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2007. — 221 с.
8. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. — Минск: Наука и техника, 1986. — 200 с.

Одержано 17.04.07