УДК 517.9

ЗВ'ЯЗОК МІЖ ІНВАРІАНТНИМИ МНОЖИНАМИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ВІДПОВІДНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

А. М. Ткачук

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6

We study the relationship between invariant sets of systems of differential equations and the corresponding difference equations in terms of constant sign Lyapunov functions. For a system of differential equations, we obtain a converse result on existence of a positive definite function which has zeros that coincide with a given invariant manifold.

Досліджено зв'язок між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь у термінах знакосталих функцій Ляпунова. Для систем диференціальних рівнянь отримано обернений результат про існування додатно означеної функції Ляпунова, нулі якої збігаються з заданим інваріантним многовидом.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \tag{1}$$

та відповідну їй систему різницевих рівнянь

$$x_{n+1}^h = x_n^h + hX(x_n^h), \tag{2}$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$ — крок різницевого рівняння, $x_n^h = x_n^h(t_0 + nh)$, $x_0^h(t_0) = x_0$. Вектор-функцію $X(x)$ визначено при $x \in D$ (D — деяка область простору $\mathbb{R}^n$). Будемо вивчати зв'язок між інваріантними множинами систем (1) та (2).

Означення 1. *Множину $M \subset D$ назвемо інваріантною множиною системи (2), якщо вона має властивість: розв'язок $x_n^h(x_0)$ системи (2), що бере початок у точці $x_0 \in M$, залишається на M для довільного $n \in \mathbb{Z}$. Якщо $n \in \mathbb{Z}^+$, то множину M будемо називати додатно інваріантною множиною системи (2).*

Зв'язок між інваріантними множинами систем (1) та (2) можна вивчити в термінах знакосталих функцій Ляпунова. Подальші дослідження є продовженням роботи [1], в якій встановлено умови існування інваріантної множини для системи (2).

Нехай D_1 — обмежена область, що міститься в D з деяким своїм околом, $\overline{D}_1$ — замикання D_1.

Означення 2. *Функцію $V_h(x)$, визначену в $\overline{D}_1$, будемо називати знакосталою в D_1, якщо для всіх $x \in \overline{D_1}$ ненульові значення функції $V_h(x)$ мають один і той самий знак. Знакосталу в D_1 функцію $V_h(x)$ назвемо знаковизначеною в D_1, якщо множина її нулів є непорожньою і компактною в D_1.*

2. Основні результати. Нехай $\triangle V(x) = V(x + hX(x)) - V(x)$ та $V(x) \in \mathbb{C}^1(D_1)$. Наведена нижче теорема дає умови існування інваріантної множини системи (1) у термінах знакосталих функцій Ляпунова системи (2).

Теорема 1. *Якщо $V(x)$ — знаковизначена в D_1 функція, для якої $\triangle V(x)$ є знакосталою в D_1, то множина нулів N_0 :*

$$V(x) = 0, \quad x \in D_1, \tag{3}$$

є (додатно) інваріантною множиною відповідної системи диференціальних рівнянь (1), коли знаки $V(x)$ та $\triangle V(x)$ різні.

Доведення. Припустимо, що $V(x) \geq 0$, $\triangle V(x) \leq 0$, $x \in \overline{D}_1$. Покажемо, що похідна функції $V(x)$ в силу системи (1) не є додатною.

Оскільки $V(x) \in \mathbb{C}^1(D_1)$, то для неї існує похідна за довільним напрямком в будь-якій точці $x \in D_1$.

З того, що $\triangle V(x) \leq 0$, маємо

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(x + hX(x)) - V(x)}{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} X(x) \leq 0.$$

З [2, с. 68] отримуємо, що (3) є інваріантною множиною системи (1).

Тепер, на відміну від попереднього результату, де $V(x)$ не залежала від h, будемо вважати, що функція Ляпунова $V_h(x)$ залежить від кроку h різницевого рівняння.

Нехай для кожного $0 < h \leq h_0$ сім'я функцій $V_h(x)$ належить $\mathbb{C}^1(D_1)$ і є одностайно неперервною по x, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого $h \leq h_0$ виконується нерівність $\|V_h(x') - V_h(x'')\| < \varepsilon$ при $|x' - x''| < \delta$, x', $x'' \in D_1$.

Теорема 2. *Нехай $V_h(x)$ — знаковизначена в D_1 функція, для якої $\triangle V_h(x)$ є знакосталою в D_1, сім'я функцій $V_h(x)$ рівномірно збігається по x (при $h \to 0$) до $V(x) \in \mathbb{C}^1(D_1)$ та множина нулів $N_0(h)$:*

$$V_h(x) = 0, \quad x \in D_1, \tag{4}$$

рівномірно відокремлена по h від межі області ∂D_1, тобто

$$\exists h_0 > 0 \quad \exists \gamma > 0 \quad \forall h \leq h_0 : \rho(N_0(h), \partial D_1) > \gamma. \tag{5}$$

Тоді система (1) має інваріантну множину, якщо знаки $V_h(x)$ та $\triangle V_h(x)$ є різними.

Доведення. Припустимо, що $V_h(x) \geq 0$, $\triangle V_h(x) \leq 0$, $x \in \overline{D}_1$. Покажемо, що множина нулів функції $V(x)$ не є порожньою в D_1. Згідно з умовою теореми для довільного $h > 0$ існує $x \in D_1$ таке, що $V_h(x) = 0$. Оскільки D_1 є обмеженою, то з (5) випливає, що нулі всіх функцій $V_h(x)$ належать деякому компакту з D_1. Тому існує збіжна послідовність $\{x_n\}$ така, що

$$\forall n \geq 0 : \quad x_n \in D_1 \quad \text{і} \quad V_{h_n}(x_n) = 0,$$

де $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, $x_0 \in D_1$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} V_{h_n}(x_n) = 0.$

Доведемо рівність

$$\lim_{n\to\infty} V_{h_n}(x_n) = V(x_0).$$

Із рівномірної збіжності $V_h(x)$ випливає

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D_1 : \quad \|V_{h_n}(x) - V(x)\| < \varepsilon. \tag{6}$$

Тоді з (6) та одностайної неперервності $V_h(x)$ при $x = x_n$ маємо

$$\|V_{h_n}(x_n) - V(x_0)\| \leq \|V_{h_n}(x_n) - V_{h_n}(x_0)\| + \|V_{h_n}(x_0) - V(x_0)\| < 2\varepsilon$$

при $n \geq N$ і таких, що $|x_n - x_0| < \delta$.

Таким чином, знайдеться $x \in D_1$ таке, що $V(x) = 0$. Тепер покажемо, що похідна функції $V(x)$ в силу системи (1) не є додатною.

Із $\triangle V_h(x) = V_h(x + hX(x)) - V_h(x) \leq 0, x \in \overline{D}_1$, отримуємо

$$\lim_{t\to 0+} \frac{V(x + tX(x)) - V(x)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\left[\lim_{h\to 0}\left(V_h(x + tX(x)) - V_h(x)\right)\right] \leq 0,$$

де $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{V(x + tX(x)) - V(x)}{t}$ — похідна функції $V(x)$ за напрямком $X(x)$.

Отже, $\dfrac{\partial V}{\partial x} X(x) \leq 0, x \in D_1$.

З [2, с. 68] випливає, що множина

$$V(x) = 0, \quad x \in D_1,$$

є (додатно) інваріантною множиною системи (1).

Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо в теоремі 2 одностайну неперервність $V_h(x)$ по x та рівномірну збіжність $V_h(x)$ по x замінити умовами:*

1) сім'я функцій $V_h(x)$ є рівномірно обмеженою, тобто

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall h \leq h_0 \qquad \forall x \in \overline{D}_1 : \|V_h(x)\| \leq C_1; \tag{7}$$

2) існують $C_2 > 0, C_3 > 0$ такі, що

$$\forall h \leq h_0 \quad \forall x \in \overline{D}_1 : \left\|\frac{\partial V_h(x)}{\partial x}\right\| \leq C_2, \quad \left\|\frac{\partial^2 V_h(x)}{\partial x^2}\right\| \leq C_3, \tag{8}$$

то теорема залишиться справедливою.

Доведення. Із (7), (8) випливає одностайна неперервність функцій $V_h(x)$ та їх похідних $\dfrac{\partial V}{\partial x}$. З викладеного вище маємо, що з сім'ї функцій $V_h(x)$ можна виділити підпослідовність, яка буде збігатися до функції $V(x)$ із класу $\mathbb{C}^1(\overline{D}_1)$.

При доведенні теорем 1 та 2 основну роль відігравали результати А. М. Самойленка [2, с. 68] про існування інваріантних множин системи (1) у термінах нулів невід'ємно означених функцій Ляпунова.

У роботах [3, 4] дані результати узагальнено на системи неавтономних диференціальних рівнянь та рівнянь з випадковими збуреннями. Доведено, що нулі деякої невід'ємно означеної функції Ляпунова $V(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, є інваріантною множиною при умові, що їх проекція на $\mathbb{R}^n$ компактна в D, а похідна $V(t,x)$ в силу системи недодатно означена.

Вияснимо питання про те, наскільки наявність функції Ляпунова з даними властивостями є необхідною для існування та стійкості інваріантних множин, тобто в подальшому фактично отримаємо обернення теорем А. М. Самойленка аналогічно оберненим теоремам Ляпунова в теорії стійкості (див., наприклад, [5, с. 254]). В роботі [6] досліджено аналогічне питання, але суттєвою відмінністю її від даної є умова рівномірної асимптотичної стійкості інваріантної множини.

Отже, розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) \tag{9}$$

в області $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, де функція $X(t,x)$ неперервна за сукупністю змінних і ліпшіцева по x.

Нехай $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, а M_{t_0} — переріз M гіперплощиною $t = t_0$, $t_0 \geq 0$.

Означення 3. *Множину M назвемо додатно інваріантною множиною системи (9), якщо розв'язок $x(t)$ системи (9) такий, що $x(t_0) \in M_{t_0}$, має властивість: $x(t) \in M_t$ для довільного $t \geq 0$.*

Означення 4. *Додатно інваріантну множину M системи (9) назвемо стійкою при $t \geq t_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що якщо $\rho(x(t_0), M_{t_0}) < \delta$, то $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ для $t \geq t_0$.*

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай система (9) має при $t \geq 0$ гладкий додатно інваріантний стійкий многовид M такий, що $\mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^n} M$ є компактною в D ($\mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^n} M$ — проекція множини M на $\mathbb{R}^n$).*

Тоді в області $t \geq 0$, $x \in D$ існує диференційовна за будь-яким напрямком функція Ляпунова $V(t,x)$ з властивостями:

1) $V(t,x)$ є додатно означеною рівномірно по $t \geq 0$, тобто

$$\inf_{t \geq 0;\ x: \rho(x, M_t) > \varepsilon} V(t,x) = V_\varepsilon > 0 \tag{10}$$

при довільному $\varepsilon > 0$;

2) похідна функції $V(t,x)$ в силу системи (9) недодатно означена:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, X(t,x) \right) \leq 0, \quad t \geq 0, \quad x \in D;$$

3) множина нулів функції $V(t,x)$ збігається з M, тобто

$$M = \{(t,x) : V(t,x) = 0,\ t \geq 0,\ x \in D\}.$$

Доведення. Нехай $x(s;t,x)$ — розв'язок системи (9), що визначається початковою умовою $x(t;t,x) = x$.

Розглянемо функцію

$$V(t,x) = (1+e^{-t})\rho^2\left(x(\tau;t,x), M_\tau\right), \quad t \geq 0, \quad x \in D, \tag{11}$$

де τ — момент першого виходу розв'язку $x(s,t,x)$, $0 \leq s \leq t$, на межу області D. Якщо таке τ на $[0,t]$ не існує, то функцію $V(t,x)$ визначимо таким чином:

$$V(t,x) = (1+e^{-t})\rho^2\left(x(0;t,x), M_0\right), \quad t \geq 0, \quad x \in D, \tag{12}$$

де $\rho\left(x(0;t,x), M_0\right) = \min\limits_{y \in M_0} \|x(0;t,x) - y\|$ — відстань від розв'язку системи (9) до M_0.

Із стійкості многовиду при $t \geq 0$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) >$ > 0 таке, що якщо $\rho\left(x_0, M_0\right) < \delta$, то

$$\rho\left(x(t;0,x_0), M_t\right) < \varepsilon, \quad t \geq 0. \tag{13}$$

Доведемо нерівність (10). Справді, якщо це не так, то

$$\exists\ \varepsilon > 0 \quad \forall \delta_1 > 0 \quad (\delta_1 < \delta^2) : \inf_{t \geq 0;\ x : \rho(x, M_t) > \varepsilon} V(t,x) < \delta_1.$$

Звідси випливає, що існують $\bar{t} \geq 0$, $\overline{x} \in D$ такі, що

$$\rho\left(\overline{x}, M_{\bar{t}}\right) > \varepsilon \tag{14}$$

і

$$V(\bar{t},\overline{x}) = (1+e^{-\bar{t}})\rho^2\left(x(\tau;\bar{t},\overline{x}), M_\tau\right) < \delta_1.$$

З компактності проекції, мализни δ_1 і останньої нерівності випливає, що $x(\tau,\bar{t},\overline{x}) \in D$ для довільного $\tau \in [0,\bar{t}]$. Тоді із (12) отримуємо

$$V(\bar{t},\overline{x}) = (1+e^{-\bar{t}})\rho^2\left(x(0;\bar{t},\overline{x}), M_0\right) < \delta_1.$$

А тому із стійкості множини M вибором достатньо малого δ_1 при $t = \bar{t}$ одержуємо нерівність

$$V(\bar{t},\overline{x}) = (1+e^{-\bar{t}})\rho^2\left(x(\bar{t};\bar{t},\overline{x}), M_{\bar{t}}\right) = (1+e^{-\bar{t}})\rho^2\left(\overline{x}, M_{\bar{t}}\right) < \varepsilon,$$

що суперечить (14).

Для доведення властивості 2 розглянемо функцію $\rho(x) = \min\limits_{y \in M_t} \|x - y\|^2$ для довільного фіксованого $t \geq 0$. Покажемо її диференційовність за довільним напрямком при $x \in D$.

Якщо x_0 не належить M_t, то диференційовність випливає з [7, с. 245].

Нехай x_0 належить $\in M_t$, тобто $\rho(x_0) = 0$. Виберемо довільну послідовність $\{\alpha_k\}$ таку, що $\alpha_k \to 0+$, і розглянемо границю

$$\lim_{\alpha_k \to 0+} \frac{\rho(x_0 + \alpha_k g) - \rho(x_0)}{\alpha_k} = \lim_{\alpha_k \to 0+} \frac{\rho(x_0 + \alpha_k g)}{\alpha_k}, \tag{15}$$

що є похідною за напрямком g для довільного $g \in \mathbb{R}^n$. З гладкості множини M випливає існування для M_t дотичного підпростору в кожній точці, тоді $x_{\alpha_k} = x_0 + \alpha_k h + o(\alpha_k) \in M_t$, де h — фіксований елемент з дотичного підпростору до M_t у точці x_0.

З (15) маємо

$$0 \le \frac{\rho(x_0 + \alpha_k g)}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_k} \min_{y \in M_t} \|x_0 + \alpha_k g - y\|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha_k} \|x_0 + \alpha_k g - x_0 - \alpha_k h - o(\alpha_k)\|^2 =$$

$$= \alpha_k \|g - h - \frac{o(\alpha_k)}{\alpha_k}\|^2 \to 0, \qquad \alpha_k \to 0+.$$

З останнього співвідношення випливає диференційовність функції $\rho(x)$ на многовиді M_t.

Для похідної в силу системи (9) функції $V(t,x)$, заданої співвідношенням (11), отримуємо

$$\frac{dV}{dt} = \left\{ \frac{d}{ds} [1 + e^{-s}] \rho^2(x(\tau; s, x_s), M_\tau) \right\}_{s=t},$$

де $x_s = x(s; t, x)$. Але $x(\tau; s, x_s) = x(\tau; t, x)$ при $s \ge 0$.

Таким чином, із (16) одержуємо

$$\frac{dV}{dt} = \rho^2(x(\tau; t, x), M_\tau) \left[\frac{d}{ds}(1 + e^{-s}) \right]_{s=t} = -e^{-t} \rho^2(x(\tau; t, x), M_\tau) < 0.$$

У випадку, коли $V(t,x)$ визначається формулою (12), доведення проводиться аналогічно.

Властивість 3 випливає очевидним чином із означення функції $V(t,x)$ та інваріантності многовиду.

1. *Ткачук А. М.* Інваріантні множини різницевих систем та їх стійкість // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 258 – 264.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
3. *Станжицький О. М.* Дослідження інваріантних множин систем з випадковими збуреннями за допомогою функцій Ляпунова // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 309 – 312.
4. *Игнатьев А. О.* Об асимптотической устойчивости интегральных множеств // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 8. — С. 1064 – 1073.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
6. *Игнатьев А. О.* О существовании функции Ляпунова в задачах устойчивости интегральных множеств // Укр. мат. журн. — 1993. — **45**, № 7. — С. 932 – 941.
7. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

Одержано 27.12.2005