УДК 517 . 929 . 5

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛОКАЦІЙ

О. К. Баб'юк, І. М. Черевко

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2
e-mail: cherevko@chnu.cv.ua

We construct a method for approximating periodic solutions of linear differential-difference equations of neutral type by using cubic splines. Conditions for convergence of the proposed scheme are found.

Побудовано схему апроксимації періодичних розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу за допомогою кубічних сплайнів. Досліджено умови збіжності розглянутої схеми апроксимації.

Вступ. Дослідженню періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із запізненням та методам побудови їх розв'язків приділяється значна увага. Різні варіанти достатніх умов існування періодичних розв'язків рівнянь із запізненням розглянуто у працях [1 – 3], а для наближеного знаходження цих розв'язків розвинено метод тригонометричної колокації [4, 5], чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка [6, 7]. Застосування методу сплайн-функцій для апроксимації періодичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із змінним запізненням розглянуто у працях [8, 9].

Для диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу такі задачі досліджено значно менше. Умови існування періодичних розв'язків рівняння нейтрального типу вивчались у працях [10, 11]. Крайові задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2 досліджувались у праці [12].

У даній роботі розглядається застосування методу сплайн-колокацій для наближеного знаходження періодичних розв'язків диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y''(x) &= p_0(x)y(x) + p_1(x)y(x-\tau(x)) + p_2(x)y'(x) + \\ &+ p_3(x)y'(x-\tau(x)) + p_4(x)y''(x-\tau(x)) + f(x), \end{aligned} \tag{1}$$

де $f(x), p_i(x), i = \overline{0,4}, \tau(x) \geq 0$ — неперервні періодичні функції періоду T.

1. Схема апроксимації. Розглянемо рівномірну сітку на $[0,T]$ $\Delta : x_i = ih, i = \overline{0,n}$, $h = \dfrac{T}{n}$. Кубічний сплайн, який інтерполює функцію $y(x)$ на $[0,T]$, можна зобразити при $x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1,n}$, у вигляді [13]

$$\begin{aligned} S(y,x) &= \frac{M_i}{6h}(x-x_{i-1})^3 + \frac{M_{i-1}}{6h}(x_i - x)^3 + \\ &+ \left(y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h} + \left(y_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $M_j = S''(y, x_j)$, $y_j = y(x_j)$, $j = \overline{0, n}$.

Для кубічних сплайнів мають місце співвідношення

$$y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1} = \frac{h^2}{6}\,(M_{j+1} + 4M_j + M_{j-1}), \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

які забезпечують неперервність перших похідних $S'(y, x)$ у внутрішніх вузлах сітки Δ.

Припустимо, що існує єдиний періодичний розв'язок рівняння (1) періоду T. Для наближеного знаходження цього періодичного розв'язку у вигляді послідовності кубічних сплайнів (2) розглянемо таку ітераційну схему.

1. Вибираємо довільний кубічний сплайн $S(y^{(0)}, x)$ так, щоб задовольнити крайові умови $S(y^{(0)}, 0) = S(y^{(0)}, T) = c$, де стала $c \neq 0$.

2. Використовуючи рівняння (1) і сплайн $S(y^{(0)}, x)$, знаходимо

$$\begin{aligned} M_j^{k+1} &= p_0(x_j)S(y^{(k)}, x_j) + p_1(x_j)S(y^{(k)}, x_j - \tau(x_j)) + p_2(x_j)S'(y^{(k)}, x_j) + \\ &+ p_3(x_j)S'(y^{(k)}, x_j - \tau(x_j)) + p_4(x_j)S''(y^{(k)}, x_j - \tau(x_j)) + f(x_j), \quad j = \overline{0, n}. \end{aligned} \tag{4}$$

У формулах (4) при $t < 0$ покладемо

$$S(y^{(k)}, t) = S(y^{(k)}, t + mT), \quad -\frac{t}{T} \le m < 1 - \frac{t}{T}.$$

3. Знаходимо множину точок y_j^{k+1}, $j = \overline{0, n}$:

$$\begin{gathered} y_{j+1}^{k+1} - 2y_j^{k+1} + y_{j-1}^{k+1} = \frac{h^2}{6}\left(M_{j+1}^{k+1} + 4M_j^{k+1} + M_{j-1}^{k+1}\right), \quad j = \overline{1, n-1} \\ y_0^{k+1} = y_n^{k+1} = c. \end{gathered} \tag{5}$$

4. Множини y_j^{k+1}, M_j^{k+1}, $j = \overline{0, n}$, визначають кубічний сплайн $S(y^{(k+1)}, x)$, який відіграє роль наступного наближення.

У подальшому нам будуть потрібні деякі властивості $((n-1) \times (n-1))$-матриці $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \begin{cases} -2, & i = j, \\ 1, & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

та $((n-1) \times (n+1))$-матриці $B = (b_{ij})$:

$$b_{ij} = \begin{cases} 4, & j - i = 1, \\ 1, & j - i = 0 \quad \text{або} \quad j - i = 2, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

які визначаються рівняннями (3).

Лема [9]. *Мають місце такі співвідношення:*
1) $\det(A) = (-1)^{n-1}n$;
2) $\|A^{-1}\| \leq \dfrac{n^2}{8}$;
3) $\max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n-1} |a^{-1}_{i+1,j} - a^{-1}_{ij}| \leq \dfrac{n}{2}$, *де* a^{-1}_{ij} — *елементи матриці* A^{-1};
4) $\|B\| = 6$.

2. Збіжність ітераційної схеми. Введемо позначення

$$L_i = \max_{[0,T]} |p_i(x)|, \quad i = \overline{0,4},$$

$$\lambda_0 = L_0 + L_1, \quad \lambda_1 = L_2 + L_3, \quad \lambda_2 = L_4 \quad \mu = 5\left(\lambda_2 + \frac{1}{2}\,\lambda_0 h^2 + \lambda_1 h\right).$$

Теорема 1. *Нехай виконується нерівність*

$$R = \frac{T^2 + h^2}{8}\,\lambda_0 + \left(\frac{T}{2} + \frac{2h}{3}\right)\lambda_1 + \lambda_2 < 1. \tag{6}$$

Тоді існує таке $h^* > 0$, *що для всіх* $0 < h < h^*$ *послідовність сплайнів* $S\left(y^{(k)}, x\right)$, $k = 0, 1, \ldots$, *рівномірно збігається на* $[0, T]$.

Доведення. Згідно з лемою із рівності $\det(A) = (-1)^{n-1}n$ випливає, що побудова ітераційної послідовності є можливою. Покажемо, що ряди

$$S^{(p)}\left(y^{(0)}, x\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[S^{(p)}\left(y^{(i)}, x\right) - S^{(p)}\left(y^{(i-1)}, x\right)\right], \quad p = 0, 1, 2,$$

збігаються рівномірно на $[0, T]$, і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей

$$S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right), \quad k = 0, 1, \ldots, \quad p = 0, 1, 2.$$

Введемо позначення $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})^T$, $M = (M_0, \ldots, M_n)^T$, де M_j, $j = \overline{0,n}$, визначаються згідно з рівностями (4). Запишемо співвідношення (5) у матричному вигляді

$$y^{(k+1)} = \frac{A^{-1}B}{6}\,h^2 M^{k+1} - A^{-1}q, \tag{7}$$

де $q = (c, 0, \ldots, 0, c)^T$ — вектор, що залежить лише від сталої c.

Нехай $x \in [x_{j-1}, x_j]$, тоді з (7) на підставі властивостей M^{k+1} отримуємо

$$\begin{aligned}\left\|y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}\right\| \leq \frac{h^2}{6}\,\|A^{-1}\|\,\|B\|\Big(\lambda_0\left\|S\left(y^{(k)}, x\right) - S\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\| + \\ + \lambda_1\left\|S'\left(y^{(k)}, x\right) - S'\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\| + \lambda_2\left\|S''\left(y^{(k)}, x\right) - S''\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\|\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

Враховуючи вигляд сплайна (2), маємо

$$S\left(y^{(k+1)}, x\right) - S\left(y^{(k)}, x\right) = \left(M_{j-1}^{(k+1)} - M_{j-1}^{(k)}\right)\left[\frac{(x_j - x)^3 - h^2(x_j - x)}{6h}\right] +$$

$$+ \left(M_j^{(k+1)} - M_j^{(k)}\right)\left[\frac{(x - x_{j-1})^3 - h^2(x - x_{j-1})}{6h}\right] +$$

$$+ \left(y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}\right)\frac{x - x_{j-1}}{h} + \left(y_{j-1}^{(k+1)} - y_{j-1}^{(k)}\right)\frac{x_j - x}{h}.$$

Із співвідношень (5), (7), (8) одержуємо

$$\left\|S\left(y^{(k+1)}, x\right) - S\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \leq \left(\frac{T^2 + h^2}{8}\right) d_k, \tag{9}$$

де

$$d_k = \lambda_0 \left\|S\left(y^{(k)}, x\right) - S\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\| + \lambda_1 \left\|S'\left(y^{(k)}, x\right) - S'\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\| +$$

$$+\lambda_2 \left\|S''\left(y^{(k)}, x\right) - S''\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\|.$$

Аналогічно, із формул (2), (5), (8) та леми знаходимо

$$\left\|S'\left(y^{(k+1)}, x\right) - S'\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \leq \left(\frac{2h}{3} + \frac{T}{2}\right) d_k, \tag{10}$$

$$\left\|S''\left(y^{(k+1)}, x\right) - S''\left(y^{(k)}, x\right)\right\| \leq d_k. \tag{11}$$

Ітеруючи співвідношення (9) – (11), оотримуємо нерівності

$$\begin{gathered} \left\|S\left(y^{(k+1)}, x\right) - S\left(y^{(k)}, x\right)\right\| < \frac{T^2 + h^2}{8} R^{k-1} d_1, \\ \left\|S'\left(y^{(k+1)}, x\right) - S'\left(y^{(k)}, x\right)\right\| < \left(\frac{T}{2} + \frac{2h}{3}\right) R^{k-1} d_1, \\ \left\|S''\left(y^{(k+1)}, x\right) - S''\left(y^{(k)}, x\right)\right\| < R^{k-1} d_1. \end{gathered} \tag{12}$$

Звідси при виконанні умови (6) випливає збіжність послідовностей

$$\left\{S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right)\right\}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad p = 0, 1, 2.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*
1) періодичний розв'язок $y(x)$ рівняння (1) належить класу $C^2[0, T]$;

2) ітераційна схема 1 – 4 визначає дві граничні функції $S_f(x)$, $S_0(x)$, що відповідають рівнянню (1) та відповідному йому однорідному рівнянню;

3) функція $S_0(x)$ має стрибок похідної в точці $x = x_0$.

Тоді функція $z(x)$, яка визначена співвідношенням

$$z(x) = S_H(x) - \beta S_0(x), \quad \beta = \frac{S_f'(x_0+0) - S_f'(x_0-0)}{S_0'(x_0+0) - S_0'(x_0-0)}, \tag{13}$$

задовольняє нерівності

$$\omega_i \le R_i \omega\left(y'', h\right), \quad i = 0, 1, 2,$$

де $\omega_i = \max\limits_{0 \le x \le T} \left| y^{(i)}(x) - z^{(i)}(x) \right|$, $i = 0, 1, 2$,

$$R_0 = \frac{\gamma_0}{1 - \gamma_0\lambda_0} \left[\frac{\gamma_1\lambda_1}{1 - \gamma_0\lambda_0 - \gamma_1\lambda_1} \left(\frac{\lambda_2}{1-r} + 1 \right) + \frac{\lambda_2}{1-r} + 1 \right] \mu,$$

$$R_1 = \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_0\lambda_0 - \gamma_1\lambda_1} \left[\frac{\lambda_2}{1-r} + 1 \right] \mu, \quad R_2 = \frac{1}{1-r}\, \mu,$$

$$\gamma_0 = \frac{T^2 + h^2}{8}, \quad \gamma_1 = \left(\frac{2h}{3} + \frac{T}{2} \right), \quad r = \gamma_0\lambda_0 + \gamma_1\lambda_1 + \lambda_2,$$

$\omega(y'', h)$ — *модуль неперервності функції* $y''(x)$ *на* $[0, T]$.

Доведення. Оскільки (1) — лінійне рівняння, то функція $z(x)$, визначена згідно з (13), є кубічним сплайном, який задовольняє рівняння (1) у вузлах сітки Δ. Завдяки вибору сталої β легко бачити, що $z'(x)$ є неперервною в усіх вузлах сітки Δ. Це означає, що мають місце рівності

$$z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1} = \frac{h^2}{6} \left(z''_{j+1} + 4z''_j + z''_{j-1} \right), \quad j = \overline{0, n}. \tag{14}$$

При цьому, оскільки розглядається випадок періодичного розв'язку, покладемо $z_{-1} = z_{n-1}$, $z_{n+1} = z_1$, $z''_{-1} = z''_{n-1}$, $z''_{n+1} = z''_1$. Розглянемо різницю $|y(x) - z(x)|$ на інтервалі $[x_{j-1}, x_j]$. Якщо $S(x) = S(y, x)$ — інтерполяційний кубічний сплайн для розв'язку $y(x)$ рівняння (1) на сітці Δ, то при використанні умови 1 справджується оцінка [13]

$$\left\| S^{(i)}(x) - y^{(i)}(x) \right\| \le K_i h^{2-i} \omega(y'', h), \quad i = 0, 1, 2, \tag{15}$$

де $\omega\left(y'', h\right)$ — модуль неперервності функції $y''(x)$ на $[0, T]$, $K_0 = \dfrac{5}{2}$, $K_1 = K_2 = 5$.

Враховуючи оцінку (15), маємо

$$\left| y^{(i)}(x) - z^{(i)}(x) \right| \le \left| y^{(i)}(x) - S^{(i)}(x) \right| + \left| S^{(i)}(x) - z^{(i)}(x) \right| \le$$
$$\le K_i h^{2-i} \omega\left(y'', h\right) + \left| S^{(i)}(x) - z^{(i)}(x) \right|, \quad i = 0, 1, 2. \tag{16}$$

Функції $S(x)$, $z(x)$ — кубічні сплайни. Використовуючи їх зображення у вигляді (2), одержуємо

$$\left|S(x)-z(x)\right| \le \frac{h^2}{8}\max_{0\le j\le n}\left|S_j''-z_j''\right| + \max_{0\le j\le n}\left|S_j-z_j\right|,$$

$$\left|S'(x)-z'(x)\right| \le \frac{2h}{3}\max_{0\le j\le n}\left|S_j''-z_j''\right| + \frac{1}{h}\max_{1\le j\le n}\left|S_j-S_{j-1}-z_j+z_{j-1}\right|, \tag{17}$$

$$\left|S''(x)-z''(x)\right| \le \max_{0\le j\le n}\left|S_j''-z_j''\right|.$$

Із співвідношення (3) на підставі леми отримуємо нерівності

$$\max_{0\le j\le n}\left|S_j-z_j\right| \le \frac{T^2}{8}\max_{0\le j\le n}\left|S_j''-z_j''\right|,$$

$$\max_{1\le j\le n}\left|S_j-S_{j-1}-z_j+z_{j-1}\right| \le \frac{hT}{2}\max_{0\le j\le n}\left|S_j''-z_j''\right|.$$

Враховуючи (10) та одержані оцінки, записуємо нерівності (17) у вигляді

$$\left|S(x)-z(x)\right| \le \frac{T^2+h^2}{8}\left(\max_{0\le j\le n}\left|y_j''-z_j''\right| + 5\,\omega\left(y'',h\right)\right),$$

$$\left|S'(x)-z'(x)\right| \le \left(\frac{2h}{3}+\frac{T}{2}\right)\left(\max_{0\le j\le n}\left|y_j''-z_j''\right| + 5\,\omega\left(y'',h\right)\right), \tag{18}$$

$$\left|S''(x)-z''(x)\right| \le \left(\max_{0\le j\le n}\left|y_j''-z_j''\right| + 5\,\omega\left(y'',h\right)\right).$$

Для різниці $\left|y_j''-z_j''\right|$ безпосередньо з рівняння (1), враховуючи нерівності (15), знаходимо оцінку

$$\left\|y_j''-z_j''\right\| \le (L_0+L_1)\left|S_j-z_j\right| + (L_2+L_3)\left|S_j'-z_j'\right| + L_4\left|S_j''-z_j''\right| +$$

$$+\left[\frac{5}{2}h^2(L_0+L_1)+5h(L_2+L_3)+5L_4\right]\omega\left(y'',h\right). \tag{19}$$

Введемо позначення $\alpha_i = \max\limits_{0\le x\le T}\left|S^{(i)}(x)-z^{(i)}(x)\right|$, $i = 0,1,2$. Тоді нерівності (18) з урахуванням (19) можна записати у вигляді

$$\alpha_0 \le \gamma_0\left(\lambda_0\alpha_0+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\mu\omega\left(y'',h\right)\right),$$

$$\alpha_1 \le \gamma_1\left(\lambda_0\alpha_0+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\mu\omega\left(y'',h\right)\right), \tag{20}$$

$$\alpha_2 \le \lambda_0\alpha_0+\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\mu\omega\left(y'',h\right).$$

Розв'язуючи систему нерівностей (20), маємо

$$\alpha_0 \le \frac{\gamma_0}{1-\gamma_0\lambda_0}\left[\frac{\gamma_1\lambda_1}{1-\gamma_0\lambda_0-\gamma_1\lambda_1}\left(\frac{\lambda_2}{1-r}+1\right)+\frac{\lambda_2}{1-r}+1\right]\mu\,\omega\left(y'',h\right),$$

$$\alpha_1 \le \frac{\gamma_1}{1-\gamma_0\lambda_0-\gamma_1\lambda_1}\left[\frac{\lambda_2}{1-r}+1\right]\mu\omega\left(y'',h\right),$$

$$\alpha_2 \le \frac{1}{1-r}\,\mu\omega\left(y'',h\right).$$

Тепер, підставляючи одержані оцінки для α_0, α_1, α_2 в нерівності (16), знаходимо оцінки для $\omega, \omega_1, \omega_2$.

Теорему 2 доведено.

3. Приклад. Розглянемо числовий приклад, який ілюструє наведену методику знаходження наближення періодичного розв'язку диференціально-різницевих рівнянь нейтрального вигляду:

$$y''(x) = \frac{1}{4}\,y(x)+\frac{1}{2}\,y''\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\,\cos(x)-\frac{5}{4}\,\sin(x)-\frac{1}{4}, \quad x\in[0,2\pi].$$

Результати обчислень наведено в таблиці, де x_i — вузли сітки розбиття, y_1, y_2 — наближені значення розв'язку, знайдені на сітці з кроком відповідно $\frac{\pi}{25}$ та $\frac{\pi}{50}$.

x	y	y_1	y_2
0	1,0000	1,0005	1,0001
$\pi/2$	2,0000	1,9991	1,9996
π	1,0000	0,9994	0,9998
$3\pi/2$	0,0000	0,0008	0,0002
2π	1,0000	1,0006	1,0002

Порівнюючи точний періодичний розв'язок $y(x) = \sin x + 1$ та наближений, знайдений за розробленою в роботі схемою на 7 ітерації, одержуємо, що при кроці $h = \frac{\pi}{25}$ асболютна похибка не перевищує 0,0009, а відносна — 0,05%; при кроці $h = \frac{\pi}{50}$ асболютна похибка не перевищує 0,0004, а відносна — 0,02%.

1. *Inreznizzi S., Zanolin F.* On the existence and uniqueness of periodic solutions of differential delay equations // Math. Z. — 1978. — **163**, № 1. — P. 25 – 37.
2. *Колмановский В. Б., Носов В. Г.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
4. *Bellen A.* The collocation method for the numerical approximation of the periodic solutions of functional differential equations // Computing. — 1979. — **23**, № 1. — P. 55 – 66.
5. *Ронто Н. И.* О методе коллокаций для линейных периодических систем с запаздывающим аргументом // Электрон. моделирование. — 1980. — № 3. — С. 48 – 52.

6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.

7. *Мартынюк Д. И.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн. — 1967. — **19**, № 4. — С. 125 – 132.

8. *Burkowski F. I., Cowan D. D.* The numerical derivation of a periodic solution of a second order differential-difference equation // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — **10**, № 3. — P. 489 – 495.

9. *Настасьєва Н. П., Черевко І. М.* Апроксимація періодичних розв'язків лінійних диференціально-різницевих рівнянь методом сплайн-функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2000. — Вип. 46. — С. 100 – 103.

10. *Lopes O.* Periodic solutions of some perturbed differential equation of neutral type // J. Different. Equat. — 1974. — **15**, № 1. — P. 70 – 76.

11. *Черевко И. М.* Периодические решения квазилинейных систем дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики. — М.: Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1983. — С. 105 – 110.

12. *Настасьєва Н. П., Черевко І. М.* Наближений метод розв'язання крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу // Мат. студ. — 1998. — **10**, № 2. — С. 147 – 152.

13. *Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972. — 316 с.

Одержано 20.03.2006