УДК 517.929

ОЦІНКИ ПОХИБКИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ЗІ СТАЛИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Р. І. Петришин, І. М. Данилюк

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2
e-mail: rompetr@math.chnu.cv.ua

New error estimates of the averaging method for multifrequency systems of higher approximations with delays in slow and fast variables have been proved. The main assumption is imposed on the vector of harmonics and its derivatives along the solution of the averaged system of zero approximation.

Доведено нові оцінки похибки методу усереднення для багаточастотних систем вищих наближень із запізненням у повільних та швидких змінних. Основне припущення при цьому накладається на вектор частот та його похідні вздовж розв'язку усередненої системи нульового наближення.

Розглянемо багаточастотну систему диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k a_k(x, x_\Delta, \tau) + \varepsilon^{r+1} A(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^{k-1} b_k(x, x_\Delta, \tau) + \varepsilon^{r} B(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

в якій $x = x(\tau, \varepsilon) \in D \subset R^n$, $\varphi = \varphi(\tau, \varepsilon) \in R^m$, $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малий параметр, $\Delta = \mathrm{const} > 0$, $x_\Delta = x(\tau - \Delta, \varepsilon)$, $\varphi_\Delta = \varphi(\tau - \Delta, \varepsilon)$, D — відкрита обмежена область, дійсні функції a_k, b_k, $k = \overline{0, r}$, A, B обмежені сталою σ_1 і задовольняють умову Ліпшиця по x, x_Δ, φ, φ_Δ зі сталою $\tilde{\sigma}_1$ на множині $G = D^2 \times R^{2m} \times [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$.

У монографії [1] на підставі рівномірних оцінок осциляційних інтегралів обґрунтовано метод усереднення за всіма швидкими змінними для систем вигляду (1) без запізнення і вивчено його застосування до розв'язання крайових задач. Дослідженню схем усереднення для різних класів багаточастотних систем із запізненням присвячено праці [2–6]. Відмітимо також статтю [7], в якій деякі результати з [1] розповсюджено на випадок коливних систем із лінійно перетвореним аргументом.

У даній роботі одержано ефективні оцінки похибки методу усереднення для (1) за всіма швидкими змінними φ, φ_Δ.

Припустимо, що $(n+m)$-вимірна вектор-функція $C(y, \theta, \tau, \varepsilon) = (A(y, \theta, \tau, \varepsilon), B(y, \theta, \tau, \varepsilon))$ належить класу майже періодичних по θ функцій, які розкладаються в рівномірно по θ збіжний у G ряд Фур'є

$$C(y, \theta, \tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s(y, \tau, \varepsilon) e^{i(\lambda_s, \theta)}, \tag{2}$$

де $y = (x, x_\Delta) \in D^2$, $\theta = (\varphi, \varphi_\Delta) \in R^{2m}$, $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця, (λ_s, θ) — скалярний добуток в R^{2m}, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_s \neq 0$ при $s \geq 1$.

Задамо для (1) початкову умову

$$x(\tau, \varepsilon) = f(\tau), \quad \varphi(\tau, \varepsilon) = g(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \Omega(t)dt, \quad \tau \in [-\Delta, 0]. \tag{3}$$

Тут f, g, Ω — неперервно диференційовні по $\tau \in [-\Delta, 0]$ функції,

$$\left\| \frac{dg(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \leq \sigma_1, \quad (\tau, \varepsilon) \in [-\Delta, 0] \times (0, \varepsilon_0]. \tag{4}$$

Розглянемо усереднену по φ, φ_Δ систему

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\tau} &= \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k a_k(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau) + \varepsilon^{r+1} A_0(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau, \varepsilon), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} &= \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^{k-1} b_k(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau) + \varepsilon^r B_0(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \tag{5}$$

в якій $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \varepsilon)$, $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)$, $\bar{x}_\Delta = \bar{x}(\tau - \Delta, \varepsilon)$,

$$(A_0(\bar{y}, \tau, \varepsilon), B_0(\bar{y}, \tau, \varepsilon)) = C_0(\bar{y}, \tau, \varepsilon) = \lim_{T \to \infty} T^{-2m} \int\limits_0^T \ldots \int\limits_0^T C(\bar{y}, \theta, \tau, \varepsilon) d\theta_1 \ldots d\theta_{2m},$$

$$\bar{y} = (\bar{x}, \bar{x}_\Delta),$$

C_0 визначається формулою (2), і відповідну їй початкову умову

$$\bar{x}(\tau, \varepsilon) = f(\tau), \quad \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = g(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \Omega(t)dt, \ \ \tau \in [-\Delta, 0]. \tag{6}$$

Враховуючи умови (4), (6), із рівнянь (1) і (5) знаходимо

$$\begin{aligned} \|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \varepsilon)\| \leq \tilde{\sigma}_1 (r+1) \int\limits_0^\tau [\|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t, \varepsilon)\| + \\ + \|x(t - \Delta, \varepsilon) - \bar{x}(t - \Delta, \varepsilon)\|]\, dt + \varepsilon^{r+1} 2\sigma_1. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_0^\tau \|x(t-\Delta,\varepsilon)-\bar{x}(t-\Delta,\varepsilon)\|\,dt = \int_{-\Delta}^{\tau-\Delta} \|x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,\varepsilon)\|\,dt =$$

$$= \int_0^{\tau-\Delta} \|x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,\varepsilon)\|\,dt \le \int_0^{\tau} \|x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,\varepsilon)\|\,dt,$$

то на підставі нерівності Гроноулла – Беллмана отримуємо оцінку

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_2\varepsilon^{r+1}$$

для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$, $\sigma_2 = 2\sigma_1 e^{2\tilde{\sigma}_1(r+1)L}$. Остання оцінка приводить до нерівності

$$\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le (\tilde{\sigma}_1\sigma_2(r+1)+2\sigma_1)\varepsilon^r, \quad (\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0].$$

Таким чином, вектор-функція $U(\tau,\varepsilon) = (x(\tau,\varepsilon)-\bar{x}(\tau,\varepsilon), \varepsilon\varphi(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon))$ задовольняє оцінку

$$\|U(\tau,\varepsilon)\| \le \tilde{\sigma}_2\varepsilon^{r+1}, \quad \tau\in[0,L], \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0] \tag{7}$$

зі сталою $\tilde{\sigma}_2 = 2\sigma_1+\sigma_2+\tilde{\sigma}_1\sigma_2(r+1)$ при умові, що крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\varepsilon)$ належить D разом зі своїм ρ_1-околом при $(\tau,\varepsilon)\in[-\Delta,L]\times(0,\varepsilon_0]$ і $\varepsilon_0 \le \left(\dfrac{\rho_1}{2\sigma_2}\right)^{\frac{1}{r+1}}$.

Нижче встановимо достатні умови для покращення оцінки (7) відносно порядку по ε, замінивши її оцінкою вигляду

$$\|U(\tau,\varepsilon)\| \le \underset{\sim}{\sigma_2}\varepsilon^{r+1+\alpha}, \quad (\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0],$$

де α — деяке додатне число, яке менше від одиниці.

Розглянемо допоміжну задачу

$$\frac{d\xi}{d\tau} = a_0(\xi,\xi_\Delta,\tau), \qquad \xi(\tau) = f(\tau), \quad \tau\in[-\Delta,0], \tag{8}$$

і припустимо, що її розв’язок $\xi = \xi(\tau)$ визначений і належить D при всіх $\tau\in[-\Delta,L]$. Оскільки D — відкрита область, то крива $\xi = \xi(\tau)$ належить D разом із деяким своїм ρ-околом, $\rho > 0$. Вважатимемо також, що

$$\Omega(\tau)\in C^{2m}_{[-\Delta,0]}, \quad f(\tau)\in C^{2m}_{[-\Delta,0]}, \qquad a_0(y,\tau)\in C^{\,2m-1}\left(D^2\times[0,L],\sigma_1\right), \quad b_0(y,\tau)\in C^{\,2m}\left(D^2\times[0,L],\sigma_1\right). \tag{9}$$

Тут через $C^{\,l}\left(D^2 \times [0,L], \sigma_1\right)$ позначено множину вектор-функцій, які мають неперервні і обмежені в $D^2 \times [0,L]$ сталою σ_1 частинні похідні по y, τ до порядку l включно.

Нехай

$$|S_1(\tau)| \geq \sigma_0 = \text{const} > 0, \quad \tau \in (0,\Delta),$$
$$|S_2(\tau)| \geq \sigma_0, \quad \tau \in (\Delta, L), \quad \tau \neq j\Delta, \quad j = 2,3,\ldots, \tag{10}$$

де $S_1(\tau)$ і $S_2(\tau)$ — визначники Вронського відповідно систем $2m$ функцій

$$\omega_1(\xi,\xi_\Delta,\tau),\ldots,\omega_m(\xi,\xi_\Delta,\tau),\Omega_1(\tau-\Delta),\ldots,\Omega_m(\tau-\Delta)$$

і

$$\omega_1(\xi,\xi_\Delta,\tau),\ldots,\omega_m(\xi,\xi_\Delta,\tau),\omega_1(\xi_\Delta,\xi_{2\Delta},\tau-\Delta),\ldots,\omega_m(\xi_\Delta,\xi_{2\Delta},\tau-\Delta).$$

Тут $\Omega(\tau) = (\Omega_1(\tau),\ldots,\Omega_m(\tau))$, $\omega(x,y,\tau) = (\omega_1(x,y,\tau),\ldots,\omega_m(x,y,\tau)) \equiv b_0(x,y,\tau)$, $\xi = \xi(\tau)$, $\xi_\Delta = \xi(\tau-\Delta)$, $\xi_{2\Delta} = \xi(\tau-2\Delta)$.

Очевидно, що

$$\|\bar{x}(\tau,\varepsilon) - \xi(\tau)\| \leq \bar{\sigma}_2\varepsilon, \quad (\tau,\varepsilon) \in [0,L]\times(0,\varepsilon_0], \tag{11}$$

де $\bar{\sigma}_2 = \sigma_1(r+1)e^{2\tilde{\sigma}_1 L}$, тому при $\varepsilon_0 \leq \rho(2\bar{\sigma}_2)^{-1}$ крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\varepsilon)$ належить D разом зі своїм $\rho_1 = \dfrac{1}{3}\rho$-околом при $\tau \in [-\Delta, L]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Із вихідної та усередненої систем дістанемо нерівність

$$\|U(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma_3 \int_0^\tau \|U(t,\varepsilon)\|\,dt + \varepsilon^{r+1}\sum_{s=1}^{\infty}\left\| \int_0^\tau C_s(\bar{y}(t,\varepsilon),t,\varepsilon)e^{i\left(\tilde{\lambda}_s,\tilde{\psi}(t,\varepsilon)\right)}\times\right.$$
$$\left.\times e^{i(\underset{\sim}{\lambda}_s,\underset{\sim}{\psi}(t,\varepsilon))}\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_\Delta^t(\lambda_s,\tilde{\omega}(l))dl\right\}dt\right\|, \tag{12}$$

в якій $(\tilde{\lambda}_s, \underset{\sim}{\lambda}_s) = \lambda_s$ — $2m$-вимірний вектор, $\tilde{\lambda}_s$ і $\underset{\sim}{\lambda}_s$ — m-вимірні вектори, $\bar{y}(\tau,\varepsilon) = (\bar{x}(\tau,\varepsilon), \bar{x}(\tau-\Delta,\varepsilon))$, $\sigma_3 = \tilde{\sigma}_1(r+2)$,

$$\tilde{\psi}(\tau,\varepsilon) = \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Delta^\tau \bar{\omega}(t)dt, \quad \underset{\sim}{\psi}(\tau,\varepsilon) = \bar{\varphi}(\tau-\Delta,\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Delta^\tau \underline{\omega}(t)dt,$$

$\bar{\omega}(\tau) = \omega(\xi(\tau),\xi(\tau-\Delta),\tau)$, $\underline{\omega}(\tau) = \Omega(\tau-\Delta)$ при $\tau \in [0,\Delta]$ і $\underline{\omega}(\tau) = \bar{\omega}(\tau-\Delta)$ при $\tau > \Delta$, а $2m$-вимірний вектор $\tilde{\omega}(\tau)$ визначається рівністю $\tilde{\omega}(\tau) = (\bar{\omega}(\tau), \underline{\omega}(\tau))$.

Згідно із зробленими вище припущеннями координати вектора $\tilde{\omega}(\tau)$ мають неперервні на $(-\Delta,0),(0,\Delta),(\Delta,2\Delta),\ldots,(l\Delta,L)$ обмежені похідні до порядку $2m$. Тут l — ціла частина числа $\dfrac{L}{\Delta}$. Тому на вказаних множинах функція $\tilde{\omega}(\tau)$ та її похідні до порядку $2m-1$

рівномірно неперервні. Враховуючи припущення (10), можемо записати рівномірну оцінку осциляційного інтеграла [1, с. 18]

$$\left\| \int_{\bar{\tau}}^{\tau} F(t) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\Delta}^{t} (\lambda_s, \tilde{\omega}(l)) dl \right\} dt \right\| \leq$$

$$\leq \tilde{\sigma}_0 \varepsilon^{\frac{1}{2m}} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_s\|} \right) \sup \|F(t)\| + \frac{1}{\|\lambda_s\|} \sup \left\| \frac{dF(t)}{dt} \right\| \right] \tag{13}$$

для всіх $\lambda_s \neq 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in [0, L]$, $\bar{\tau} \in [0, L]$ при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ зі сталою $\tilde{\sigma}_0$, не залежною від λ_s, ε, F, $\bar{\tau}$. Тут супремум береться по $t \in [0, L]$, а вектор-функції $F(t)$ і $\dfrac{dF(t)}{dt}$ мають кусково-неперервні на $[0, L]$ координати.

Зазначимо, що із нерівностей (4) і (11) випливають нерівності

$$\left\| \frac{d\tilde{\psi}(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \leq \sigma_1(1 + r) + 2\tilde{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2, \quad \tau > 0,$$

$$\left\| \frac{d\underset{\sim}{\psi}(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \leq \sigma_1(1 + r) + 2\tilde{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2, \quad \tau > 0, \quad \tau \neq \Delta. \tag{14}$$

Припустимо, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функція $C(y, \theta, \tau, \varepsilon)$ має неперервні обмежені сталою σ_1 частинні похідні першого порядку по y, θ, τ на множині G і виконується нерівність

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\lambda_s\|} \right) \sup_G \|C_s(y, \tau, \varepsilon)\| + \frac{1}{\|\lambda_s\|} \left(\sup_G \left\| \frac{\partial C_s(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} \right\| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sup_G \left\| \frac{\partial C_s(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \right\| \right) \right] \leq \sigma_1. \tag{15}$$

Враховуючи нерівності (14), (15) і (13) для

$$F(t) = C_s(\bar{y}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) e^{i(\lambda_s, \psi(t, \varepsilon))},$$

де $\psi(t, \varepsilon) = (\tilde{\psi}(t, \varepsilon), \underset{\sim}{\psi}(t, \varepsilon))$, із оцінки (12) отримуємо

$$\|U(\tau, \varepsilon)\| \leq \sigma_3 \int_0^{\tau} \|U(t, \varepsilon)\| dt + \sigma_4 \varepsilon^{r+1+\frac{1}{2m}}$$

або

$$\|U(\tau, \varepsilon)\| \leq \sigma_5 \varepsilon^{r+1+\frac{1}{2m}}, \quad \tau \in [0, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Тут $\sigma_4 = \sigma_1(1 + \sigma_1(r + 2) + 2\tilde{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2)$, $\sigma_5 = \sigma_4 e^{\sigma_3 L}$.

Отже, доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (2), (4), (9), (10), (15) і розв'язок $\xi(\tau)$ задачі (8) визначено для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$, то існують такі додатні сталі $\varepsilon_0^* \ll 1$ і σ_5, що при $\varepsilon_0 \le \varepsilon_0^*$ справджується оцінка*

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\varepsilon)\| + \varepsilon\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_5 \varepsilon^{r+1+\frac{1}{2m}}$$

для всіх $(\tau,\varepsilon) \times [0,L] \times (0,\varepsilon_0]$.

Послабимо тепер припущення на функцію $C(y,\theta,\tau,\varepsilon)$. Нехай $C(y,\theta,\tau,\varepsilon)$ задовольняє в G умову Ліпшиця по y, θ, τ

$$\left\|C(y,\theta,\tau,\varepsilon) - C(\tilde{y},\tilde{\theta},\tilde{\tau},\varepsilon)\right\| \le \tilde{\sigma}_1\left(\|y-\tilde{y}\| + \|\theta-\tilde{\theta}\| + |\tau-\tilde{\tau}|\right), \tag{16}$$

а її коефіцієнти Фур'є справджують нерівність

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\|\lambda_s\|} + \frac{1}{\sqrt[2m]{\|\lambda_s\|}}\right)\|C_s(y,\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_1 \tag{17}$$

для всіх $y \in D^2$, $\tau \in [0,L]$, $\varepsilon(0,\varepsilon_0]$.

Розіб'ємо відрізок $[0,\tau]$ на частини

$$[0,\tau] = \bigcup_{p=0}^{q}[l_p, l_{p+1}],$$

де $l_0 = 0$, $l_{p+1} - l_p = h$ при $p < q$, $l_{q+1} = \tau$, q — ціла частина числа τh^{-1}, а h — досить мале додатне число, яке означимо нижче. Тоді

$$\left\|\int_0^{\tau}\tilde{C}(\bar{y}(t,\varepsilon),\bar{\varphi}(t,\varepsilon),\bar{\varphi}(t-\Delta,\varepsilon),t,\varepsilon)dt\right\| \le \sum_{p=0}^{q}\left[\left\|H_p^{(1)}(\varepsilon)\right\| + \left\|H_p^{(2)}(\varepsilon)\right\|\right], \tag{18}$$

де

$$H_p^{(1)}(\varepsilon) = \int_{l_p}^{l_{p+1}}\Bigg[\tilde{C}(\bar{y}(t,\varepsilon),\bar{\varphi}(t,\varepsilon),\bar{\varphi}(t-\Delta,\varepsilon),t,\varepsilon) - \tilde{C}(\bar{y}(l_p,\varepsilon),\tilde{\psi}(l_p,\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Delta}^{t}\bar{\omega}(l)dl, \underset{\sim}{\psi}(l_p,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Delta}^{t}\underset{-}{\omega}(l)dl, l_p,\varepsilon)\Bigg]dt,$$

$$H_p^{(2)}(\varepsilon) = \int_{l_p}^{l_{p+1}}\left[\tilde{C}(\bar{y}(l_p,\varepsilon),\tilde{\psi}(l_p,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Delta}^{t}\bar{\omega}(l)dl, \underset{\sim}{\psi}(l_p,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Delta}^{t}\underset{-}{\omega}(l)dl, l_p,\varepsilon)\right]dt,$$

$$\tilde{C}(y,\theta,\tau,\varepsilon) = C(y,\theta,\tau,\varepsilon) - C_0(y,\tau,\varepsilon).$$

Зазначимо, що при $t \in [l_p, l_{p+1}]$ виконуються рівності

$$\tilde{h}_p(t,\varepsilon) \equiv \bar{\varphi}(t,\varepsilon) - \tilde{\psi}(l_p,\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Delta}^{t} \bar{\omega}(l)dl =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{l_p}^{t} \left[\omega(\bar{x}(\tau,\varepsilon), \bar{x}(\tau-\Delta,\varepsilon),\tau) - \bar{\omega}(\tau)\right] d\tau + \int\limits_{l_p}^{t} K(\tau,\varepsilon)d\tau,$$

$$\underset{\sim}{h_p}(t,\varepsilon) \equiv \bar{\varphi}(t-\Delta,\varepsilon) - \underset{\sim}{\psi}(l_p,\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Delta}^{t} \underset{-}{\omega}(l)dl =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{l_p}^{t} \left[\omega(\bar{x}(\tau-\Delta,\varepsilon), \bar{x}(\tau-2\Delta,\varepsilon),\tau-\Delta) - \bar{\omega}(\tau-\Delta)\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{l_p-\Delta}^{t-\Delta} K(\tau,\varepsilon)d\tau \quad \text{при} \quad l_p > \Delta,$$

$$\underset{\sim}{h_p}(t,\varepsilon) = g(t-\Delta,\varepsilon) - g(l_p-\Delta,\varepsilon) \quad \text{при} \quad t \le \Delta,$$

$$\underset{\sim}{h_p}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Delta}^{t} \left[\omega(\bar{x}(\tau-\Delta,\varepsilon), \bar{x}(\tau-2\Delta,\varepsilon),\tau-\Delta) - \bar{\omega}(\tau-\Delta)\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t-\Delta} K(\tau,\varepsilon)d\tau + g(0,\varepsilon) - g(l_p-\Delta,\varepsilon) \quad \text{при} \quad l_p \le \Delta < t,$$

в яких

$$K(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^{k-1} b_k(\bar{x}(\tau,\varepsilon), \bar{x}(\tau-\Delta,\varepsilon),\tau) + \varepsilon^r B_0(\bar{x}(\tau,\varepsilon), \bar{x}(\tau-\Delta,\varepsilon),\tau,\varepsilon),$$

тому

$$\|\tilde{h}_p(t,\varepsilon)\| + \|\underset{\sim}{h_p}(t,\varepsilon)\| \le \sigma_6(t-l_p), \quad t \in [l_p, l_{p+1}], \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \tag{19}$$

де $\sigma_6 = 2\sigma_1(r+2) + 4\tilde{\sigma}_1\bar{\sigma}_2$.

З нерівностей (16) і (19) одержуємо оцінку

$$\sum_{p=0}^{q} \left\| H_p^{(1)} \right\| \leq \sigma_7 h \tag{20}$$

зі сталою $\sigma_7 = L\tilde{\sigma}_1(1 + 2\sigma_1(r+3) + \sigma_6)$.

На підставі припущення про рівномірну по θ збіжність ряду (2) та теореми про почленне інтегрування функціонального ряду можна записати вираз $H_p^{(2)}(\varepsilon)$ у вигляді

$$H_p^{(2)}(\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} C_s(\bar{y}(l_p,\varepsilon), l_p, \varepsilon) e^{i(\lambda_s, \psi(l_p,\varepsilon))} \int\limits_{l_p}^{l_{p+1}} \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Delta}^{t} (\lambda_s, \tilde{\omega}(l)) dl \right\} dt.$$

Тоді, враховуючи оцінку осциляційного інтеграла [1, с. 81]

$$\left| \int\limits_{\tau'}^{\tau} \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Delta}^{t} (\lambda_s, \tilde{\omega}(l)) dl \right\} dt \right| \leq \underset{\sim}{\sigma_0}\, \varepsilon^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{1}{\|\lambda_s\|} + \frac{1}{\sqrt[2m]{\|\lambda_s\|}} \right),$$

яка покращує оцінку (13) при $F(t) \equiv 1$ у випадку $\|\lambda_s\| \to \infty$, та припущення (17), отримуємо

$$\sum_{p=0}^{q} \left\| H_p^{(2)}(\varepsilon) \right\| \leq \sum_{p=0}^{q} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\|\lambda_s\|} + \frac{1}{\sqrt[2m]{\|\lambda_s\|}} \right) \|C_s(\bar{y}(l_p,\varepsilon), l_p, \varepsilon)\| \, \varepsilon^{\frac{1}{2m}} \leq$$
$$\leq 2L \underset{\sim}{\sigma_0}\, \sigma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2m}} h^{-1}. \tag{21}$$

З огляду на нерівності (18), (20), (21) по аналогії з (12) одержуємо нерівність

$$\|U(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma_3 \int\limits_0^{\tau} \|U(t,\varepsilon)\| dt + \varepsilon^{r+1}(h + \varepsilon^{\frac{1}{2m}} h^{-1})(\sigma_7 + 2L \underset{\sim}{\sigma_0}\, \sigma_1), \tag{22}$$

з якої випливає оцінка

$$\|U(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma_8 \varepsilon^{r+1}(h + \varepsilon^{\frac{1}{2m}} h^{-1}), \quad \tau \in [0, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

де $\sigma_8 = e^{L\sigma_3}(\sigma_7 + 2L \underset{\sim}{\sigma_0}\, \sigma_1)$. Очевидно, що найкращий порядок по ε останньої оцінки буде в тому випадку, коли $h = \varepsilon^{\frac{1}{4m}}$.

Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються нерівності (16), (17) і всі умови теореми 1, за винятком припущення (15), то при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *для всіх* $\tau \in [0, L]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *виконується оцінка*

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\varepsilon)\| + \varepsilon \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma_9 \varepsilon^{r+1+\frac{1}{4m}}$$

зі сталою $\sigma_9 = 2\sigma_8$, *не залежною від* ε.

Відмовимось далі від нерівності (17) і вважатимемо, що ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty} \|C_s(y, \tau, \varepsilon)\| \tag{23}$$

збігається рівномірно на множині $\tilde{G} = D^2 \times [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$, тобто для довільного як завгодно малого числа $\mu_1 > 0$ існує таке натуральне $N = N(\mu_1)$, що

$$\sum_{s=N+1}^{\infty} \|C_s(y, \tau, \varepsilon)\| < \mu_1, \quad (y, \tau, \varepsilon) \in \tilde{G}.$$

Тоді замість нерівності (21) одержимо нерівність

$$\sum_{p=0}^{q} \left\| H_p^{(2)}(\varepsilon) \right\| \leq \sum_{p=0}^{q} \left[\varepsilon^{\frac{1}{2m}} \underset{\sim}{\sigma_0} \sum_{s=1}^{N} \|C_s(\bar{y}, (l_p, \varepsilon), l_p, \varepsilon)\| \left(\frac{1}{\|\lambda_s\|} + \frac{1}{\sqrt[2m]{\|\lambda_s\|}} \right) + \mu_1 h \right] \leq$$

$$\leq 2L \underset{\sim}{\sigma_0} \sigma_1 M(\mu_1) \varepsilon^{\frac{1}{2m}} + 2L\mu_1,$$

в якій число

$$M(\mu_1) = \sum_{s=1}^{N} \left(\frac{1}{\|\lambda_s\|} + \frac{1}{\sqrt[2m]{\|\lambda_s\|}} \right),$$

взагалі кажучи, є досить великим, а замість нерівності (22) — нерівність

$$\|U(\tau, \varepsilon)\| \leq \sigma_3 \int_0^{\tau} \|U(t, \varepsilon)\| dt + \varepsilon^{r+1}(h + \mu_1 + \varepsilon^{\frac{1}{2m}} M(\mu_1) h^{-1})(\sigma_7 + 2L + 2L \underset{\sim}{\sigma_0} \sigma_1).$$

Покладемо $h = \mu_1$ і виберемо ε_0 настільки малим, щоб

$$\varepsilon_0^{\frac{1}{2m}} M(\mu_1) \mu_1^{-2} \leq 1.$$

Тоді

$$\|U(\tau, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{r+1} \mu, \quad \tau \in [0, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

де $\mu = 3\mu_1(\sigma_7 + 2L + 2L \underset{\sim}{\sigma_0} \sigma_1) e^{\sigma_3 L}$, і теорему 2 в цьому випадку можна переформулювати так.

Теорема 3. *Нехай виконуються всі умови теореми 2, крім нерівності (17), і ряд (23) збігається рівномірно на множині* $\tilde{G}$. *Тоді для довільного* $\mu > 0$ *існує таке* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu) > > 0$, *що*

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \varepsilon)\| + \varepsilon \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| < \mu \varepsilon^{r+1}, \quad \tau \in [0, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Нарешті, розглянемо випадкок, коли в початкових умовах (3) і (6) $\Omega(\tau) \equiv 0$, $\tau \in \in [-\Delta, 0]$, тобто

$$\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon) = \bar{\varphi}(\tau-\Delta,\varepsilon) = g(\tau-\Delta,\varepsilon), \quad \tau \in [0,\Delta].$$

У зв'язку з нерівністю (4) $\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon)$ не є швидко змінною фазою на проміжку $(0,\Delta)$ і усереднення системи (1) за змінними φ, φ_Δ на ньому не є ефективним [1, с. 34]. Природно в такому випадку вихідну систему усереднити лише по φ при $\tau \in [0,\Delta]$ і по φ, φ_Δ при $\tau > \Delta$. Побудуємо розривну усереднену систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k a_k(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\tau) + \varepsilon^{r+1}\bar{A}(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\tau,\varepsilon),$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^{k-1} b_k(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\tau) + \varepsilon^{r}\bar{B}(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\tau,\varepsilon), \tag{24}$$

$$\bar{x}(\tau,\varepsilon) = f(\tau), \quad \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon) = g(\tau,\varepsilon), \quad \tau \in [-\Delta,0],$$

в якій $\big(\bar{A}(\bar{y},\tau,\varepsilon), \bar{B}(\bar{y},\tau,\varepsilon)\big) = C_0(\bar{y},\tau,\varepsilon)$ при $\tau > \Delta$,

$$\big(\bar{A}(\bar{y},\tau,\varepsilon), \bar{B}(\bar{y},\tau,\varepsilon)\big) = \lim_{T\to\infty} T^{-m} \int_0^T \ldots \int_0^T C(\bar{y},\varphi,g(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\,d\varphi_1 \ldots d\varphi_m =$$

$$= {\sum}' C_s(\bar{y},\tau,\varepsilon) e^{i(\underset{\sim}{\lambda_s}, g(\tau,\varepsilon))}$$

при $\tau \in [0,\Delta]$, $\bar{y} = (\bar{x},\bar{x}_\Delta)$, а ${\sum}'$ означає підсумовування за всіма тими s, для яких перші m координат $2m$-вимірного вектора λ_s є нулями, тобто $\lambda_s = (0, \underset{\sim}{\lambda_s})$.

Нехай $\bar{S}_1(\tau)$, $\tau \in (0,\Delta)$, — вронскіан системи m функцій, що є координатами m-вимірного вектора $\bar{\omega}(\tau) = \omega(\xi(\tau), f(\tau-\Delta), \tau)$, і

$$h(\tau,\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{\frac{1}{m}}, & \tau \in [0,\Delta], \\ \varepsilon^{\frac{1}{2m}}, & \tau \in (\Delta, L]. \end{cases}$$

Зауважимо, що в наступній теоремі через $x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$ і $\bar{x}(\tau,\varepsilon)$, $\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)$ позначено розв'язки задач (1), (3) і (24), (6) з $\Omega(\tau) \equiv 0$, $\tau \in [-\Delta, 0]$.

Теорема 4. *Нехай:*
1) розв'язок $\xi(\tau)$ задачі (8) визначено для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$;
2) виконуються умови (2), (4), (9), (15);
3) $\Omega(\tau) \equiv 0$ $\forall \tau \in [-\Delta, 0]$;
4) $|\bar{S}_1(\tau)| \geq \sigma_0$, $\tau \in (0,\Delta)$; $|S_2(\tau)| \geq \sigma_0$, $\tau \in (\Delta, L]$, $\tau \neq \Delta j$, $j = 2,3,\ldots$.
Тоді існують такі сталі $\varepsilon_1 > 0$ і $\sigma_{10} > 0$, що при $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$ для всіх $\tau \in [0,L]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\varepsilon)\| + \varepsilon\|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma_{10}\varepsilon^{r+1} h(\tau,\varepsilon). \tag{25}$$

Доведення цієї теореми по суті повторює доведення теореми 1. Відмінність полягає лише в тому, що спочатку слід обґрунтувати оцінку (25) на відрізку $[0, \Delta]$, скориставшись при цьому нерівністю $|\bar{S}_1(\tau)| \geq \sigma_0$ та оцінкою осциляційного інтеграла

$$\left\| \int_{\bar{\tau}}^{\tau} F(t) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\Delta}^{t} (\tilde{\lambda}_s, \bar{\omega}(l)) dl \right\} dt \right\| \leq \tilde{\sigma}_0 \varepsilon^{\frac{1}{m}} \left[\left(1 + \frac{1}{\|\tilde{\lambda}_s\|} \right) \sup \|F(t)\| + \frac{1}{\|\tilde{\lambda}_s\|} \sup \left\| \frac{dF(t)}{dt} \right\| \right],$$

$$\tau \in [0, \Delta], \quad \bar{\tau} \in [0, \Delta].$$

При $\tau > \Delta$ слід використати нерівність $|S_2(\tau)| \geq \sigma_0$ і оцінку (13).

1. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 474 с.
2. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. — Киев: Вища шк., 1979. — 247 с.
3. *Самойленко А. М., Бигун Я. И.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1999. — **35**, № 1. — С. 8 – 14.
4. *Кузнецова И. В.* Об усреднении в многочастотных системах с запаздыванием // Там же. — 1981. — **17**, № 6. — С. 1128 – 1131.
5. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
6. *Шпакович В. П.* Метод усреднения для многочастотных систем с запаздыванием // Укр. мат. журн. — 1985. — **37**, № 4. — С. 535 – 539.
7. *Бігун Я.Й.* Усереднення в багаточастотних системах з лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2005. — Вип. 269. — С. 5 – 10.

Одержано 09.02.2006