УДК 517.9

БІФУРКАЦІЯ КОІЗОТРОПНИХ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ПРИ ЛОКАЛЬНО ГАМІЛЬТОНОВИХ ЗБУРЕННЯХ ІНТЕГРОВНИХ СИСТЕМ ТА НЕВИРОДЖЕНІЙ ДЕФОРМАЦІЇ СИМПЛЕКТИЧНОЇ СТРУКТУРИ

Ю. В. Ловейкін, І. О. Парасюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6
e-mail: yuriyl@ua.fm
pio@univ.kiev.ua

We study the bifurcation problem for a Cantor set of coisotropic invariant tori in the cases where a Liouville integrable system undergoes locally Hamiltonian perturbations and, at the same time, a deformation of the symplectic structure of the phase space. We consider a new case in which the deformed symplectic structure gives rise to a nondegenerate Poisson bracket matrix of variable actions.

Вивчається задача про біфуркацію канторової множини коізотропних інваріантних торів у випадку, коли інтегровна за Ліувіллем гамільтонова система зазнає локально гамільтонових збурень при одночасній деформації симплектичної структури фазового простору. Розглядається новий випадок, коли здеформована симплектична структура породжує невироджену матрицю дужок Пуассона змінних дії.

1. Вступ. У даній роботі продовжено дослідження, розпочаті в [1]. На $2n$-вимірному симплектичному многовиді (M^{2n}, ω_0^2) з симплектичною структурою ω_0^2 розглядаємо інтегровну за Ліувіллем систему з гамільтоніаном $H_0 : M^{2n} \to \mathbb{R}$. Нехай ця система зазнає збурень вигляду

$$dH_0 \mapsto dH_0 + \mu\omega^1, \quad \omega_0^2 \mapsto \omega_0^2 + \mu\omega_1^2,$$

де μ — малий параметр, а 1-форма ω^1 і 2-форма ω_1^2 є замкненими, але не точними. Таким чином, маємо випадок, коли векторне поле інтегровної гамільтонової системи збурюється локально гамільтоновим векторним полем і одночасно деформується симплектична структура, внаслідок чого може відбуватися зміна класу когомологій відповідної 2-форми. За таких обставин, як і в роботі [1], будемо розглядати задачу про біфуркацію канторової множини коізотропних інваріантних торів збуреної системи поблизу так званого квазістаціонарного положення (означення наведено в п. 2). Однак на відміну від зазначеної роботи будемо вивчати випадок, коли здеформована симплектична структура породжує невироджену матрицю дужок Пуассона змінних дії (ці змінні „нумерують” інваріантні тори незбуреної системи). Внаслідок такої невиродженості квазістаціонарні положення ізольовані, в той час як у [1] вони утворювали деякий многовид. Через цю обставину підвищується ступінь виродженості гамільтоніана в сенсі його залежності від тих внутрішніх параметрів системи, які дозволяють контролювати вплив малих знаменників у процесі побудови збурених інваріантних торів. Зазначимо, що вироджений випадок при глобально гамільтонових збуреннях інтегровної за Ліувіллем системи вперше було досліджено в [2, 3].

Опишемо структуру даної роботи. В п. 2 наведено основні припущення щодо досліджуваної системи, зокрема вимагається, щоб вона мала невироджену квазістаціонарну точку еліптичного типу. Сформульовано основну теорему про біфуркацію канторової множини коізотропних інваріантних торів. У п. 3 збурену систему зведено до спеціального вигляду, зручного для застосування результатів роботи [1] про існування інваріантних торів локально гамільтонових систем. Доведення основної теореми завершено в п. 4.

2. Формулювання основного результату. Нехай $\{F_i\colon M^{2n} \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$ — повний інволютивний набір перших інтегралів незбуреної системи. Розглянемо відображення $F = (F_1, \ldots, F_n)\colon M^{2n} \to \mathbb{R}^n$ і припустимо, що $c \in F(M^{2n})$ — таке некритичне значення, для якого $F^{-1}(c)$ містить зв'язну компоненту M_c. Тоді M_c є лагранжевим підмноговидом, дифеоморфним n-вимірному тору $\mathbb{T}^n$ [4]. Крім того, в $\mathbb{R}^n$ існує однозв'язна область $G \in F(M^{2n})$ значень c з указаною властивістю, а на множині $\mathcal{N} = \bigcup_{c\in G} M_c$ визначено симплектичну дію тора $\mathbb{T}^n$, яка задається абелевою групою симплектоморфізмів $\{\Phi^q : \mathcal{N} \to \mathcal{N}, q \in \mathbb{T}^n\}$ і орбітами якої є многовиди $M_c \subset \mathcal{N}$.

Як і в [2], обчисливши усереднену форму $\bar{\omega}_1^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} (\Phi^q)^* \omega_1^2\, dq$, для кожного $a \in \mathbb{R}^n$ визначимо векторне поле $X_a(x) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi^{at}(x)$ і введемо кососиметричну білінійну форму (коцикл) $\mathcal{C}(a, b) = \bar{\omega}_1^2(X_a, X_b)$, $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Припущення 1. *Білінійна форма $\mathcal{C}$ є невиродженою, тобто* $\ker \mathcal{C} = \{0\}$.

З цього припущення випливає, що n має бути парним.

Використовуючи теорему Дарбу – Вейнстейна, введемо в $\mathcal{N}$ координати прямого добутку $(p, q|\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, типу „дія-кут", в яких 1-форма збуреної системи і матриця дужок Пуассона відповідно набирають вигляду

$$\omega_\mu = dH_0 + \mu\omega^1 = dH_0(p) + \mu\, d(H_1(p, q) + \beta \cdot q),$$

$$\{p, p\} = \mu C, \quad \{q, p\} = E_n.$$

Тут β — сталий вектор, $\mu \in (-\mu_0; \mu_0)$ — малий параметр, $\mu_0 \in (0; 1)$, E_n — одинична матриця розміру $n \times n$, C — кососиметрична матриця форми $\mathcal{C}$ в координатах q, а саме $\mathcal{C}(a, b) = Ca \cdot b$, де символ «·» позначає скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$ (тут і далі не виписуємо елементи матриці дужок Пуассона, які дорівнюють нулю).

Припущення 2. *Для деяких додатних чисел R_0, ρ_0 функції H_0 та H_1 є дійсно-аналітичними в областях $\{p \in \mathbb{C}^n : |p| < R_0\}$ і $\{(p, q) \in \mathbb{C}^{2n} : |p| < R_0,\ |\mathrm{Im}\, q| < \rho_0\}$ відповідно.*

Тут і далі норму $|\bullet|$ для вектора визначаємо як максимум модулів його компонент.

Зменшивши в разі потреби R_0, ρ_0, з огляду на нерівності Коші без обмеження загальності міркувань можна вважати, що в зазначених областях функції H_0 та H_1 обмежені разом з усіма своїми частинними похідними довільного порядку.

Далі замість 1-форми ω_μ будемо розглядати багатозначний гамільтоніан $H_\mu := H_0(p) + \mu(H_1(p, q) + \beta \cdot q)$. При цьому $H_0(p) + \mu H_1(p, q)$ та $\mu\beta \cdot q$ є відповідно однозначною та багатозначною складовими гамільтоніана H_μ.

Відомо, що у класичному випадку, коли $C = 0$, $\beta = 0$, нерезонансний інваріантний тор, заданий рівнянням $p = p_0$, де p_0 визначається діофантовими умовами раціональної незалежності компонент вектора частот $H_0{}'(p_0)$, не руйнується в будь-якому порядку теорії збурень. У некласичному випадку, який ми зараз розглядаємо, ситуація є іншою, і для того, щоб незбурена система мала інваріантні тори, які не руйнуються хоча б у першому наближенні теорії збурень, необхідно, щоб виконувалося додаткове припущення, природність якого стає зрозумілою із наступних міркувань.

Запишемо рівняння руху збуреної системи

$$\dot{p} = \mu(CH_0{}'(p) - \beta - H_1{}'_q(p,q)) + \mu^2 CH_1{}'_p(p,q), \quad \dot{q} = H_0{}'(p) + \mu H_1{}'_p(p,q).$$

Відомо, що коли відображення $p \mapsto H_0{}'(p)$ задовольняє певні природні умови невиродженості, еволюція повільних змінних p на проміжку часу довжини $1/|\mu|$ для більшості початкових значень з довільною точністю описується усередненою системою

$$\dot{p} = \mu(CH_0{}'(p) - \beta),$$

якщо μ є досить малим за модулем (точні формулювання див. у [5–7]). У загальному випадку в усередненій системі може відбуватися систематичний дрейф змінної дії таким чином, що величина її відхилення від початкового значення за час $1/|\mu|$ матиме порядок $O(1)$ при як завгодно малому за модулем μ. Зрозуміло, що в цій ситуації слід очікувати руйнування інваріантних торів. Водночас, якщо p_* — таке значення змінної дії, для якого

$$CH_0{}'(p_*) = \beta, \tag{1}$$

а компоненти вектора частот $H_0{}'(p_*)$ задовольняють діофантові умови раціональної незалежності, тор, який відповідає точці p_*, буде інваріантним і для системи першого наближення теорії збурень. Аналіз поведінки траєкторій в околі цього тора природно розпочати з системи у варіаціях першого наближення, яка має вигляд

$$\dot{p} = \mu CH_0''(p_*)p, \quad \dot{q} = H_0{}'(p_*) + \mu \bar{H}_1{}'_p(p_*),$$

де $\bar{H}_1$ — середнє значення функції H_1 по тору. Нас зараз буде цікавити негрубий випадок, коли тривіальний тор цієї системи є стійким.

Точку p_* назвемо *невиродженою квазістаціонарною точкою еліптичного типу* (за аналогією з [1]), якщо вона задовольняє рівність (1) і при цьому матриця $CH_0''(p_*)$ має різні суто уявні власні числа $\pm \mathrm{i}\,\bar{\lambda}_j(p_*)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $m = n/2$.

Зауважимо, що система у варіаціях для тора, який відповідає точці зазначеного типу, демонструє, в загальному випадку, некласичну динаміку: її квазіперіодичні рухи покривають інваріантні тори вимірності $3n/2$.

Припущення 3. *Існує невироджена квазістаціонарна точка еліптичного типу p_* така, що вектор частот $H_0{}'(p_*)$ з деякими $\gamma > 0$, $\tau \geq n$ задовольняє діофантові умови*

$$|\mathbf{k} \cdot H_0{}'(p_*)| \geq \gamma |\mathbf{k}|^{-\tau} \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\},$$

а вектор $\bar{\lambda}(p_*) = (\bar{\lambda}_1(p_*), \ldots, \bar{\lambda}_m(p_*))$ — умови відсутності резонансів до порядку l включно

$$\mathbf{j} \cdot \bar{\lambda}(p_*) \neq 0 \quad \forall\, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^m : 0 < |\mathbf{j}| \leq l, \tag{2}$$

де $l \geq 7$ — деяке натуральне число.

Якщо припущення 3 справджується, то існує поліноміальна заміна змінних $p = w + O(|w|^2)$, яка зводить матрицю дужок Пуассона $\{p, p\}$ до вигляду

$$\{w, w\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix} =: I, \tag{3}$$

а функцію $H_0(p_*+p) - H_0{}'(p_*) \cdot p - H_0(p_*)$ до нормальної форми степеня l

$$\frac{1}{2}\,\bar{\Lambda}(p_*)w^2 + \bar{F}_4(p_*)w^4 + \bar{F}_6(p_*)w^6 + \ldots + \bar{F}_{2[l/2]}(p_*)w^{2[l/2]} + O(w^{l+1}),$$

де $\bar{F}_{2k}(p_*)w^{2k}$ — однорідний поліном степеня k від змінних $y_j = (w_j^2 + w_{m+j}^2)/2$, $j = 1, \ldots, m$, зокрема

$$\bar{F}_4(p_*)w^4 = A_2(p_*)y^2, \quad y = (y_1, \ldots, y_m). \tag{4}$$

Припущення 4. *Матриця квадратичної форми $A_2(p_*)y^2$ не є виродженою.*

Сформулюємо тепер основний результат про біфуркацію канторової множини коізотропних інваріантних торів збуреної системи в околі тора, заданого в координатах (p, q) рівнянням $p = p_*$.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення 1–4. Тоді для кожного $\mu \in (-\mu_*; \mu_*)$, де $\mu_* > 0$ є досить малим, в $O(|\mu|)$-околі інваріантного тора $\mathbb{T}_*^n$ незбуреної системи, який відповідає квазістаціонарній точці p_*, існує відкрита множина $\mathcal{F}_\mu$, розшарована $(m+n)$-вимірними коізотропними торами m-параметричної сім'ї $\{\mathbb{T}_\mu^{m+n}(\xi)\}_{\xi \in \mathfrak{B}(\rho,R)}$ з областю зміни параметрів $\mathfrak{B}(\rho, R) := \{\xi \in \mathbb{R}^m : \rho < |\xi| < R\}$. Область $\mathfrak{B}(\rho, R)$ містить канторову множину $\mathfrak{C}_\mu$ таку, що для кожного $\xi \in \mathfrak{C}_\mu$ в $o(|\mu|^3)$-околі тора $\mathbb{T}_\mu^{m+n}(\xi)$ існує інваріантний тор $\tilde{\mathbb{T}}_\mu^{m+n}(\xi)$ збуреної системи, який несе на собі квазіперіодичні рухи з $m+n$ раціонально незалежними частотами. Існує таке гладке відображення $\lambda_\mu : \mathfrak{B}(\rho, R) \mapsto \mathbb{R}^m$, що $\lambda_\mu(\xi) = O(|\mu|)$ і вектор базисних частот квазіперіодичних рухів на торі $\tilde{\mathbb{T}}_\mu^{m+n}(\xi)$ має вигляд $(\lambda_\mu(\xi), H_0{}'(p_*))$. Відносна міра множини інваріантних торів збуреної системи в множині $\mathcal{F}_\mu$ близька до 1, а саме,*

$$\operatorname{mes} \mathcal{F}_\mu / \operatorname{mes} \bigcup\nolimits_{\xi \in \mathfrak{C}_\mu} \tilde{\mathbb{T}}_\mu^{m+n}(\xi) \to 1, \quad \mu \to 0.$$

При цьому множина $\mathcal{F}_\mu$ в границі, коли $\mu \to 0$, перетворюється в тор $\mathbb{T}_*^n$.

3. Допоміжна теорема. Зведемо розглядувану систему до спеціального вигляду з тим, щоб до неї можна було застосувати КАМ-теорію для встановлення існування квазіперіодичних рухів.

Спочатку виконаємо перетворення $p \mapsto p_0 + p$, в якому p_0 — n-вимірний параметр з областю зміни $\{|p_0| < R_1\}$, де $R_1 < R_0$. Одержану систему з гамільтоніаном $H_0(p_0 + p) + \mu(H_1(p_0+p, q) + \beta \cdot q)$ усереднимо за кутовими змінними при малих $|p|$. З цією метою виконаємо симплектичне перетворення у вигляді зсуву за час $t = 1$ вздовж траєкторій гамільтонової системи з гамільтоніаном (інфінітезимальною твірною функцією) вигляду $\mu S_1(p,q,p_0)+\mu^2 S_2(p,q,p_0)+\ldots+\mu^l S_l(p,q,p_0)$. Вважаючи поки що невідомі функції $S_1(p,q,p_0),\ldots,S_l(p,q,p_0)$ дійсно-аналітичними щодо своїх аргументів, це перетворення можна подати як

$$\begin{aligned} p &\mapsto p-\mu {S_1}'_q-\mu^2({S_2}'_q+P_2)-\mu^3({S_3}'_q+P_3)+\ldots, \\ q &\mapsto q+\mu {S_1}'_p+\mu^2({S_2}'_p+Q_2)+\mu^3({S_3}'_p+Q_3)+\ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

де P_j, Q_j — деякі поліноми від частинних похідних першого та вищих порядків функцій $S_1,\ldots,S_{j-1}$.

Коефіцієнт при μ^j у розвиненні однозначної складової перетвореного гамільтоніана за степенями μ матиме вигляд $H_j(p,q,p_0)-{H_0}'(p_0+p)\cdot {S_j}'_q(p,q,p_0)$, $j=1,2,\ldots,l$, де дійсно-аналітичні функції $H_j(p,q,p_0)$ не залежать від S_k, $k\geq j$. Вигляд багатозначної складової не змінюється.

Шукатимемо кожну функцію S_j у вигляді полінома щодо p : $S_j(p,q,p_0)=\sum\limits_{k=0}^{l} S_{jk}(q,p_0)p^k$, де $S_{jk}(q,p_0)p^k$ позначає однорідну форму степеня k щодо p. Для кожного $j=1,\ldots,l$ розвинемо коефіцієнт при μ^j однозначної складової перетвореного гамільтоніана за степенями p. Однорідна щодо p форма степеня k, $k=0,1,\ldots,l$, у формулі Тейлора для цього коефіцієнта має вигляд $\hat{H}_{jk}(q,p_0)p^k-{H_0}'(p_0)\cdot {S_{jk}}'_q(q,p_0)p^k$, де

$$\hat{H}_{jk}(q,p_0):=\frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k}{\partial p^k}\right|_{p=0}\left(H_j(p,q,p_0)-\sum_{i=0}^{k-1}\left({H_0}'(p_0+p)\cdot {S_{ji}}'_q(q,p_0)\right)\,p^i\right).$$

Тепер коефіцієнти форми S_{jk} визначаємо з гомологічних рівнянь

$${H_0}'(p_0)\cdot\frac{\partial}{\partial q}S_{jk}=[\mathcal{P}_N-\mathcal{P}_0]\,\hat{H}_{jk}(p_0,q),\quad k=0,1,\ldots,l,$$

де $\mathcal{P}_0(\bullet):=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}\bullet\,dq$, $\mathcal{P}_N:=\sum_{0\leq|\mathbf{k}|\leq N}e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot q}\mathcal{P}_0(\bullet\,e^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot q})$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n$, $N\in\mathbb{N}$. Розв'язки цих рівнянь знаходимо в області нерезонансних значень p_0, яку визначають нерівності

$$|p_0|<R_1,\quad |\mathbf{k}\cdot {H_0}'(p_0)|\geq\frac{\gamma}{2}\,|\mathbf{k}|^{-\tau}\quad\forall\,\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n, 0<|\mathbf{k}|\leq N. \tag{6}$$

Якщо вибрати $T=T(\rho_0)>0$ досить великим, то, поклавши $N=\mathrm{Tr}|\ln\varepsilon|$, де $\varepsilon\in[|\mu|^d;\varepsilon_*]$ — додатковий додатний малий параметр, а r і d — деякі додатні числа, матимемо оцінку

$$\left|[\mathrm{Id}-\mathcal{P}_N]\,\hat{H}_{jk}(p_0,q)\right|<\varepsilon^r$$

при $|p_0|<R_1$, $|\mathrm{Im}\,q|<\rho_0/2$ і досить малому ε_*. В результаті гамільтоніан перетвореної системи для p_0 з області (6), $|p|<R_0/2$ та $|\mathrm{Im}\,q|<\rho_0/2$ набирає вигляду

$$\begin{aligned} &{H_0}'(p_0)\cdot p+\frac{1}{2}H_0''(p_0)p^2+\ldots+\mu\left(\overline{{H_1}'_p}(p_0)\cdot p+\frac{1}{2}\overline{{H_1}''_{pp}}(p_0)p^2+\ldots\right)+ \\ &\qquad+\mu^2\left(\overline{{H_2}'_p}(p_0)\cdot p+\frac{1}{2}\overline{{H_2}''_{pp}}(p_0)p^2+\ldots\right)+\ldots+O(p^{l+1})+\mu\,O(\varepsilon^r)+\mu\beta\cdot q, \end{aligned}$$

де риски над символами похідних позначають їхні середні за змінними q по тору $\mathbb{T}^n$, тобто значення оператора $\mathcal{P}_0$ на відповідних функціях. При цьому тут і далі ми користуємося тим, що вигляд гамільтонової системи не зміниться, якщо від її гамільтоніана відняти довільну сталу (залежну від p_0).

Далі виконуємо масштабні перетворення

$$p \mapsto \mu p, \quad H_\mu \mapsto \mu^{-1} H_\mu, \quad \{\bullet, \bullet\} \mapsto \mu\{\bullet, \bullet\}.$$

В результаті дістаємо систему з гамільтоніаном

$$H_0{}'(p_0) \cdot p + \frac{\mu}{2}\, H_0''(p_0) p^2 + \frac{\mu^2}{3!}\, H_0'''(p_0) p^3 + \ldots + \left(\mu \overline{H_1{}'_p}(p_0) \cdot p + \frac{\mu^2}{2}\, \overline{H_1{}''_{pp}}(p_0) p^2 + \ldots\right) +$$
$$+ \mu \left(\mu \overline{H_2{}'_p}(p_0) \cdot p + \frac{\mu^2}{2}\, \overline{H_2{}''_{pp}}(p_0) p^2 + \ldots\right) + \ldots + O(\mu^l + \varepsilon^r) + \beta \cdot q \qquad (7)$$

і дужками Пуассона, заданими рівностями

$$\{p, p\} = C, \quad \{q, p\} = E_n.$$

Введемо нові кутові змінні $\psi = q - C^{-1} p$. Тоді матриця дужок Пуассона розщеплюється на блоки

$$\{p, p\} = C, \quad \{\psi, \psi\} = C^{-1},$$

а вигляд перетвореного гамільтоніана відрізнятиметься від (7) лише тим, що першим доданком буде $\big(H_0{}'(p_0) - C^{-1}\beta\big) \cdot p$, а багатозначною складовою — $\beta \cdot \psi$.

Тепер покладемо $p_0 = p_0(\mu)$, де функція $p_0(\mu)$ визначається неявно умовами

$$H_0{}'(p_0) + \mu \overline{H_1{}'_p}(p_0) + \mu^2 \overline{H_2{}'_p}(p_0) + \ldots + \mu^l \overline{H_l{}'_p}(p_0) - C^{-1}\beta = 0, \quad p_0(0) = p_*. \qquad (8)$$

З урахуванням припущення 3 $p_0(\mu)$ є дійсно-аналітичною функцією при всіх досить малих $|\mu|$, причому $p_0(\mu) = p_* + O(|\mu|)$, $\mu \to 0$.

Важливо зауважити, що при виконанні припущення 3 нерівності (6) справджуватимуться для $p_0 = p_0(\mu)$ при всіх досить малих за модулем μ, адже $N = O\big(\big|\ln|\mu|\big|\big)$.

В результаті виконаних перетворень, групуючи доданки з однаковими степенями p^k, $k = 1, 2, \ldots, l$, і враховуючи рівності (8), дістаємо систему, гамільтоніан якої можна подати у вигляді

$$H_\mu = \sum_{j=2}^{l} \mu^{j-1}\, H_j^*(\mu) p^j + O(|\mu|^l + \varepsilon^r) + \beta \cdot \psi,$$

де коефіцієнти форми $H_j^*(\mu)$ є поліномами щодо μ степеня, не вищого ніж $l + 2 - j$, причому $H_j^*(0) = \dfrac{1}{j!}\, H_0^{(j)}(p_*)$.

У просторі $\mathbb{R}^n$ змінних p можна ввести базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}$, $m = n/2$ так, щоб матриця дужок Пуассона нових змінних $w_j = \alpha_j\, p$, $j = 1, 2, \ldots, 2m$, набрала вигляду

$$\{w, w\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix} =: I.$$

Нехай $F_2(\mu)w^2$ — квадратична форма, одержана з $H_2^*(\mu)p^2$ після введення координат w. Оскільки з огляду на припущення 3 при всіх досить малих за модулем μ власні числа матриці $IF_2(\mu)$ є суто уявними і різними, то число $\mu_* > 0$ можна вибрати так, щоб існувала дійсно-аналітична щодо параметра μ сім'я лінійних симплектичних перетворень $w \mapsto W(\mu)w$, $|\mu| < \mu_*$, яка зводить квадратичну форму $F_2(\mu)w^2$ до діагонального вигляду $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\tilde\lambda_i(\mu)(w_i^2 + w_{m+i}^2) = \frac{1}{2}\tilde\Lambda(\mu)w^2$, $\tilde\Lambda := \operatorname{diag}\{\tilde\lambda_1,\ldots,\tilde\lambda_m,\tilde\lambda_1,\ldots,\tilde\lambda_m\}$, причому $\tilde\lambda_j(\mu) = \bar\lambda_j(p_*) + O(|\mu|)$, $\mu \to 0$, $j = 1,\ldots,m$.

Тепер гамільтоніан H_μ набирає вигляду

$$H_\mu = \frac{\mu}{2}\tilde\Lambda(\mu)w^2 + \mu^2F_3(\mu)w^3 + \mu^3F_4(\mu)w^4 + \ldots + \mu^{l-1}F_l(\mu)w^l + O(|\mu|^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi. \tag{9}$$

Зведемо перші $l-1$ доданки гамільтоніана (9) до нормальної форми за змінними w. Зрозуміло, що цього можна досягти за допомогою перетворення, яке зводить до нормальної форми гамільтоніан

$$\frac{1}{2}\tilde\Lambda(\mu)w^2 + \mu F_3(\mu)w^3 + \mu^2F_4(\mu)w^4 + \ldots + \mu^{l-2}F_l(\mu)w^l. \tag{10}$$

Інфінітезимальну твірну функцію нормалізуючого перетворення шукаємо у вигляді

$$S = \mu S_3(\mu)w^3 + \mu^2S_4(\mu)w^4 + \ldots + \mu^{l-2}S_l(\mu)w^l.$$

Зауваживши, що відповідно до формули Тейлора потік гамільтонового векторного поля з гамільтоніаном S за час $t = 1$ перетворює довільну функцію $F(w)$ за правилом

$$F \mapsto F + \{F,S\} + \frac{1}{2}\{\{F,S\},S\} + \frac{1}{3!}\{\{\{F,S\},S\},S\} + \ldots,$$

перетворений гамільтоніан (10) подамо у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\tilde\Lambda(\mu)w^2 &+ \mu\left(F_3(\mu)w^3 + \left\{\frac{1}{2}\tilde\Lambda(\mu)w^2, S_3w^3\right\}\right) + \\ &+ \mu^2\left(F_4(\mu)w^4 + \left\{\frac{1}{2}\tilde\Lambda(\mu)w^2, S_4w^4\right\} + \{F_3(\mu)w^3, S_3w^3\} + \right.\\ &+ \left.\frac{1}{2}\left\{\left\{\frac{1}{2}\tilde\Lambda(\mu)w^2, S_3w^3\right\}, S_3w^3\right\}\right) + \ldots.\end{aligned}$$

Тепер легко бачити, що оскільки для будь-яких цілих невід'ємних j, k дужки Пуассона форм степенів $j+2$ та $k+2$ є формою степеня $j+k+2$ і, отже, $\{\mu^jA_{j+2}w^{j+2}, \mu^kB_{k+2}w^{k+2}\} = \mu^{j+k}C_{j+k+2}\,w^{j+k+2}$, то член степеня $j+2$ щодо w нормальної форми гамільтоніана (10) можна одержати множенням на μ^j члена степеня $j+2$ нормальної форми гамільтоніана $\frac{1}{2}\tilde\Lambda(\mu)w^2 + \sum_{j=3}^{l}F_j(\mu)w^j$. З огляду на те, що для всіх досить малих значень $|\mu|$ вектор $\tilde\lambda(\mu) = (\tilde\lambda_1(\mu),\ldots,\tilde\lambda_m(\mu))$ задовольняє умову

$$\min_{0<|\mathbf{j}|\le l}|\tilde\lambda(\mu)\cdot\mathbf{j}| \ge \frac{1}{2}\min_{0<|\mathbf{j}|\le l}|\bar\lambda(p_*)\cdot\mathbf{j}| > 0,$$

а також на той факт, що коефіцієнти $F_j(\mu)$ є дійсно-аналітичними функціями в околі $\mu = 0$, можна зробити такі висновки:

1) після нормалізації до порядку l включно гамільтоніан $\frac{1}{2}\,\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \sum_{j=3}^{l} F_j(\mu)w^j$ набирає вигляду

$$\frac{1}{2}\,\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \tilde{F}_4(\mu)w^4 + \tilde{F}_6(\mu)w^6 + \ldots + \tilde{F}_{2[l/2]}(\mu)w^{2[l/2])} + O(w^{l+1}),$$

де $\tilde{F}_{2k}(\mu)w^{2k} = \tilde{A}_k(\mu)y^k$ — однорідна форма степеня k від змінних $y_j = (w_j^2 + w_{m+j}^2)/2$, $j = 1, \ldots, m$;

2) коефіцієнти $\tilde{F}_{2k}(\mu)$ є дійсно-аналітичними в околі $\mu = 0$ і при $\mu \to 0$ переходять у відповідні коефіцієнти $\bar{F}_{2k}(p_*)$ нормальної форми степеня l функції $H_0(p_*+p) - H_0{}'(p_*)\cdot p - H_0(p_*)$.

Таким чином, можна вважати, що гамільтоніан (9) зведено до вигляду

$$H_\mu = \frac{\mu}{2}\,\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \mu^3\tilde{F}_4(\mu)w^4 + \mu^5\tilde{F}_6(\mu)w^6 + \ldots + \mu^{2[l/2]-1}\tilde{F}_{2[l/2]}w^{2[l/2]} + O(|\mu|^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi.$$

Введемо тепер змінні $(y, \phi|\mathrm{mod}\,2\pi)$ за формулами

$$w_i = \sqrt{2(\xi_i + y_i)}\cos\phi_i, \quad w_{m+i} = \sqrt{2(\xi_i + y_i)}\sin\phi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

де $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — m-вимірний параметр. Тоді для дужок Пуассона матимемо рівності

$$\{\phi, y\} = E_m, \quad \{\psi, \psi\} = C^{-1}, \tag{11}$$

а збурений гамільтоніан набере вигляду

$$H_\mu = \mu\tilde{\lambda}(\mu)\cdot y + \mu^3\,\tilde{A}_2(\mu)(\xi{+}y)^2 + \ldots + \mu^{2[l/2]-1}\tilde{A}_{2[l/2]}(\mu)(\xi{+}y)^{2[l/2]} + O(|\mu|^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi,$$

або

$$H_\mu = \hat{\lambda}(\xi,\mu)\cdot y + \mu^3 G_2(y,\xi,\mu)y^2 + f_\varepsilon(y,\phi,\psi,\xi,\mu) + \beta\cdot\psi.$$

Тут $\hat{\lambda}(\xi,\mu) := \mu\tilde{\lambda}(\mu) + \sum_{j=2}^{2[l/2]}\mu^{2j-1}\big(\tilde{A}_j(\mu)\xi^j\big)'_\xi$, матриця квадратичної форми $G_2(y,\xi,\mu)y^2$ поліноміально залежить від y, ξ, μ, а $f_\varepsilon(y,\phi,\psi,\xi,\mu)$ — дійсно-аналітична функція в області

$$|y| < \rho, \quad |\mathrm{Im}\,\phi| < \rho, \quad |\mathrm{Im}\,\psi| < \rho, \quad \rho < |\xi| < R, \quad |\mu| < \mu_*, \tag{12}$$

де ρ, δ і R $(R > \rho)$ — деякі додатні числа, причому $f_\varepsilon(y,\phi,\psi,\xi,\mu) = O(|\mu|^l + \varepsilon^r)$ рівномірно щодо змінних ϕ, ψ, ξ, які задовольняють нерівності (12).

Зафіксуємо тепер додатні числа d та r так, щоб вони задовольняли нерівності

$$l > 6 + d, \quad r > 1 + 6/d,$$

і покладемо $\varepsilon = |\mu|^d$. Тоді для досить малого $\mu_* > 0$ в області (12) буде виконуватись нерівність

$$|f_{\mu^d}(y,\phi,\psi,\xi,\mu)| < |\mu|^{6+d}.$$

Нарешті, увівши функцію

$$h_\mu(y,\phi,\psi,\xi) = \mu^3 G_2(y,\xi,\mu)y^2 + f_{\mu^d}(y,\phi,\psi,\xi,\mu),$$

з урахуванням наведених вище міркувань сформулюємо такий допоміжний результат.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення 1 – 4. Тоді для кожного* $\mu \in (-\mu_*; \mu_*)$, *де* $\mu_* > 0$ *є досить малим, в* $O(|\mu|)$*-околі інваріантного тора незбуреної системи, який відповідає квазістаціонарній точці* p_*, *існує відкрита множина, яка розшаровується* $(m+n)$*-вимірними коізотропними торами* $\mathbb{T}^{m+n}_\mu(\xi) = \mathbb{T}^m_\mu(\xi) \times \mathbb{T}^n_\mu(\xi)$, *занумерованими* m *параметрами* $\xi \in \mathfrak{B}(\rho,R) := \{\xi \in \mathbb{R}^m : \rho < |\xi| < R\}$. *В околі кожного тора* $\mathbb{T}^{m+n}_\mu(\xi)$ *можна ввести дійсно-аналітичні і дійсно-аналітично залежні від* ξ *координати прямого добутку*

$$\{y \in \mathbb{R}^m\} \times \{\phi \in \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m\} \times \{\psi \in \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n\}$$

так, щоб цей тор задавався рівнянням $y = 0$, *змінні* ϕ *і* ψ *відігравали роль кутових координат на торах* $\mathbb{T}^m_\mu(\xi)$ *і* $\mathbb{T}^n_\mu(\xi)$ *відповідно, дужки Пуассона визначалися рівностями (11), а гамільтоніан збуреної системи мав вигляд*

$$H_\mu = \hat\lambda(\xi,\mu)\cdot y + h_\mu(y,\phi,\psi,\xi) + \beta\cdot\psi, \tag{13}$$

де $h_\mu(y,\phi,\psi,\xi)$ — *дійсно-аналітична функція змінних* $z = (y,\phi,\psi,\xi)$ *в області, яка визначається умовами (12). Крім того, в цій області виконано оцінки*

$$\max\left\{|h_\mu|_{y=0}, \left|h_{\mu}{}'_y\right|_{y=0}\right\} \le |\mu|^{6+d}, \quad \left|h_{\mu}{}''_{yy}\right|_{y=0} \le |\mu|^3 c, \quad \max\left\{|h_\mu|, \left|h_{\mu}{}'_z\right|, \left|h_{\mu}{}''_{zz}\right|\right\} \le c$$

з деякою сталою $c > 0$.

4. Доведення основної теореми. Застосуємо тепер до системи (13) локально гамільтонів варіант КАМ-теореми з роботи [1]. Введемо $(m+n)$-вимірні вектори $\varphi := (\phi,\psi)$, $\zeta := (0,\beta)$. Тоді

$$H_\mu = \hat\lambda(\xi,\mu)\cdot y + h_\mu(y,\varphi,\xi) + \zeta\cdot\varphi, \tag{14}$$

а для матриці дужок Пуассона матимемо

$$\{\varphi, y\} = \begin{pmatrix} E_m \\ 0_{n\times m}\end{pmatrix} =: \sigma, \quad \{\varphi,\varphi\} = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & C^{-1}\end{pmatrix} =: \chi.$$

Покладемо $r_\mu := |\mu|^3 |\ln|\mu|^d|^{-\tau-1}$. З урахуванням теореми 2, рівності $\sigma^{\mathrm T}\zeta = 0$ та теореми 1 і зауваження 1 з [1] можна зробити такий висновок: якщо зафіксувати довільним чином числа $\varkappa \in (0;1)$, $b \in (1/2;1)$, $s \in \mathbb{N}$, то число $\mu_* \in (0;1)$ можна вибрати так, щоб для кожного $\mu \in (-\mu_*,\mu_*)$ існували відображення

$$F_\mu(\varphi,\lambda,\xi) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^{m+n}\times\mathbb{R}^{2m} \mapsto \mathbb{R}^m), \quad \Delta_\mu(\lambda,\xi) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{2m} \mapsto \mathbb{R}^m)$$

такі, що для будь-яких λ, ξ, які задовольняють умови

$$|\lambda| < R, \quad \rho + r_\mu < |\xi| < R - r_\mu,$$

$$|\mathbf{j}\cdot\lambda+\mathbf{k}\cdot C^{-1}\beta| > |\mu|^3\gamma(|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|)^{-\tau} \quad \forall(\mathbf{j},\mathbf{k})\in\mathbb{Z}^{m+n}\setminus\{0\},$$

допоміжна система з гамільтоніаном $(\lambda+\mu^3\Delta_\mu(\lambda,\xi))\cdot y+h_\mu(y,\varphi,\xi)+\zeta\cdot\varphi$ мала інваріантний тор, заданий рівнянням $y = F_\mu(\varphi,\lambda,\xi)$, і при цьому C^s-норми зазначених відображень задовольняли нерівності

$$\max\{|F_\mu(\varphi,\lambda,\xi)|_s, |\Delta_\mu(\lambda,\xi)|_s\} \le c(s,\varkappa)|\mu|^{bd+3(1-s)}|\ln|\mu|^d|^{s(\tau+1)} \quad \forall\,\mu\in(-\mu_*,\mu_*),$$

де $c(s,\varkappa)$ — стала, яка залежить лише від s та $\varkappa$. Для того щоб цей результат застосувати до системи з гамільтоніаном (14), потрібно відповідно до модифікованого методу штучних параметрів [8] визначити $\lambda=\lambda_\mu(\xi)$ як неявну функцію зі співвідношення

$$\lambda+\mu^3\Delta_\mu(\lambda,\xi) = \hat\lambda(\xi,\mu) \equiv \mu\tilde\lambda(\mu)+\sum_{j=2}^{2[l/2]}\mu^{2j-1}\big(\tilde A_j(\mu)\xi^j\big)'_\xi\,.$$

Зрозуміло, що за умови достатньої малості μ_* для кожного $\mu\in(-\mu_*,\mu_*)$ така функція існує і є гладкою в області $\rho+2r_\mu<|\xi|<R-2r_\mu$. Крім того, $\lambda_\mu(\xi)=\mu\tilde\lambda(\mu)+2\mu^3A_2(p_*)\xi+$ $+O(\mu^4)$ і $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\lambda_\mu(\xi) = 2\mu^3A_2(p_*)+O(\mu^4)$. Відтак, зауваживши, що вектор $C^{-1}\beta = H_0{}'(p_*)$ задовольняє діофантові умови припущення 3, можна стверджувати, що для кожного $\mu\in$ $\in(-\mu_*,\mu_*)$ і для кожного $\xi\in\mathbb{R}^m$, яке справджує нерівності

$$\begin{gathered}\rho+2r_\mu<|\xi|<R-2r_\mu,\\ |\mathbf{j}\cdot\lambda_\mu(\xi)+\mathbf{k}\cdot C^{-1}\beta| > |\mu|^3\gamma(|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|)^{-\tau} \quad \forall\,(\mathbf{j},\mathbf{k})\in\mathbb{Z}^{m+n},\ \mathbf{j}\ne0,\end{gathered} \tag{15}$$

система з гамільтоніаном (14) має інваріантний тор, який задається рівнянням

$$y = F_\mu(\varphi,\lambda_\mu(\xi),\xi).$$

Для того щоб переконатися, що інваріантні тори існують для більшості значень параметра ξ з області $\rho<|\xi|<R$, оцінимо міру множини $\mathfrak{C}_\mu$, визначеної нерівностями (15). Спочатку розглянемо підмножину $\mathcal{X}_\mu$ обмеженої області $D\subset\mathbb{R}^m$, задану умовами

$$x\in D,\quad |\mathbf{j}\cdot(x_0+\mu^3x)+\mathbf{k}\cdot C^{-1}\beta| \le |\mu|^3\gamma(|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|)^{-\tau} \quad \forall\,(\mathbf{j},\mathbf{k})\in\mathbb{Z}^{m+n},\ \mathbf{j}\ne0, \tag{16}$$

де $x_0\in\mathbb{R}^m$ — фіксований вектор. Легко бачити, що для кожної фіксованої пари $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ такої, що $\mathbf{j}\ne0$, міра множини, заданої нерівностями (16), не перевищує міру множини

$$x\in D-\frac{1}{\mu^3}\left(x_0+\frac{\mathbf{k}\cdot C^{-1}\beta}{\|\mathbf{j}\|}\mathbf{j}\right),\quad |\mathbf{j}\cdot x|\le\gamma(|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|)^{-\tau}.$$

Оскільки відстань між гіперплощинами $\mathbf{j}\cdot x=\pm\gamma(|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|)^{-\tau}$ дорівнює $2\gamma\|\mathbf{j}\|^{-1}(|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|)^{-\tau}$, де $\|\bullet\|$ — евклідова норма, то ця міра не перевищує $\gamma C_1(m)(\operatorname{diam}D)^{m-1}\|\mathbf{j}\|^{-1}(|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|)^{-\tau}$, де стала $C_1(m)$ залежить лише від m. Але тоді за умови, що $\tau > m+n$, існує стала $C_2(m,n,\tau) > 0$ така, що

$$\mathrm{mes}\mathcal{X}_\mu \le \gamma\, C_1(m)(\mathrm{diam}\, D)^{m-1}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau} \sum_{|\mathbf{j}|+|\mathbf{k}|=k} \|\mathbf{j}\|^{-1} \le \gamma\, C_2(m,n,\tau)(\mathrm{diam}\, D)^{m-1}.$$

Тепер зауважимо, що відображення $x \mapsto \xi_\mu(x)$, визначене рівністю $\lambda_\mu(\xi) = \mu\tilde{\lambda}(\mu) + \mu^3 x$, є дифеоморфізмом, модуль якобіана якого близький до $|\det 2A_2(p_*)|^{-1}$. З цих міркувань випливає, що міру доповнення множини (15) до області $\rho < |\xi| < R$ можна зробити як завгодно малою за умови достатньої малості μ_* та γ.

5. Висновки. В даній роботі розглянуто задачу про збурення цілком інтегровної гамільтонової системи локально гамільтоновим векторним полем при одночасному деформуванні симплектичної структури. Вивчено випадок, коли внаслідок такого деформування змінні дії p, асоційовані з незбуреною системою, перестають комутувати, так що їхня матриця дужок Пуассона є невиродженою і має вигляд $\{p,p\} = \mu C$. Через цю обставину невироджені квазістаціонарні точки, які визначаються в просторі змінних дії умовами $CH_0{}'(p) = \beta$, $\det H_0''(p) \ne 0$, є ізольованими.

Основний результат проведеного дослідження на якісному рівні можна описати таким чином. Нехай існує нерезонансний інваріантний тор $\mathbb{T}^n_*$ незбуреної системи, який є поверхнею рівня змінних дії $p = p_*$, де p_* — квазістаціонарна точка еліптичного типу, що задовольняє умови нерезонансності з припущення 3. Доведено, що коли параметр збурення μ зміщується вправо або вліво від нульового значення, від тора $\mathbb{T}^n_*$ відгалужується канторова множина $3n/2$-вимірних коізотропних інваріантних торів. Ця множина майже повністю (в сенсі міри Лебега) заповнює деяку відкриту область, розташовану в $O(|\mu|)$-околі тора $\mathbb{T}^n_*$. Кожен із зазначених коізотропних інваріантних торів збуреної системи одержується шляхом вкладення прямого добутку торів $\mathbb{T}^m \times \mathbb{T}^n$ — розшарування над $\mathbb{T}^m$ з шаром $\mathbb{T}^n$. При такому вкладенні образ кожного шару $\mathbb{T}^n$ є деякою малою деформацією тора $\mathbb{T}^n_*$. Рухи на кожному коізотропному інваріантному торі є результатом суперпозиції повільних квазіперіодичних рухів по базі та швидких квазіперіодичних рухів по шару. При цьому вектор частоти цих швидких квазіперіодичних рухів збігається з вектором частот квазіперіодичних рухів на інваріантному торі $\mathbb{T}^n_*$ незбуреної системи.

Зазначимо, що для глобально гамільтонових систем ($\beta = 0$) за умови невиродженості матриці C описаний вище ефект виникнення канторової множини коізотропних інваріантних торів принципово неможливий.

Заслуговує на увагу випадок, коли лише частина власних чисел матриці $CH_0''(p_*)$ є суто уявними. Його аналізу буде присвячено окрему статтю.

1. *Ловейкін Ю. В., Парасюк І. О.* Теорема про збурення коізотропних інваріантних торів локально гамільтонових систем та її застосування // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 4. — С. 490 – 515.

2. *Парасюк І. О.* Біфуркація канторової множини коізотропних інваріантних торів гамільтонових систем при збуренні симплектичної структури // Там же. — 1998. — **1**, № 2. — С. 81 – 89.

3. *Кубічка А. А., Парасюк І. О.* Біфуркація гладкої у сенсі Вітні сім'ї коізотропних інваріантних торів гамільтонової системи при малій деформації симплектичної структури // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 5. — С. 610 – 624.

4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.

5. *Аносов Д. В.* Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — **24**, № 5. — С. 721 – 742.
6. *Kasuga T.* On the adiabatic theorem for the Hamaltonian system of differential equations in the classical mechanics // Proc. Jap. Acad. — 1961. — **37**, № 7. — P. 366 – 382.
7. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — М: Эдиториал УРСС, 2002. — 416 с.
8. *Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B.* Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order admits chaos // Lect. Notes Math. — Berlin: Springer, 1997. — **1645**. — 195 p.

Одержано 14.04.2006