УДК 517.956

АНАЛОГ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

А. Р. Хашимов

Ин-т математики АН Республики Узбекистан, Ташкент
e-mail: mathinst@uzsci.net

We consider the first boundary-value problem for a third order equation of combined type. Using Saint Venant's principle we study uniqueness classes for the solution of the problem in an unbounded region.

Розглядається перша крайова задача для рівнянь третього порядку складеного типу. З допомогою принципу Сен-Венана вивчено клас єдиності розв'язку задачі в необмеженій області.

Введение. Принцип Сен-Венана [1, 2] в плоской теории упругости выражается в виде априорной оценки для решения бигармонического уравнения, удовлетворяющего на части границы области однородным граничным условиям первой краевой задачи. Такие энергетические оценки впервые были получены в работах [3, 4]. Эти оценки не учитывают характера изменения формы тела при удалении от той части его границы, где приложены внешные силы. В работах [5–7] дается другое доказательство принципа Сен-Венана, учитывающее изменение формы тела. В настоящей статье приведен аналог принципа Сен-Венана для уравнения третьего порядка составного типа и, как его следствие, получены теоремы единственности первой краевой задачи в классах функций, растущих на бесконечности в зависимости от геометрических характеристик области.

Постановка задачи. В области $\Omega \subset R^n_+ = \{x : x_1 > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$lAu + Bu = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u|_{\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2} = 0, \quad l_0\, u|_{\sigma_1} = 0, \tag{2}$$

где

$$Au = a^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + a^i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u, \quad Bu = b^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + b^i(x)\, u_{x_i} + b(x)\, u,$$

$$lu = l_0\, u + \alpha(x)\, u, \quad l_0\, u = \alpha^k(x)\, u_{x_k}, \quad \Gamma = \partial\, \Omega,$$

$$\sigma_0 = \Big\{x \in \Gamma : \alpha^k(x)\, \nu_k(x) = 0\Big\}, \quad \sigma_1 = \Big\{x \in \Gamma : \alpha^k(x)\, \nu_k(x) > 0\Big\},$$

$$\sigma_2 = \Big\{x \in \Gamma : \alpha^k(x)\, \nu_k(x) < 0\Big\},$$

$\nu(x) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внутренней нормали к Γ в точке x. Здесь и в дальнейшем предполагается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до n.

Основные обозначения и предположения. Пусть в некоторой окрестности любой своей точки гиперповерхность Γ представима в виде $x_j = \chi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ при каком-либо j, где χ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что все коэффициенты в (1), а также функции $\alpha(x)$, $\alpha^k(x)$, $k = \overline{1,n}$, и их производные, встречающиеся в дальнейшем, ограничены и измеримы в любой конечной подобласти области Ω.

Введем обозначения

$$q^{ij} = c - \frac{1}{2}\, c^i_{x_i} + \frac{1}{2}\, c^{ij}_{x_i x_j} + \frac{1}{2}\, \left(\alpha^i a\right)_{x_i},$$

$$d^{ij} = c^{ij} - \left(\alpha^i a^{kj}\right)_{x_k} + \alpha^i a^j + \frac{1}{2}\left(\alpha^k a^{ij}\right)_{x_k}, \quad c^{ij} = b^{ij} + \alpha a^{ij} - \alpha^k_{x_k} a^{ij},$$

$$c^i = b^i + \alpha a^i - \alpha^k_{x_k} a^i, \quad c = b + 2a - \alpha^k_{x_k} a, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Далее всюду предполагается выполнение условий

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x), \quad a_0 \left|\xi\right|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le a_1 \left|\xi\right|^2, \quad \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha^k(x)\right]^2 \ne 0,$$

$$d^{ij} = d^{ji}, \quad d_0 \left|\xi\right|^2 \le d^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le d_1 \left|\xi\right|^2,$$

$$c^{ij} = c^{ji}, \quad c_0 \left|\xi\right|^2 \le c^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le c_1 \left|\xi\right|^2, \quad c^{ij} - \alpha^i a - c^1 < 0$$

при $x \in \Omega \cup \Gamma$, $\xi \in R^n_\xi$, где $a_0, a_1, c_0, c_1, d_0, d_1$ — некоторые положительные постоянные.

Пусть $\{\Omega_\tau\}$ — семейство конечных подобластей области Ω, зависящее от параметра $\tau \in \Pi = \{\tau : 0 \le \tau \le \tau_0\}$, $\tau_0 \le \infty$. Будем предполагать, что $\Omega_\tau \subset \Omega_{\tau'}$, если $\tau < \tau'$. Обозначим $S_\tau = \partial\Omega_\tau \backslash \partial\Omega$. Будем также предполагать, что S_τ — связная $(n-1)$-мерная поверхность, имеющая ту же гладкость, что и $\partial\Omega$, а ее граница $\partial S_\tau \subset \partial\Omega$.

Положим $\Gamma_\tau = \Gamma \cap \partial\Omega_\tau$, $\sigma_{0,\tau} = \left\{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k\nu_k = 0\right\}$, $\sigma_{1,\tau} = \left\{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k\nu_k > 0\right\}$, $\sigma_{2,\tau} = \left\{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k\nu_k < 0\right\}$. Для $h > 0$ определим $\sigma_{1,h,\tau} = \{x \in \sigma_{1,\tau} : \rho(x, \partial\sigma_{1,\tau}) > h\}$, $\sigma^h_{1,\tau} = \sigma_{1,\tau} \backslash \sigma_{1,h,\tau}$.

Пусть $E(\Omega_\tau)$ — множество функций $\vartheta(x)$ из класса $C^2(\Omega_\tau)$ таких, что $\vartheta(x) = 0$ на Γ_τ и для некоторого $h > 0$ $l_0\vartheta = 0$ на $\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{1,\tau} \cup \sigma^h_{1,\tau}$. Через $H(\Omega_\tau)$ обозначим замыкание $E(\Omega_\tau)$ по норме

$$\|\omega\|_{H(\Omega_\tau)} = \left[\int\limits_{\Omega_\tau} \left(d^{ij}\omega_{x_i}\omega_{x_j} + \omega^2\right) dx + \int\limits_{\sigma_{1,\tau}} \alpha^k\nu_k a^{ij}\omega_{x_i}\omega_{x_j}\, ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$a(u, \vartheta) = \int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\alpha^k a^{ij} u_{x_i}\vartheta_{x_j x_k} + \left(\alpha^k a^{ij}\right)_{x_j} u_{x_i}\vartheta_{x_k} - \alpha^k a^i u_{x_i}\vartheta_{x_k} -$$

$$- c^{ij} u_{x_i}\vartheta_{x_j} + \left(c^{ij}_{x_j} - \alpha^i a - c^i\right) u\vartheta_{x_i} + \left(c - c^{ij}_{x_i} + c^{ij}_{x_i x_j}\right) u\vartheta\Big] dx. \qquad (3)$$

Определение. *Функция $u(x)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2) в области Ω, если для любой конечной подобласти Ω_τ области Ω $u(x) \in H(\Omega_\tau)$ и выполняется соотношение*

$$a(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega_\tau} f\vartheta\, dx$$

для произвольной функции $\vartheta(x) \in E(\Omega_\tau)$, удовлетворяющей условию $\vartheta = 0$ на S_τ.

Основные результаты. Предположим, что $\alpha^k = \mathrm{const}$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha^1 > 0$. В работе [8] доказано выполнение второго из условий (2) в среднем.

Для простоты изложения предположим сначала, что $S_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau + \gamma\}$ для любого $\tau \in [0,\tau_0]$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$. Обозначим

$$B(x) = \max\left\{2^{-1}\left(\alpha^1 a^1 + c^{i\,1} - \left(\alpha^1 a^{i\,j}\right)_{x_j}\right), 0\right\}, \quad P(\tau) = \sup_{S_\tau} B(x), \tag{4}$$

$$g = a_1 d_0^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha^1\right)^2, \tag{5}$$

$$Q(u) = d^{i\,j} u_{x_i\,x_j} - q^{i\,j} u^2, \tag{6}$$

и пусть

$$0 < \lambda(\tau) \le \inf_{v\in N}\left\{\left[\int\limits_{S_\tau} Q(v)\, dx'\right]\left[\int\limits_{S_\tau} v^2\, dx'\right]^{-1}\right\}, \quad x' = (x_2,\ldots,x_n), \tag{7}$$

N — множество функций $v(x)$, непрерывно дифференцируемых в окрестности S_τ при $x \in \bar{\Omega}$ и равных нулю на $S_\tau \cap \Gamma$.

Будем предполагать, что существует такая положительная функция $\Phi(\tau)$, $\tau \in \Pi$, что

$$\Phi(\tau) \ge g\lambda^{-1/2}(\tau) + P(\tau)\lambda^{-1}(\tau).$$

Рассмотрение в дальнейшем будет проводиться в зависимости от типа области. Исходя из этого рассмотрим два класса областей:

$$A)\ \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \ge \varepsilon \quad \forall\tau \in \Pi, \qquad B)\ \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \le \varepsilon \quad \forall\tau \in \Pi,$$

где $\varepsilon = \mathrm{const}$, $0 < \varepsilon < 1$.

Класс A — это расширяющиеся области при $x_1 \to \infty$, в класс B входят сужающиеся области при $x_1 \to \infty$, цилиндры с осью, параллельной оси Ox_1, конус с достаточно малым раствором и др.

Пусть функция $\tau(\beta)$ является решением одного из уравнений:

в случае A

$$\frac{d\tau}{d\beta} = \frac{\Phi}{\varepsilon\tau + \Phi_\tau}, \tag{8}$$

в случае B

$$\frac{d\tau}{d\beta} = \frac{\Phi}{\varepsilon\tau + \varepsilon} \tag{8$'$}$$

и удовлетворяет условию $\tau(0) = 0$, где функция Φ такова, что правые части в (8) и (8$'$) абсолютно непрерывны.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в области Ω из класса A, причем $f(x) = 0$ в Ω_{τ_0} и выполнено условие*

$$\left(\alpha^1 a^i\right)_{x_i} - \left(\alpha^1 a^{ij}\right)_{x_i x_j} + 3\, c^{ij}_{x_i x_j} - 2\,\alpha^i a - 2\, c^1 \geq 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{\tau_0}. \tag{9}$$

Тогда при любых R_0 и R таких, что $0 \leq R_0 \leq R$, имеет место оценка

$$\int\limits_{\Omega_{\tau(R_0)}} Q(u)\, dx \leq \frac{\Phi(\tau(R))}{\Phi(\tau(R_0))}\, e^{-(R-R_0)} \int\limits_{\Omega_{\tau(R)}} Q(u)\, dx. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $R_0 > 0$. Тогда $\tau(R_0) > 0$. Для $\widehat{\tau} \in \Pi$ такого, что $\tau(R_0) \leq \widehat{\tau} \leq \tau(R)$, $x \in \Omega_{\tau(R)}$, построим срезающую функцию $\psi_\delta(x, \widehat{\tau})$, зависящую от параметра δ, где $0 < 2\delta \leq \widehat{\tau}$. Для этого рассмотрим функцию

$$g_\delta(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{\xi-\delta} \frac{-(1-\varepsilon)\theta + \widehat{\tau}}{\delta}\, \omega\left(\frac{\eta - \theta}{\delta}\right) d\theta,$$

где $\omega(\theta)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменной $\theta \in (-\infty, \infty)$ такая, что $\omega(\theta) = 0$ при $|\theta| \geq 1$, $\omega(\theta) > 0$ при $|\theta| < 1$, $\omega(\theta) \leq 1$ и $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\theta)\, d\theta = 1$.

Очевидно, что $g_\delta(\xi, \eta) = -(1-\varepsilon)\eta + \widehat{\tau}$ при $\eta \leq \xi - 2\delta$ и $g_\delta(\xi, \eta) = 0$ при $\eta \geq \xi$. Положим $\psi_\delta(x, \widehat{\tau}) = -(1-\varepsilon)x_1 + \widehat{\tau}$, если $x \in \bar{\Omega}_0$. Каждой точке $x \in \bar{\Omega}_{\tau(R)} \backslash \bar{\Omega}_0$ соответствует единственное значение $\tau = \tau(x)$ такое, что $x \in S_\tau$.

Для $x \in \bar{\Omega}_{\tau(R)} \backslash \bar{\Omega}_0$ положим

$$\psi_\tau(x, \widehat{\tau}) = g_\delta(\widehat{\tau}, \tau(x)).$$

Легко видеть, что если $x \in S_\tau$ при $\tau \geq \widehat{\tau}$, то $\psi_\delta(x, \widehat{\tau}) = 0$. Если же $x \in S_\tau$ при $\tau \leq \widehat{\tau} - 2\delta$, то $\psi_\delta(x, \widehat{\tau}) = -(1-\varepsilon)x_1 + \widehat{\tau}$.

В силу предположений функция $\psi_\delta(x,\widehat{\tau})$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией пространственных переменных и параметра $\widehat{\tau}$ при $\tau(R_0) \le \widehat{\tau} \le \tau(R)$.

Пусть $u_m(x)$ — последовательность функций из $E(\overline{\Omega}_{\tau(R)})$ таких, что $u_m(x)$ сходится при $m \to \infty$ к $u(x)$ по норме пространства $H(\overline{\Omega}_{\tau(R)})$.

Положим в тождестве (3) $\Omega_\tau = \Omega_{\widehat{\tau}}$, $\vartheta = u_m\psi_\delta(x,\widehat{\tau})$. Тогда, интегрируя по частям и учитывая (9), из (3) получаем

$$\int\limits_{\Omega_{\widehat{\tau}}} Q(u_m)[-(1-\varepsilon)x_1+\widehat{\tau}]\,dx \le \varepsilon_{m,\delta}(\widehat{\tau}) + E_{m,\delta}(\widehat{\tau}) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{S_{\widehat{\tau}}}\left[\left(-\alpha^1a^{1j}\right)_{x_j}+\alpha^1a^1+c^{11}\right](u_m)^2\,dx' + \int\limits_{S_{\widehat{\tau}}}\alpha^1a^{i1}(u_m)_{x_i}u_m\,dx',$$

где

$$E_{m,\delta}(\widehat{\tau}) = \int\limits_{\Omega_{\widehat{\tau}}}\alpha^1a^{i1}u_m(u_{x_i}-(u_m)_{x_i})\psi''_\delta\,dx,$$

$$\varepsilon_{m,\delta}(\widehat{\tau}) = \int\limits_{\Omega_{\widehat{\tau}}}\left[\left(\alpha^ka^{ij}\right)_{x_i}-\alpha^ka^i-c^{ik}\right](u_m)_{x_k}\left(u_{x_i}\psi_\delta-(u_m)_{x_i}(-(1-\varepsilon)x_1+\widehat{\tau}\right)+$$

$$+\left(\left(c^{ij}_{x_i}-\alpha^ia-c^i\right)(u_m)_{x_i}+\left(c-c^i_{x_i}+c^{ij}_{x_ix_j}\right)u_m\right)\left(u\psi_\delta-u_m\left(-(1-\varepsilon)x_1+\widehat{\tau}\right)\right)+$$

$$+\left(2\alpha^1a^{ij}(u_m)_{x_j}+\left(\alpha^1a^{ij}\right)_{x_j}u_m-\alpha^1a^iu_m-c^{i1}u_m\right)\left(u_{x_i}\psi'_\delta+(u_m)_{x_i}(1-\varepsilon)\right)+$$

$$+\left(c^{1i}_{x_j}-\alpha^1a-c\right)u_m\left(u\psi'_\delta+u_m(1-\varepsilon)\right)\Big)\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega_{\widehat{\tau}}\cap\operatorname{supp}\psi''_\delta}\left(\alpha^1a^{ij}u_m(u_m)_{x_i}\right)_{x_j}\,dx - \int\limits_{S_{\widehat{\tau}}}\alpha^1a^{i1}(u_m)_{x_i}u_m\,dx'+$$

$$+\int\limits_{S_{\widehat{\tau}-2\delta}}\alpha^1a^{i1}(u_m)_{x_i}u_m\,dx' + \frac{1}{2}\int\limits_{\sigma_{1,\widehat{\tau}}}\alpha^ka^{ij}(u_m)_{x_i}(u_m)_{x_k}\nu_j\left(-(1-\varepsilon)x_1+\widehat{\tau}\right)\,ds.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_{\Omega_{\widehat{\tau}}} Q(u_m)\left[-(1-\varepsilon)x_1+\widehat{\tau}\right]\,dx \le |\varepsilon_{m,\delta}(\widehat{\tau})| + |E_{m,\delta}(\widehat{\tau})| +$$

$$+\int\limits_{S_\tau}B(u_m)^2dx' + \left(\int\limits_{S_\tau}a^{ij}(u_m)_{x_i}(u_m)_{x_j}dx'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{S_\tau}a_1\left(\alpha^1\right)^2(u_m)^2\,dx'\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le |\varepsilon_{m,\delta}(\widehat{\tau})| + |E_{m,\delta}(\widehat{\tau})| + \Phi(\widehat{\tau})\int\limits_{S_{\overline{\tau}}}Q(u_m)\,dx'. \tag{11}$$

Положим

$$F(\widehat{\tau}, x') = \int\limits_0^{\widehat{\tau}} \left[\int\limits_{\Omega_{x_1}} Q(u_m)\, dx \right] dx_1.$$

Поскольку

$$\frac{\partial F(\widehat{\tau}, x')}{\partial \widehat{\tau}} = \int\limits_{\Omega_{\widehat{\tau}}} Q(u_m) dx, \quad \frac{\partial^2 F(\widehat{\tau}, x')}{\partial \widehat{\tau}^2} = \int\limits_{S_{\widehat{\tau}}} Q(u_m) dx',$$

из неравенства (11) следует

$$\varepsilon \widehat{\tau}\, \frac{\partial F}{\partial \widehat{\tau}} \le \Phi(\widehat{\tau})\, \frac{\partial^2 F}{\partial \widehat{\tau}^2} + |\varepsilon_{m,\delta}(\widehat{\tau})| + |E_{m,\delta}(\widehat{\tau})|\,. \tag{12}$$

Поэтому для β таких, что $R_0 < \beta < R$, полагая в неравенстве (12) $\widehat{\tau} = \tau(\beta)$ и умножая его на $e^{-\beta}$, получаем

$$\left((\varepsilon\tau + \Phi_\tau) \frac{d\tau}{d\beta} - \Phi \right) e^{-\beta} \frac{\partial F}{\partial \tau} \le \frac{d}{d\beta} \left(e^{-\beta} \Phi \frac{\partial F}{\partial \tau} \right) + e^{-\beta} \frac{d\tau}{d\beta} \left(|\varepsilon_{m,\delta}(\tau)| + |E_{m,\delta}(\tau)| \right).$$

Отсюда, учитывая (8), имеем

$$0 \le \frac{d}{d\beta} \left(e^{-\beta} \Phi \frac{\partial F}{\partial \tau} \right) + e^{-\beta} \frac{d\tau}{d\beta} \left(|\varepsilon_{m,\delta}(\tau)| + |E_{m,\delta}(\tau)| \right).$$

Интегрируя это неравенство по β в пределах от R_0 до R, находим

$$\frac{\partial F(\tau(R_0))}{\partial \tau} \le \frac{\Phi(\tau(R))}{\Phi(\tau(R_0))}\, e^{-(R-R_0)} \frac{\partial F(\tau(R))}{\partial \tau} +$$

$$+ \Phi^{-1}(\tau(R_0))\, e^{R_0} \int\limits_{R_0}^{R} \frac{d\tau}{d\beta}\, e^{-\alpha} \left(|\varepsilon_{m,\delta}| + |E_{m,\delta}| \right) d\beta. \tag{13}$$

Покажем теперь, что второе слагаемое в правой части (13) сколь угодно мало, если m достаточно велико и $\delta = \delta(m)$ достаточно мало. Заметим, что при достаточно большом m и достаточно малом δ, зависящем от m, величина $|\varepsilon_{m,\delta}|$ меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon_1 > 0$. Это следует из того, что $u_m \to u$ в норме $H(\Omega_{\tau(R)})$ при $m \to \infty$ и мера множества, где $\psi_{\delta\, x_i\, x_j} \ne 0$, мера множества, где $-(1-\varepsilon) - \psi_{\delta\, x_j}(x, \widehat{\tau}) \ne 0$, а также мера множества в $\Omega_{\tau(R)}$, где $-(1-\varepsilon)x_1 + \widehat{\tau} - \psi_\delta(x, \widehat{\tau}) \ne 0$, стремятся к нулю при $\delta \to 0$ равномерно по $\widehat{\tau}$ при $\widehat{\tau} \in \{\tau : \tau(R_0) \le \tau \le \tau(R)\}$. Здесь мы также использовали результат работы [8], в котором из условий $u|_{\Gamma_\tau} = 0$ и $l_0\, u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ следует, что $u_{x_i}|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$.

Оценим теперь

$$J_{m,\delta} = \int\limits_{R_0}^{R} |E_{m,\delta}(\tau(\beta))|\, \frac{d\tau}{d\beta}\, e^{-\beta}\, d\beta.$$

Учитывая условия A, имеем

$$J_{m,\delta} \le K_1 \int\limits_{R_0}^{R} \left(\int\limits_{\Omega_{\tau(\beta)}} \left|\alpha^1 a^{i\,1}\right| |u_m| \, |u_{x_i} - (u_m)_{x_i}| \, |\psi_{\delta\, x_i\, x_j}(x, \tau(\beta))| \, dx \right) d\beta \le$$

$$\le K_1 \int\limits_{\Omega_{\tau(\beta)}} \left\{ \left|\alpha^1 a^{i\,1}\right| |u_{x_i} - (u_m)_{x_i}| \, |u_m| \int\limits_{R_0}^{R} \left|\psi_{\delta\, x_i\, x_j}(x, \tau(\beta))\right| \, d\beta \right\} dx,$$

$$K_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{R_0}^{R} \left|\psi_{\delta\, x_i\, x_j}(x, \tau(\beta))\right| \, d\beta \le K_2, \tag{14}$$

где постоянная K_2 не зависит от x и δ. Пусть точка x фиксирована и лежит на поверхности $S_{\tau(R)}$. Тогда

$$\int\limits_{-R}^{R} \left|\psi''_\delta(x, \tau)\right| d\beta \le \int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} \, g_\delta(\tau(\beta), \tau(x)) d\beta \le$$

$$\le K_3 \int\limits_{0}^{\tau(R)} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} \, g_\delta(\xi, \tau(x)) \right| d\xi \le K_4 \int\limits_{0}^{\tau(R)} \left| \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \, g_\delta(\xi, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \, g_\delta(\xi, \eta) \right| d\xi, \tag{15}$$

где $\eta = \tau(x)$, постоянные K_3, K_4 не зависят от x, δ. Поскольку функция $\dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2} \, g_\delta(\xi, \eta)$ при фиксированных x равна нулю вне отрезка $[\eta, \eta + 2\delta]$ оси ξ и

$$\left| \frac{\partial^2 g_\delta}{\partial \eta^2} \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\xi - \delta} \delta^{-3} (-(1 - \varepsilon)\theta + \tau) \, \omega'' \left(\frac{\eta - \theta}{\delta} \right) \, d\theta \right| \le$$

$$\le \frac{\tau - (1 - \varepsilon)\eta}{\delta^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\omega''(s)\right| \, ds + \delta^{-1} (1 - \varepsilon) \int\limits_{\infty}^{\infty} \left|\omega'(s)\right| \, ds \le K_5 \left(\delta^{-2} + \delta^{-1}\right),$$

$$\left|\frac{\partial g_\delta}{\partial \eta}\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\xi-\delta} \frac{-(1-\varepsilon)\theta+\widehat{\tau}}{\delta^2}\,\omega'\left(\frac{\eta-\theta}{\delta}\right)d\theta\right| \le$$

$$\le \delta^{-1}(\tau-(1-\varepsilon)\eta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\omega'(s)\right|\,ds + (1-\varepsilon)\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} s\,\omega(s)\,ds\right| \le K_6\,\delta^{-1},$$

где K_5, K_6 — некоторые постоянные, последний интеграл в неравенстве (15) равномерно ограничен относительно δ. Следовательно, выполняется неравенство (14) и поэтому значение $J_{m,\delta}$ сколь угодно мало при достаточно большом m и любом δ. Переходя к пределу в неравенстве (13) при $m \to \infty$ и $\delta(m) \to \infty$, получаем оценку (10).

Таким образом, оценка (10) доказана при $R_0 > 0$. Устремляя R_0 к нулю в неравенстве (10), получаем эту оценку и при $R_0 = 0$.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в области Ω из класса B, причем $f(x) = 0$ в Ω_{τ_0} и выполнено условие (9). Тогда при любых R_0 и R таких, что $0 \le R_0 \le R$, имеет место оценка*

$$\int\limits_{\Omega_{\tau(R_0)}} Q(u)\,dx \le \frac{\tau(R)+1}{\tau(R_0)+1}\,e^{-(R-R_0)}\int\limits_{\Omega_{\tau(R)}} Q(u)\,dx. \tag{16}$$

Приведем схему доказательства. Поступая так же, как и при доказательстве теоремы 1, и полагая

$$g_\delta(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\xi-\delta} \frac{-(1-\varepsilon)\theta+\widehat{\tau}+\varepsilon}{\delta}\,\omega\left(\frac{\eta-\theta}{\delta}\right)d\theta,$$

имеем

$$\left(\varepsilon(\tau+1) + \frac{d\Phi}{d\tau} - \frac{d^2\tau}{d\beta^2}\left(\frac{d\tau}{d\beta}\right)^{-2}\Phi - \left(\frac{d\tau}{d\beta}\right)^{-1}\Phi\right)\frac{\partial F}{\partial \tau} \le$$

$$\le \frac{d}{d\beta}\left(e^{-\beta}\left(\frac{d\tau}{d\beta}\right)^{-1}\Phi\,\frac{\partial F}{\partial \tau}\right) + e^{-\beta}(|\varepsilon_{m,\delta}(\tau)| + |E_{m,\delta}(\tau)|). \tag{17}$$

Заметим, что здесь $\tau(\alpha)$ является решением уравнения ($8'$) с условием $\tau(0) = 0$. Тогда

$$\varepsilon(\tau+1) + \frac{d\Phi}{d\tau} - \frac{d^2\tau}{d\beta^2}\left(\frac{d\tau}{d\beta}\right)^{-2}\Phi - \left(\frac{d\tau}{d\beta}\right)^{-1}\Phi \ge 0.$$

Следовательно, интегрируя по β в пределах от R до R_0 и переходя к пределу при $m \to \infty$, $\partial(m) \to 0$, из неравенства (17) получаем оценку (16).

Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 1.

Теорема 3. *Предположим, что $f(x) = 0$ в Ω и выполняются условия теоремы 1. Пусть определено семейство конечных подобластей Ω_τ области Ω, причем $\Pi = \{\tau :$*

$0 \le \tau < \infty\}$, $\Omega = \bigcup\limits_{\tau \in \Pi} \Omega_\tau$ *и* $\tau(\beta) \to +\infty$ *при* $\beta \to +\infty$, *где* $\tau(\beta)$ — *решение уравнения (8) с условием* $\tau(0) = 0$. *Тогда если* $u(x)$ *является обобщенным решением задачи (1), (2) в* Ω *и для некоторой последовательности действительных чисел* $\{R_l\}$ *таких, что* $R_l \to \infty$ *при* $l \to \infty$, *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_{\tau(R_l)}} Q(u)\,dx \le \varepsilon_1(R_l)\,\Phi^{-1}(\tau(R_l))\exp\{R_l\}, \tag{18}$$

где $\varepsilon_1(R_l) \to 0$ *при* $l \to \infty$, *то* $u \equiv 0$ *в* Ω.

Доказательство. Зафиксируем произвольное R_k из последовательности $\{R_l\}$. Из оценки (10) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega_{\tau(R_k)}} Q(u)\,dx \le \frac{\Phi(\tau(R_{k+s}))}{\Phi(\tau(R_k))}\,e^{-(R_{k+s}-R_k)} \int\limits_{\Omega_{\tau(R_{k+s})}} Q(u)\,dx.$$

Следовательно, в силу условия (18) имеем

$$\int\limits_{\Omega_{\tau(R_k)}} Q(u)\,dx \le \varepsilon_1(R_{k+s})\,\Phi^{-1}(\tau(R_k))\exp\{R_k\}.$$

Устремляя в этом неравенстве значение s к $+\infty$, находим, что $u \equiv 0$ в $\Omega_{\tau(R_k)}$. Поскольку k выбрано произвольно, то $u \equiv 0$ в Ω.

Аналогичную теорему можно доказать и для областей класса B с ростом

$$\int\limits_{\Omega_{\tau(R_l)}} Q(u)\,dx \le \varepsilon_2(R_l)\left(\tau^{-1}(R_l) + 1\right)\exp\{R_l\},$$

где $\varepsilon_2(R_l) \to 0$ при $l \to \infty$.

Пример. Рассмотрим некоторые частные случаи теорем 1 – 3, когда можно явно вычислить $\tau(R)$.

Пусть S_τ содержится в $(n-1)$-мерном параллелепипеде, наименьшее ребро которого равно $\mu(\tau)$. Тогда из (7) имеем $\lambda(\tau) \ge d_0\,\pi^2\,\mu^{-2}(\tau)$, и для определения функции $\tau(\beta)$ в теоремах 1 – 3 можно положить

$$\Phi(\tau) = g\,\frac{\mu(\tau)}{\pi\,d_0^{1/2}} + P(\tau)\,\frac{\mu^2(\tau)}{d_0\,\pi^2},$$

где g, $P(\tau)$ определяются равенствами (4), (5).

Таким образом, в неравенствах (10) и (16) в качестве $\tau(R)$ можно использовать функции, обратные к функциям

$$R = \int\limits_0^\tau \frac{\varepsilon s + \Phi_s(s)}{\Phi(s)}\,ds \quad \text{или} \quad R = \varepsilon \int\limits_0^\tau \frac{s+1}{\Phi(s)}\,ds$$

соответственно.

Замечание 1. В случае переменных коэффициентов $\alpha^k(x)$, когда $\alpha^k(x)\nu_k \leq 0$ на Γ, задача (1), (2) превращается в задачу Дирихле, оператор l_0 при этом имеет переменные коэффициенты, а решение задачи (1), (2) $u(x) \in \widetilde{W}_2^2(\Omega_\tau)$ (см. [8]). Для решения $u(x)$ также можно получить аналог принципа Сен-Венана и теоремы единственности в классах функций, растущих на бесконечности в зависимости от геометрических характеристик области, которые доказываются аналогично теоремам 1 – 3.

Замечание 2. Аналогичные результаты можно получить и в случае, когда $S_\tau = \Omega \cap \cap\{|x| = \tau + \gamma\}$.

Выводы. Отметим, что метод исследования решений краевых задач, разработанный для уравнений четного порядка (см. [5, 6]) в областях с некомпактными границами, также применим для исследования уравнений нечетного порядка с соответствующими весовыми функциями.

1. *Бойчук А. А.* De la torsion des prismes // Mem. Divers Savants Acad. Sci. Paris. — 1855. — **14**. — P. 233 – 560.
2. *Gurtin M. E.* The linear theory of elasticity // Handb. Phys. — Berlin: Springer, 1972. — **2**.
3. *Knowles J. K.* On Saint Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity // Arch. Ration. Mech. and Anal. — 1966. — **8**, № 1. — P. 1 – 22.
4. *Flavin J. M.* On Knowles version of Saint Venant's principle in two-dimensional elastostatics // Ibid. — 1974. — **53**, № 4. — P. 366 – 375.
5. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* О принципе Сен-Венана в плоской теории упругости // Докл. АН СССР. — 1978. — **279**, № 3. — С. 530 – 533.
6. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. — 1976. — **31**, вып. 6. — С. 142 – 165.
7. *Шишков А. Е.* Качественные свойства обобщенных решений квазилинейных дивергентных эллиптических и параболических уравнений. — Киев: Наук. думка, 1985. — 54 с.
8. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. — Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1990. — 131 с.

Получено 28.05.2005