УДК 517.21

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОТОКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

А. Ю. Пилипенко

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: apilip@imath.kiev.ua

For flows that describe the motion of interacting particles in a random medium, we show existence of a stationary solution. For this solution, we prove a central limit theorem.

Для потоків, що описують рух взаємодіючих частинок у випадковому середовищі, показано існування стаціонарного розв'язку. Для цього розв'язку доведено функціональну центральну граничну теорему.

Пусть μ — начальное распределение системы частиц в $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $x_t(u)$ положение частицы, стартовавшей из $u \in \mathbb{R}^d$ в момент времени $t \geq 0$, через $\mu_t = \mu \circ x_t^{-1}$ образ меры μ при отображении $x_t(\cdot)$; μ_t является распределением массы частиц в момент t.

Предположим, что движение каждой частицы зависит не только от ее положения в текущий момент, но и от μ_t, и удовлетворяет следующей системе стохастических дифференциальных уравнений:

$$dx_t(u) = b_0(x_t(u), u, \mu_t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} b_k(x_t(u), u, \mu_t)\, dw_k(t), \qquad t \geq 0, \quad u \in \mathbf{R}^d, \tag{1}$$

$$\mu_t = \mu \circ x_t^{-1}, \tag{2}$$

где

$$x_0(u) = u.$$

Целью данной работы является доказательство существования стационарного решения системы (1), (2) и установление для потока $x_t(u)$ функциональной центральной предельной теоремы.

Определение 1. *Случайный процесс $x_t(u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^d$, является стационарным решением системы (1), (2), если:*

1) отображение $x = x_s(u, \omega) : (-\infty, t] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ является $\mathcal{B}((-\infty; t]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \otimes \sigma(w^k(s), s \leq t)$-измеримым для любого $t \in \mathbb{R}$;

2) для любых $n \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$ распределения случайных векторов $(x_{t_1}(u_1), \ldots, x_{t_n}(u_n))$ и $(x_{t_1+\delta}(u_1), \ldots, x_{t_n+\delta}(u_n))$ совпадают;

3) для любых $s \le t,\, u \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство

$$x_t(u) = x_s(u) + \int\limits_s^t b_0(x_z(u), u, \mu_z)\, dz + \sum_{k=1}^n \int\limits_s^t b_k(x_z(u), u, \mu_z)\, dw_k(z)$$

почти наверное (п. н.).

Относительно коэффициентов уравнения (1) будут сделаны такие предположения, при которых $x_t(u)$ будет иметь непрерывную по (t, u) модификацию. Поэтому далее поток $x_t(\cdot)$ будем рассматривать как непрерывный (по t) случайный элемент со значением в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, где $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ наделено топологией равномерной сходимости на компактах. Следует отметить, что если для любых $t,\, u$ имеет место равенство

$$x_t(u) = \overline{x}_t(u) \quad \text{п. н.}$$

и процессы $\overline{x}$ удовлетворяют условию измеримости из определения 1, то $\overline{x}$ также является решением уравнения (1), причем

$$\mu \circ x_t^{-1} = \mu \circ \overline{x}_t^{-1} \quad \text{п. н.},$$

т. е. если некоторый процесс является решением, то и любая его (измеримая) модификация также является решением.

Далее, при поиске стационарного решения параметр $u \in \mathbb{R}^d$ будем интерпретировать не как начальное положение частиц, а как „тип” частицы.

Отметим также, что если функции $a,\, b_k$ не зависят от параметра $u \in \mathbb{R}^d$ и существует единственное стационарное решение системы (1), (2), а также следующего стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_t = b_0(\xi_t, \delta_{\xi_t})\, dt + \sum_{k=1}^n b_k(\xi_t, \delta_{\xi_t})\, dw_k(t),$$

где δ_ξ — единичная масса, сосредоточенная в точке ξ, то $x_t(u) := \xi_t$ является единственным стационарным решением системы (1), (2), т. е. в данном случае предельная динамика является топологически тривиальной — все частицы „слипаются”. Зависимость функций $a,\, b_k$ от параметра $u \in \mathbb{R}^d$ дает возможность получить нетривиальные пределы. Например, в работе [1] рассматривалась такая модель:

$$dx_t(u) = \{-\alpha(x_t(u) - u) + b_0(x_t(u), \mu_t)\}\, dt + \sum_{k=1}^n b_k(x_t(u), \mu_t)\, dw_k(t),$$

где $\alpha > 0$ — фиксированное число.

В этом случае частица, заиндексированная параметром u, имела своим центром притяжения точку u (см. член $-\alpha(x_t(u) - u)$), а снос и диффузия зависели только от положения частицы и общего распределения массы.

Рассмотрим какой вид принимает уравнение (1) в случае, когда мера μ является дискретной, $\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{u_j}$, где $c_j \geq 0$, $u_j \in \mathbb{R}^d$. В этом случае

$$\mu_t = \mu \circ x_t^{-1} = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{x_t(u_j)}, \tag{3}$$

где процессы $x_t(u_j)$ определяются из следующей (конечной) системы уравнений:

$$dx_t(u_k) = b_0\left(x_t(u_k), u_k, \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{x_t(u_j)}\right) dt + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x_t(u_k), u_k, \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{x_t(u_j)}\right) dw_i(t). \tag{4}$$

В свою очередь, для $u \neq u_j$ процесс $x_t(u)$ может быть определен из уравнения (1), где μ_t уже известно из (3), (4).

В данном примере частицы, заиндексированные параметрами $u_1, \ldots, u_n$, иногда интерпретируются как „тяжелые", движение которых не зависит от остальных $u \neq u_k$ — „легких" частиц. Движение каждой „легкой" частицы определяется ее положением в текущий момент и положением всех „тяжелых" частиц.

Отметим, что если мера μ имеет счетное число атомов или не является дискретной, то уравнение (1) следует рассматривать как бесконечную (или даже континуальную) систему взаимодействующих стохастических уравнений, или как решение стохастического уравнения в некотором функциональном пространстве.

Некоторые достаточные условия существования и единственности стационарного решения (1) даны в работе [1]. Различные свойства таких процессов, в частности вопрос об абсолютной непрерывности μ_t, рассматривались в [1–4].

1. Существование и единственность стационарного решения. Установим существование и единственность стационарного решения уравнения (1). В случае конечномерных стохастических уравнений для этого обычно требуют существования функции Ляпунова. Однако мы, для простоты, ограничимся введением дополнительного слагаемого $-\alpha x_t(u)dt$, где $\alpha > 0$, „затягивающего" решение в начало координат.

Предположим, что мера μ принадлежит пространству $\mathfrak{M}_2$ вероятностных мер в $\mathbb{R}^d$, имеющих конечный второй момент.

Введем в $\mathfrak{M}_2$ метрику Вассерштейна

$$\gamma_2(\mu, \nu) = \inf_{\varkappa \in Q(\nu,\mu)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |u - v|^2 \varkappa(du, dv) \right)^{1/2},$$

где $Q(\nu, \mu)$ — множество мер в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, имеющих своими маргинальными распределениями меры ν и μ.

Отметим, что сходимость в $(\mathfrak{M}_2, \gamma_2)$ эквивалентна слабой сходимости в $\mathfrak{M}_2$.

Теорема 1 (существование и единственность стационарного решения). I. *Предположим, что функции* b_k, $k = \overline{0, m} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{R}^d$, *удовлетворяют условиям:*

1) a, b_k *являются измеримыми по тройке аргументов;*
2) *существует такая постоянная* A_1, *что*

$$\forall\, u, x \in \mathbb{R}^d\, \forall\, \mu \in \mathfrak{M}_2 : |b_0(x, u, \mu)| \leq A_1(1 + |x| + |u|);$$

3) $\exists\, A_2\, \forall\, u \in \mathbb{R}^d\, \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d\, \forall\, \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_2 :$

$$\langle x_1 - x_2, b_0(x_1, u, \mu_1) - b_0(x_2, u, \mu_2)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} |b_k(x_1, u, \mu_1) - b_k(x_2, u, \mu_2)|^2 \leq$$

$$\leq A_2 \left(|x_1 - x_2|^2 + \gamma_2^2(\mu_1, \mu_2)\right);$$

4) *функции* b_k, $k = \overline{1, m}$, *ограничены;*
5) $\alpha > \max\{A_1, 2A_2\}$.
Тогда существует единственное стационарное решение уравнения

$$dx_t(u) = -\alpha x_t(u) + b_0(x_t(u), u, \mu_t)\, dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(x_t(u), u, \mu_t)\, dw_k(t), \tag{5}$$

где $\mu_t = \mu \circ x_t^{-1}$.

II. *Допустим, что выполняются условия 1 – 5, а также следующие:*

6) *функции* a, b_k *непрерывно дифференцируемы по* (x, u) *и имеют ограниченные производные, удовлетворяющие условию Гельдера по* (u, x) :
$\exists\, L\, \exists \beta \in (0, 1]\, \forall\, x_1, x_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d\, \forall\, \mu \in \mathfrak{M}_2\, \forall\, i \in \{1, 2\}$:

$$\left|(b_k)'_i(x_1, u_1, \mu) - (b_k)'_i(x_2, u_2, \mu)\right| \leq L \left(|x_1 - x_2|^\beta + |u_1 - u_2|^\beta\right);$$

7) *существуют такие* $\lambda > 0$ *и* $\overline{p} \geq 2$, *что для любых* $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, $\nu \in \mathfrak{M}_2$ *выполняется неравенство*

$$\overline{p}\|y\|^{\overline{p}-2} \left(\left\langle y, \left(-\alpha + \frac{\partial}{\partial x}\, b_0(x, u, \nu)\right) y \right\rangle\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\, \left(\nabla^2 \left(\|y\|^{\overline{p}}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x}\, b_k y\, \frac{\partial}{\partial x}\, (b_k y)^*(x, u, \nu)\right) \leq \lambda \|y\|^{\overline{p}}.$$

Тогда процесс $x_t(\cdot)$, $t \geq 0$, *принимает значения (как функция от* u*) в соболевском пространстве* $W^1_{\overline{p}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. *При этом* $y_t(u) = \dfrac{\partial x_t(u)}{\partial u}$ *является единственным стационарным решением уравнения*

$$dy_t(u) = \left(-\alpha + (b_0)'_x(x_t(u), u, \mu_t)\right)\, y_t(u)\, dt + (b_0)'_u(x_t(u), u, \mu_t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left((b_k)'_x(x_t(u), u, \mu_t) y_t(u) + (b_k)'_u(x_t(u), u, \mu_t)\right)\, dw_k(t). \tag{6}$$

Доказательство данной теоремы стандартно (см. [1] для процессов с взаимодействием, а также [5, 6] для стохастических уравнений в гильбертовом пространстве). Поэтому приведем лишь набросок доказательства и вспомогательные леммы, которые понадобятся при доказательстве центральной предельной теоремы.

Пусть $f \in L_2(\mu)$. Обозначим через $x_{st}(f, u)$, $t \geq s$, $u \in \mathbb{R}^d$, решение уравнения (5) с начальным условием (при $t = s$):

$$x_{ss}(u) = f(u).$$

Замечание 1. Существование решения доказано в [1, 7, 8].

Лемма 1. *Для любых* $p \geq 2$, $u \in \mathbb{R}^d$ *существует такая константа* $C_1 = C_1(p)$, *что*

$$\sup_{t \geq s} \mathrm{E}|x_{st}(f, u)|^p \leq C_1(1 + |u| + |f(u)|)^p.$$

Для доказательства леммы используется формула Ито и лемма Гронуолла.

Лемма 2. *Для любых* f_1, $f_2 \in L_2(\mu)$, $u \in \mathbb{R}^d$ *существует такая константа* $C_2 > 0$, *что*

$$\mathrm{E}|x_{st}(f_1, u) - x_{st}(f_2, u)|^2 \leq C_2\big(|f_1(u) - f_2(u)|^2 + \|f_1 - f_2\|^2_{L_2}\big)\times$$
$$\times \exp\{-2(\alpha - 2A_2)(t - s)\}, \tag{7}$$

$$\mathrm{E}\,\gamma_2^2\left(\mu_t^1, \mu_t^2\right) \leq C_2\|f_1 - f_2\|^2_{L_2} \exp\{-2(\alpha - 2A_2)(t - s)\}, \tag{8}$$

где $t \geq s$, $\|\cdot\|_{L_2}$ — *норма в* $L_2(\mathbb{R}^d, \mu, \mathbb{R}^d)$,

$$\mu_t^j = \mu \circ x_{st}^j(f_j, \cdot)^{-1}, \quad j = 1, 2.$$

Обозначим $x_t^i(u) = x_{st}(f_i, u)$, $\mu_t^i = \mu \circ (x_t^i)^{-1}$, $i = 1, 2$. Тогда

$$d\left|x_t^1(u) - x_t^2(u)\right|^2 = \Bigg(2\Big\langle x_t^1(u) - x_t^2(u), -\alpha\left(x_t^1(u) - x_t^2(u)\right) +$$
$$+ \left(b_0\left(x_t^1(u), u, \mu_t^1\right) - b_0\left(x_t^2(u), u, \mu_t^2\right)\right)\Big\rangle +$$
$$+ \sum_{k=1}^m |b_0\left(x_t^1(u), u, \mu_t^1\right) - b_0\left(x_t^2(u), u, \mu_t^2\right)|^2\Bigg) dt + dM_t, \tag{9}$$

где M_t — некоторый непрерывный мартингал, $\mathrm{E}M_t = 0$.

Проинтегрируем левую и правую части (9) по $\mu(du)$, а затем возьмем математическое ожидание. Учитывая условие 3 теоремы и то, что

$$\gamma_2^2\left(\mu \circ f_1^{-1}, \mu \circ f_2^{-1}\right) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_1 - f_2|^2 d\mu, \tag{10}$$

где f_1, f_2 — произвольные функции из $L_2(\mathbb{R}^d, \mu, \mathbb{R}^d)$, получаем

$$\mathrm{E}\left\|x_t^1 - x_t^2\right\|_{L_2}^2 \le \|f_1 - f_2\|_{L_2}^2 + 2((\alpha - 2A_2)\int\limits_s^t \mathrm{E}\left\|x_z^1 - x_z^2\right\|_{L_2}^2\, dz. \tag{11}$$

Неравенство (8) следует из (10) и (11). Подставив (8) в (9) и применив аналогичные предыдущим рассуждения, получим (7).

Доказательство единственности стационарного решения (5) следует из леммы 2 и аналогично рассуждениям из [1, 7, 8].

Из стационарности процессов $x_s, \overline{x}_s$ следует, что математическое ожидание процессов в скобках в правой части последнего неравенства не зависит от s. Устремляя s к $-\infty$, получаем сходимость правой части к нулю. Следовательно,

$$x_t(u) = \overline{x}_t(u) \quad \text{п. н.}$$

Для доказательства существования можно проверить фундаментальность последовательности $\{x_{-n,t}(\mathrm{id}, u)\}_{n\ge 0}$, где id — тождественное отображение.

Доказательство измеримой модификации предельного процесса $x_t(u)$ несложно проверить с использованием, например, результатов [9].

Перейдем к доказательству второй части теоремы 1.

Доказательство непрерывной дифференцируемости по u процесса $x_{st}(f, u)$, где f — гладкая функция, следует из теоремы о дифференцируемости по параметру решения уравнения Ито, если заметить, что

$$x_{st}(f,u) = f(u) + \int\limits_s^t \widetilde{b}_0(z, u, x_{sz}(f))\, dz + \sum_k \int\limits_s^t \widetilde{b}_k(z, u, x_{sz}(f,u))\, dw_k(z),$$

где $\widetilde{b}_k(t, x, u, \omega) = b_k(x, u, \mu_t(\omega))$.

При этом $y_{st}(f,u) := \dfrac{\partial}{\partial u} x_{st}(f,u)$ удовлетворяет уравнению, которое получается при формальном дифференцировании уравнения для $x_{st}(f,u)$ по параметру u (ср. с (6)).

Лемма 3. 1. *Существуют постоянные $\lambda > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех s, t, $s \le t$, $u \in \mathbb{R}^d$ и гладких функций f_1, $f_2 \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ выполняется неравенство*

$$\mathrm{E}|y_{st}(f_1,u) - y_{st}(f_2,u)|^2 \le C\left(|f_1(u) - f_2(u)|^2 + |\nabla f_1(u) - \nabla f_2(u)|^2 + \|f_1 - f_2\|_{L_2}^2\right) e^{-\lambda(t-s)}.$$

2. *Существует такое $C > 0$, что для всех $u \in \mathbb{R}^d$ и гладкой функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ имеет место неравенство*

$$\mathrm{E}|y_{st}(f,u)|^{\overline{p}} \le C\left(1 + |\nabla f(u)|^{\overline{p}}\right),$$

где параметр $\overline{p}$ взят из условия 7 теоремы 1.

При доказательстве используются стандартные рассуждения, связанные с формулой Ито и леммой Гронуолла.

С помощью леммы 3 несложно проверить существование и единственность стационарного решения (5), которое можно получить как предел $y_{st}(\mathrm{id}, u)$ при $s \to -\infty$.

Кроме того, из леммы 3 следует ограниченность $\overline{p}$-го момента процесса $y_t(u)$:

$$\sup_u \mathrm{E}|y_t(u)|^{\overline{p}} \le C. \tag{12}$$

В частности, отсюда следует, что почти наверное $x_t(\cdot) \in W^1_{\overline{p},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ и $y_t = \dfrac{\partial}{\partial u} x_t$.

2. Функциональная центральная предельная теорема. Пусть $x_t(u)$ — стационарное решение системы (1), (2). Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1 и для $x_t(u)$ выбрана непрерывная по (t, u) модификация.

Определим процесс

$$\overline{x}^T_t(u) = T^{-1/2} \int\limits_0^{Tt} (x_\tau(u) - \mathrm{E}\, x_\tau(u))\, d\tau, \quad t \in [0,1], \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

При фиксированном $T > 0$ будем рассматривать $\overline{x}^T_t(\cdot)$, $t \in [0,1]$, как непрерывный случайный процесс со значениями в функциональном пространстве $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, где топологией является топология равномерной сходимости на компактах.

Основным результатом данного пункта является следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1, причем постоянная $\overline{p}$ из условия 7 является четным числом, $\overline{p} > d$.*

Тогда последовательность случайных процессов $\{\overline{x}^T_t, t \in (0,1)\}$ слабо сходится в $C([0,1], C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$ к винеровскому полю $W_t(u)$, $t \in [0,1]$, $u \in \mathbb{R}^d$, с нулевым средним и ковариационной функцией

$$K_t(u,v) = \mathrm{cov}\,(W_t(u), W_t(v)) = t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{cov}\,(x_0(u), x_z(v))\, dz.$$

Доказательство данной теоремы разобьем на два этапа.

Сначала установим некоторое условие перемешивания для моментов процесса $x_t(u)$, что обусловит сходимость конечномерных распределений $\overline{x}^T_t(u)$ к $W_t(u)$, затем докажем слабую относительную компактность процессов $\overline{x}^T_t(u)$, $T \ge 1$.

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Тогда*

$$\forall k, n \in \mathbb{N}\, \forall l_1, \dots, l_k, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}\, \forall u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$$

$$\exists \lambda > 0, c > 0\, \forall s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_n, s_1 \le \dots \le s_k \le t_1 \le \dots \le t_n :$$

$$\left| \mathrm{E} \prod_{i=1}^k (x_{s_i}(u_i))^{l_i} \prod_{j=1}^n (x_{t_j}(v_j))^{p_j} - \mathrm{E} \prod_{i=1}^k (x_{s_i}(u_i))^{l_i} \mathrm{E} \prod_{j=1}^n (x_{t_j}(v_j))^{p_j} \right| \le c e^{-\lambda(t_1 - s_k)}.$$

Докажем данную лемму лишь для случая $k = n = 1$, так как идея доказательства в общем случае остается той же.

Положим $\mathcal{F}_t = \sigma(w_s, s \le t)$, $\mathcal{F}_{st} = \sigma(w_z - w_s, z \in [s,t])$.

Напомним, что $x_{st}(f,u)$, $t \ge s$, — решение системы (1), (2) с начальным условием $x_{ss}(f,u) = f(u)$.

Отметим, что $x_{st}(f,u)$ является $\mathcal{F}_{st}$-измеримой случайной величиной,

$$x_t(u) = x_{st}(x_s, u),$$

причем x_s $\mathcal{F}_s$-измерим.

Тогда

$$\begin{aligned}\Big|\mathrm{E}\, x_s^l(u) x_t^p(v) - \ \mathrm{E}\, x_s^l(u)\mathrm{E}\, x_t^p(v)\Big| = \\ = \Big|\mathrm{E}\, x_s^l(u)\left(\mathrm{E}_{\mathcal{F}_s} x_{st}^p(x_s,v) - \mathrm{E}\, x_{st}^p(x_s,v)\right)\Big| = \\ = \Big|\mathrm{E}\, x_s^l(u)\mathrm{E}\, \left(x_{st}^p(f,v) - x_{st}^p(x_s,v)\right)\Big|_{f=x_s}\Big|. \end{aligned} \tag{13}$$

Оценим $|x_{st}^p(f,v) - x_{st}^p(x_s,v)|$ сверху через

$$\mathrm{const}|x_{st}(f,v) - x_{st}(x_s,v)|\left(|x_{st}(f,v)|^{p-1} + |x_{st}(x_s)|^{p-1}\right).$$

Применяя неравенство Коши и леммы 1, 2, убеждаемся, что правая часть (13) не превышает

$$\mathrm{const}\,\mathrm{E}\,\left(\mathrm{E}\,(|f(v) - x_s(v)|^2 + \|f - x_s\|^2_{L_2})\Big|_{f=x_s}\right)^{1/2} e^{-\lambda(t-s)}.$$

Оценивая модуль разности через сумму модулей и применяя лемму 1 еще раз, завершаем доказательство леммы 4.

Следствие 1. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$, $t_1 \le \ldots \le t_n$, $t_k \in [0,T]$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{E}\prod_{k=1}^n \left(\overline{x}_{t_k}^T(u_k)\right)^{p_k} \to \mathrm{E}\prod_{k=1}^n (W_{t_k}(u_k))^{p_k}, \quad T \to \infty,$$

где $W_t(u)$ *— винеровское поле, определенное в теореме 2.*

Доказательство следствия 1 проведем лишь в случае $n = 1$, $t_1 = 1$.

Пусть $p = 2m$ — четное число. Тогда

$$\mathrm{E}\,\left(x_1^T(u)\right)^{2m} = T^{-m}(2m)!\int_0^T \ldots \int_0^{t_2} \mathrm{E}\prod_{k=1}^{2m}\left(x_{t_k}(u) - \mathrm{E}\, x_{t_k}(u)\right)dt_1 \ldots dt_{2m}. \tag{14}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Разобьем область интегрирования $0 \le t_1 \le \ldots \le t_{2m} \le T$ на несколько блоков следующим образом. Пусть $l \le 2m$, $i_1 = 1 <$

$< i_2 < \ldots < i_l = 2m$. Набору $(i_1, \ldots, i_l)$ поставим в соответствие область интегрирования $T(i_1, \ldots, i_l)$, в которую входят точки $0 \le t_1 \le \ldots \le t_{2m} \le T$ такие, что для любого j, $i_k \le j \le i_{k+1} - 2$, имеют место неравенства $t_{j+1} - t_j \le T^\varepsilon$ и $t_{i_k} - t_{i_k - 1} > T^\varepsilon$.

Пусть $\mathcal{K}$ — совокупность всех наборов $(i_1, \ldots, i_l)$, где $i_1 = 1 < i_2 < \ldots < i_l = 2m$. Из лемм 1, 2 следует, что интеграл в (14) отличается от

$$\sum_{\mathcal{K}} \int \ldots \int_{T(i_1,\ldots,i_l)} \prod_1^l \mathrm{E} \prod_{i_j \le i < i_{j+1}} (x_{t_i}(u) - \mathrm{E}\, x_{t_i}(u))\, dt_1 \ldots dt_{2m} \tag{15}$$

на величину, не превышающую $\mathrm{const}\, T^m e^{-\lambda T^\varepsilon} = o(T^{-n})$, $T \to \infty$, для любого $n \in \mathbb{N}$.

Оценим интеграл в (15) под знаком суммы для фиксированного набора $(i_1, \ldots, i_l)$ из $\mathcal{K}$.

Отметим несколько фактов.

1. Если для некоторого j имеет место равенство $i_{j+1} = i_j + 1$, то соответствующее произведение равно нулю.

2. Если для всех j $i_{j+1} - i_j = 2$, то (см. лемму 2) соответствующий интеграл

$$\int \ldots \int_{\{0 \le t_1 \le \ldots \le t_{2m}, t_2 \le t_3 - T^\varepsilon, \ldots, t_{2m-2} \le t_{2m-1} - T^\varepsilon\}} \prod_{k=1}^m \mathrm{cov}\,(x_{t_{2k-1}}(u), x_{t_{2k}}(u)) dt_1 \ldots dt_{2m} + o(T^{-n}) =$$

$$= (2^m m!)^{-1} \left(\int_0^T \int_0^T \mathrm{cov}\,(x_s(u), x_t(u))\, ds\, dt \right)^m + O(T^{m-1+\varepsilon}) + o(T^{-n}), \quad T \to \infty,$$

где $n \in \mathbb{N}$ произвольно.

3. Если набор $(i_1, \ldots, i_l)$ не удовлетворяет ни первому, ни второму пункту, то $l \le m-1$, и соответствующий интеграл с точностью до $o(T^{-n})$, $n \ge 1$, не превышает

$$\mathrm{const} \prod_{j=1}^l \int \ldots \int_{0 \le t_{i_j} \le t_{i_{j+1}-1} \le T} \sum_{i_j \le i < i_{j+1}} \mathrm{E}\, |x_{t_i}(u)|^{i_{j+1} - i_j} dt_{i_j} \ldots dt_{i_{j+1}-1} \le$$

$$\le \mathrm{const} \prod_{j=1}^l T^{1 + (i_{j+1} - i_j)\varepsilon} = \mathrm{const}\, T^{l + m\varepsilon} \le \mathrm{const}\, T^{m(1+\varepsilon)-1}.$$

Если $\varepsilon > 0$ выбрать достаточно малым, то данное выражение имеет порядок $o(T^m)$, $T \to \to \infty$.

Таким образом, из изложенного выше следует

$$\mathrm{E}\,(x_1^T(u))^{2m} = (2m-1)!!\left(T^{-1}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \mathrm{cov}\,(x_s(u),x_t(u))\,ds\,dt\right)^m + o(1) =$$

$$= (2m-1)!!\left(\int\limits_{-T}^{T} \mathrm{cov}\,(x_0(u),x_\tau(u))\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\,d\tau\right)^m + o(1) =$$

$$= (2m-1)!!\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{cov}\,(x_0(u),x_\tau(u))\,d\tau\right)^m + o(1) = \mathrm{E}\,(W_1(u))^{2m} + o(1), \quad T\to\infty.$$

Аналогично можно проверить, что

$$\mathrm{E}\,\left(x_1^T(u)\right)^{2m-1} \to 0, \quad T\to\infty.$$

Следствие 1 доказано.

Из теоремы Маркова [10] вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Для любых $t_1,\ldots,t_n,u_1,\ldots,u_n$ распределение $\left(\overline{x}_{t_1}^T(u_1),\ldots,\overline{x}_{t_n}^T(u_n)\right)$ слабо сходится к распределению $(W_{t_1}(u_1),\ldots,W_{t_n}(u_n))$.*

Таким образом, имеем слабую сходимость конечномерных распределений процессов $\overline{x}_t^T(u)$ к распределениям $W_t(u)$ при $T\to\infty$. Для доказательства слабой сходимости распределений $\overline{x}^T$ к W в функциональном пространстве $C\left([0,1],C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)\right)$ достаточно проверить слабую относительную компактность любой последовательности $\{\overline{x}^{T_k}, k\ge 1\}$, где $T_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Для этого нам понадобится следующая теорема (см. [11], § 1.4, теорема 1.4.7, упражнение 1.4.18).

Теорема 3. *Пусть S_1, S_2 — сепарабельные пространства Фреше и $\{\xi_n(t), t\in[0,1]\}_{n\ge1}$ — последовательность S_1-значных случайных процессов таких, что*

$\exists\,\alpha,\beta>0\,\forall\,s,t\in[0,1]\,\forall\,n\ge1:$

$$\mathrm{E}\,(\rho(\xi_n(s),\xi_n(t)))^\alpha \le c|t-s|^{1+\beta},$$

$$\mathrm{E}\,(\rho(\xi_n(0),x))^\alpha \le c,$$

где $x\in S_1$ — произвольная фиксированная точка S_1, ρ — метрика в S_1.

Допустим, что $S_1\subset S_2$ и оператор вложения $i: S_1\to S_2$ компактен. Тогда последовательность $\{i(\xi_n(t)), t\in(0,1)\}_{n\ge1}$ является плотной в $C([0,1],S_2)$.

Известно, что пространство Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^d\right)$ компактно вложено в $C(\mathbb{R}^d)$, если $p>d$ [12].

Таким образом, для доказательства теоремы 2 достаточно проверить, что

$\exists\,\beta>0\,\forall\,R>0\,\exists\,C=C_R>0\,\forall\,s,t\in[0,1]\,\forall\,T\ge1:$

$$\sup_{|u|\le R}\mathrm{E}\left|\overline{x}_0^T(u)\right|^{\overline{p}}\le C, \quad \sup_{|u|\le R}\mathrm{E}\left|\overline{y}_0^T(u)\right|^{\overline{p}}\le C,$$

$$\sup_{|u|\le R} \mathrm{E}\left(\left|\overline{x}_t^T(u)-\overline{x}_s^T(u)\right|^{\overline{p}}+\left|\overline{y}_t^T(u)-\overline{y}_s^T(u)\right|^{\overline{p}}\right)\le C|t-s|^{1+\beta}.$$

Рассмотрим только слагаемое $\mathrm{E}\left|\overline{y}_t^T(u)-\overline{y}_s^T(u)\right|^p$ в случае, когда $d=1$ (одномерный случай), $n=1$ (один винеровский процесс). Положим $m=\overline{p}/2$ (напомним, что $\overline{p}$ — четное). Случай, когда $d>1$, $n>1$, рассматривается аналогично, но с более громоздкими вычислениями.

Обозначим

$$y_z=y_z(u),\quad a_1'(z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}b_0\right)(x_z(u),u,\mu_z),\quad a_2'(z)=\left(\frac{\partial}{\partial u}b_0\right)(x_z(u),u,\mu_z),$$

$$b_1'(z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}b_1\right)(x_z(u),u,\mu_z),\quad b_2'(z)=\left(\frac{\partial}{\partial u}b_1\right)(x_z(u),u,\mu_z).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\overline{y}_s^T(u)-\overline{y}_t^T(u)\right)^{2m}=\\
&\qquad=T^{-m}\mathrm{E}\left[\int_{sT}^{tT}\left(a_1'(z)y_z+a_2'(z)-\mathrm{E}\left(a_1'(z)y_z+a_2'(z)\right)\right)dz+\right.\\
&\qquad\quad\left.+\int_{sT}^{tT}\left(b_1'(z)y_z+b_2'(z)\right)dw(z)\right]^{2m}\le\\
&\qquad\le 2^{2m-1}T^{-m}\left(\mathrm{E}\int_{sT}^{tT}\left(a_1'(z)y_z+a_2'(z)-\mathrm{E}\left(a_1'(z)y_z+a_2'(z)\right)\right)dz\right)^{2m}+\\
&\qquad\quad+2^{2m-1}T^{-m}\left(\mathrm{E}\int_{sT}^{tT}\left(b_1'(z)y_z+b_2'(z)\right)^2dz\right)^{m}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Поскольку b_1', b_2' ограничены и стационарное решение y_t имеет конечный момент порядка $\overline{p}=2m$ (см. (12)), то второе слагаемое в (16) не превышает $\mathrm{const}(t-s)^m$.

Первое слагаемое оценивается сверху таким выражением:

$$\begin{aligned}
&2^{2m-1}(t-s)^m\sup_{T>0}\left((T(t-s))^{-m}\mathrm{E}\int_0^{(t-s)T}\left[a_1'(z)y_z+a_2'(z)-\mathrm{E}(a_1'(z)y_z+a_2'(z))\right]dz\right)^{2m}=\\
&=2^{2m-1}(t-s)^m\sup_{\tau>0}\tau^{-m}\mathrm{E}\left(\int_0^{\tau}\left[a_1'(z)y_z+a_2'(z)-\mathrm{E}(a_1'(z)y_z+a_2'(z))\right]dz\right)^{2m}.
\end{aligned}$$

Функция

$$f(T) = T^{-m}\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T [a_1'(z)y_z + a_2'(z) - \mathrm{E}(a_1'(z)y_z + a_2'(z))]\,dz\right)^{2m}, \quad T > 0,$$

непрерывна по T, так как a_1', a_2' ограничены и $\mathrm{E}\,y_z^{2m} < \infty$ (и не зависит от z, поскольку y_z — стационарный). В окрестности нуля $f(T)$ не превышает $\mathrm{const}\cdot T^m$. Поэтому для доказательства ограниченности $\sup_{T>0} f(T)$ достаточно показать, что $\overline{\lim\limits_{T\to+\infty}} f(T) < \infty$. Это проверяется с использованием следующей леммы и рассуждений, аналогичных таковым при доказательстве следствия 1.

Лемма 4′. 1. *Если функции* $\alpha_i = \alpha_i(x,\mu)$, $i = 1, 2$, *таковы, что* $\exists\,\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0\ \exists\,K > 0\ \forall\,x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d\ \forall\,\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_2$:

$$\begin{gathered} |\alpha_i(x_1,\mu_1)| \le K(1+|x_1|), \\ |\alpha_i(x_1,\mu_1) - \alpha_i(x_2,\mu_2)| \le K(|x_1-x_2|^{\varepsilon_1} + \gamma_2^{\varepsilon_2}(\mu_1,\mu_2)), \end{gathered} \tag{17}$$

то существуют такие $c = c(K)$ *и* $\lambda = \lambda(K) > 0$, *что* $\forall\,s,t \in \mathbb{R}\ \forall\,k,l \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\mathrm{E}\,(\alpha_1(x_s(u),\mu_s))^k(\alpha_2(x_t(u),\mu_t))^l - \mathrm{E}\,(\alpha_1(x_s(u),\mu_s))^k\mathrm{E}\,(\alpha_2(x_t(u),\mu_t))^l\Big| \le$$
$$\le c\left(1+|u|^{k+l}\right)e^{-\lambda|t-s|}.$$

2. *Если выполняется (17) и*

$$\sup_x \sup_\nu |\alpha_i(x,\nu)| \le K,$$

то существуют такие C *и* $\lambda > 0$, *что* $\forall\,s,t \in \mathbb{R}\ \forall\,K_1,K_2,K_3,K_4 \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ K_2+K_4 < \overline{p},\ 2K_4 < \overline{p}+2$:

$$\Big|\mathrm{E}(\alpha_1(x_s(u),\mu_s)^{K_1}y_s^{K_2}(u)\alpha_2^{K_3}(x_s(u),\mu_s)y_t^{K_4}(u) -$$
$$- \mathrm{E}\,\alpha_1^{K_1}(x_s(u),\mu_s)y_s^{K_2}(u)\mathrm{E}\,\alpha_2^{K_3}(x_t(u),\mu_t)y_t^{K_4}(u)\Big| \le C(1+|u|^{K_1+K_3})e^{-\lambda|t-s|}.$$

Замечание 2. Доказательство данной леммы практически повторяет доказательство леммы 4. Условия $K_2+K_4 < \overline{p}$, $2K_4 < \overline{p}+2$ берутся только для того, чтобы существовали соответствующие моменты, которые используются при доказательстве леммы (см. также (12)).

Теорема 2 доказана.

1. *Dorogovtsev A. A., Kotelenez P.* Smooth stationary solutions of quasilinear stochastic partial differential equations: 1. Finite mass. — Cleveland, Ohio, 1997. — 19 p. — (Preprint / Dep. Math. Case Western Reserv Univ. Cleveland, Ohio, 97-145).
2. *Pilipenko A. Yu.* Stationary measure-valued processes generated by a flow of interacted particles // Ukr. Math. Congr. 2001: Proc. — P. 123 – 130.
3. *Pilipenko A. Yu.* The evolution of a system of particles and measure-valued processes // Theory Stochast. Process. — 1999. — **5(21)**, № 3 – 4. — P. 188 – 197.
4. *Mohammed S., Pilipenko A. Yu.* Absolute continuity of stationary measure-valued processes generated by stochastic equations with interaction // Ibid. — 2005. — **11(27)**, № 1 – 2. — P. 96 – 111.
5. *Dorogovtsev A. Ya.* Periodic and stationary regimes of infinite-dimensional deterministic and stochastic dynamical systems (in Russian). — Kiev: Vyshcha Shkola, 1992. — 320 p.
6. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. — Cambridge Univ. Press, 1992. — 454 p.
7. *Дороговцев А. А.* Стохастические дифференциальные уравнения и случайные меры на функциональных пространствах // Докл. РАН. — 2004. — **399**, № 3. — С. 303 – 306.
8. *Дороговцев А. А.* Мерозначные марковские процессы и стохастические потоки // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 2. — С. 178 – 189.
9. *Striker C., Yor M.* Calcul stochastique dependant d'un parametre // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. — 1978. — **45**, № 2. — S. 109 – 133.
10. *Леонов В. П.* Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов. — М.: Наука, 1964. — 68 с.
11. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations // Cambridge Stud. in Adv. Math. — 1990. — № 24. — 346 p.
12. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996. — 480 с.

Получено 30.12.2005