УДК 517.98

ПРО ОБОРОТНІСТЬ ОПЕРАТОРА $\frac{d}{dt} + A$ У ПРОСТОРІ $L_2(\mathbb{R}, H)$

М. Ф. Городній, А. В. Чайковський

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6
e-mail: gorodnii@yandex.ru
ChaikovskiyAV@ukr.net

We generalize the assertion on continuous invertibility of the operator $\frac{d}{dt} + A$ in the space $L_2(\mathbb{R}, H)$. Here H is a complex Hilbert space, A is a sectorial operator with the spectrum inside the right half-plane of $\mathbb{C}$.

Посилено твердження про неперервну оборотність у просторі $L_2(\mathbb{R}, H)$ оператора $\frac{d}{dt} + A$, де H — комплексний гільбертів простір, A — секторіальний оператор зі спектром у правій півплощині $\mathbb{C}$.

1. Вступ. Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір із нульовим елементом $\overline{0}$, $L(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з B у B; I — одиничний оператор у B. Нехай $A : D(A) \subset B \to B$ — секторіальний оператор, $\sigma(A)$ — спектр оператора A, e^{-As}, $s > 0$ — експонента від A [1], $e^{-A0} := I$.

Для кожного $1 \le p < +\infty$ позначимо через $L_p = L_p(\mathbb{R}, B)$ банахів простір усіх вимірних за Бохнером, сумовних з p-м степенем функцій з нормою $\|f\|_p := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} ||f(t)||^p dt \right)^{1/p}$ (див., наприклад, [2, с. 102]).

Оператору A поставимо у відповідність лінійний оператор $\mathcal{L}_A : D(\mathcal{L}_A) \subset L_p \to L_p$, який визначається за таким правилом. Функція x із класу L_p належить $D(\mathcal{L}_A)$ тоді й лише тоді, коли знайдеться така функція $f \in L_p$, що для всіх $t_0 \le t$ з $\mathbb{R}$ справджуються рівності

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s)\, ds, \tag{1}$$

де використовується інтеграл у сенсі Бохнера. При цьому покладаємо $\mathcal{L}_A x = f$.

Оскільки $\{e^{-A(t-s)} | -\infty < s \le t < +\infty\}$ є сім'єю еволюційних операторів для лінійного диференціального рівняння $x'(t) + Ax(t) = \vec{0}, t \in R$, то $\mathcal{L}_A = \frac{d}{dt} + A : D(\mathcal{L}_A) \subset L_p \to L_p$ є абстрактним параболічним оператором (див. [3, с. 165]).

З результатів роботи [4] випливає, що справджується така теорема.

Теорема 1. *Наведені нижче твердження є еквівалентними:*
a_1) *оператор $\mathcal{L}_A$ має обернений оператор $\mathcal{L}_A^{-1} \in L(L_p)$;*
a_2) *спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з уявною віссю $i\,\mathbb{R} := \{i\,t \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.*

Позначимо через $W_p^1 = W_p^1(\mathbb{R}, B)$ простір Соболєва функцій з L_p, узагальнені похідні яких належать L_p, а через $|\cdot|_{1,p}$ норму в W_p^1. З [5] випливає, що виконується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $A \in L(B)$, $\sigma(A) \cap i\,\mathbb{R} = \varnothing$. Тоді $D(\mathcal{L}_A) = W_p^1$ і лінійний оператор $\mathcal{L}_A : W_p^1 \to L_p$ є обмеженим і неперервно оборотним, тобто*

$$\exists M > 0\ \forall f \in L_p : \left|\mathcal{L}_A^{-1} f\right|_{p,1} \le M\, \|f\|_p.$$

Мета цієї статті — узагальнити результат теореми 2 на випадок секторіального оператора A зі спектром у правій півплощині, посиливши при цьому твердження $a_2) \Rightarrow a_1)$ з теореми 1. Про застосування таких результатів до дослідження лінійних параболічних диференціальних операторів див. [3] (гл. X) та [4].

2. Основний результат. Для кожного $1 \le p < +\infty$ позначимо $G_p^1 := \{f : \mathbb{R} \to D(A) |\ f, f', Af \in C(\mathbb{R}, B) \cap L_p(\mathbb{R}, B)\}$, $||f||_{G_p^1} = ||f||_p + ||f'||_p + ||Af||_p$. Нехай $\mathcal{G}_p^1$ — поповнення G_p^1 за нормою $||\cdot||_{G_p^1}$. Зауважимо, що справджується включення множин $\mathcal{G}_p^1 \subset L_p(\mathbb{R}, B)$.

Припустимо також, що

$$\sigma(A) \subset \{z\,\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}\,. \tag{2}$$

Через $\mathbf{1}_V$ позначатимемо індикатор множини $V \subset \mathbb{R}$. Далі використовується така лема.

Лема 1. *Нехай $1 \le p < +\infty$, A — секторіальний оператор, для якого виконується умова (2), y — фіксований елемент B, $\varphi := \mathbf{1}_{(a,b)} y$. Тоді єдиний розв'язок $x \in L_p(\mathbb{R}, B)$ рівняння $\mathcal{L}_A x = \varphi$ належить простору $\mathcal{G}_p^1$.*

Доведення. 1. Відомо [4], що розв'язок $x \in L_p(\mathbb{R}, B)$ рівняння $\mathcal{L}_A x = \varphi$ має вигляд $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^t e^{-A(t-s)} \varphi(s)\, ds$, $t \in \mathbb{R}$. Тому, врахувавши, що $\varphi = \mathbf{1}_{(a,b)} y$, отримаємо

$$x(t) = A^{-1}\left(I - e^{-A(t-a)}\right) y\, \mathbf{1}_{(a,b]}(t) + A^{-1}\left(e^{-A(t-b)} - e^{-A(t-a)}\right) y\, \mathbf{1}_{(b,+\infty)}(t),\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

При цьому

$$x'(t) = e^{-A(t-a)} y\, \mathbf{1}_{(a,b)}(t) + \left(e^{-A(t-a)} - e^{-A(t-b)}\right) y\, \mathbf{1}_{(b,+\infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R} \backslash \{a, b\}.$$

2. Для кожного $\varepsilon > 0$ розглянемо рівняння

$$\varepsilon x_\varepsilon'(t) + A\, x_\varepsilon(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Оскільки оператор A задовольняє умову (2), то для операторної експоненти справджуються оцінки [1]

$$\exists\, \delta > 0\ \exists\, L > 0\ \forall\, t > 0\ : \left\|e^{-At}\right\| \le Le^{-\delta t}, \quad \int\limits_0^{+\infty} \left\|e^{-At}\right\|^p dt \le \frac{L^p}{\delta p}. \tag{5}$$

Тому функція $Ax(t), t \in \mathbb{R}$, що є комбінацією експонент, неперервна, обмежена, належить класу $L_p(\mathbb{R},B)$. Отже [4], існує єдиний розв'язок рівняння (4) в $L_p(\mathbb{R},B)$:

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-s)}Ax(s)ds = \left(I - \frac{1}{1-\varepsilon}e^{-A(t-a)} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-a)}\right)A^{-1}y\mathbf{1}_{(a,b]}(t) +$$

$$+\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\left(e^{-A(t-b)} - e^{-A(t-a)}\right) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-b)} - e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-a)}\right)\right)A^{-1}y\mathbf{1}_{(b,+\infty)}(t),$$

$$x'_\varepsilon(t) = \frac{1}{1-\varepsilon}\left(e^{-A(t-a)} - e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-a)}\right)y\mathbf{1}_{(a,b]}(t) +$$

$$+\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\left(e^{-A(t-a)} - e^{-A(t-b)}\right) + \left(e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-b)} - e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-a)}\right)\right)y\mathbf{1}_{(b,+\infty)}(t),$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

При цьому легко перевірити безпосередньо, що $Ax_\varepsilon \in C(\mathbb{R},B)$, $x_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R},B)$; x_ε, x'_ε, $Ax_\varepsilon \in L_p(\mathbb{R},B)$. Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ x_\varepsilon \in G_p^1. \tag{6}$$

3. Доведемо, що $x'_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} x'$ в $L_p(\mathbb{R},B)$. З урахуванням (5) дістанемо

$$\|x'_\varepsilon(t) - x'(t)\| = \left\|\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}e^{-A(t-a)}y - \frac{1}{1-\varepsilon}e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-a)}y\right\| \le$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}||e^{-A(t-s)}\| + \frac{1}{1-\varepsilon}\|e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-a)}\|\right)\|y\| \le$$

$$\le L\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}e^{-\delta(t-a)} + \frac{1}{1-\varepsilon}e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}(t-a)}\right)\|y\|, \quad a < t < b,$$

$$\|x'_\varepsilon(t) - x'(t)\| = \left\|\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(e^{-A(t-a)} - e^{-A(t-b)})y + \frac{1}{1-\varepsilon}(e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-b)} - e^{-\frac{A}{\varepsilon}(t-a)})y\right\| \le$$

$$\le L\left(\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}e^{-\delta(t-b)} + \frac{2}{1-\varepsilon}e^{-\frac{\delta}{\varepsilon}(t-b)}\right)\|y\|, \quad t > b.$$

Тому $\|x'_\varepsilon - x'\|_p^p \le 3L\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{\delta p}\right)^{1/p} + \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\delta p}\right)^{1/p}\right)\|y\| \to 0, \varepsilon \to 0+$.

Також внаслідок (4) $Ax_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} Ax$ в $L_p(\mathbb{R},B)$. Отже, $\|x_\varepsilon - x\|_{G_p^1} \to 0, \varepsilon \to 0+$. З (6) випливає, що $x \in \mathcal{G}_p^1$.

Лему 1 доведено.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо* $p = 2$ *і* $B = H$ — *гільбертів простір, то* $D(\mathcal{L}_A) = \mathcal{G}_2^1$ *і оператор* $\mathcal{L}_A : \mathcal{G}_2^1 \to L_2(\mathbb{R}, H)$ *є обмеженим і неперервно оборотним.*

Доведення. 1. Нехай $\triangle > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in H$,

$$\varphi = \mathbf{1}_{(0,\triangle)} y_1 + \mathbf{1}_{(\triangle, 2\triangle)} y_2 + \ldots + \mathbf{1}_{((n-1)\triangle, n\triangle)} y_n. \tag{7}$$

Тоді розв'язок $x \in L_p(\mathbb{R}, H)$ рівняння $\mathcal{L}_A x = \varphi$ є скінченною сумою розв'язків вигляду (3), а отже, функції x, Ax, x', φ належать класу функцій

$$E(\mathbb{R}, H) := \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}, H) \mid \exists \mu > 0 \ : \ e^{-\mu|t|} \|f(t)\| \to 0, \ |t| \to +\infty \right\}.$$

2. Якщо f_1, $f_2 \in E(\mathbb{R}, H)$, то існують їх перетворення Фур'є $\widehat{f}_1$, $\widehat{f}_2$, і, аналогічно [6, с. 505],

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (f_1(t), f_2(t))\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}} (\widehat{f}_1(\lambda), \widehat{f}_2(\lambda)) d\lambda.$$

Тому для $f \in E(\mathbb{R}, H)$ справджується рівність Парсеваля

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

3. Застосувавши почленно до рівняння $x' + Ax = \varphi$ перетворення Фур'є, отримаємо $-it\, \widehat{x}(t) + A\widehat{x}(t) = \widehat{\varphi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Звідси $\widehat{x}(t) = (A - it)^{-1} \widehat{\varphi}(t)$, а отже, $A\, \widehat{x}(t) = \widehat{\varphi}(t) + $ $+ it(A - it)^{-1} \widehat{\varphi}(t), t \in \mathbb{R}$. За означенням секторіального оператора існує така стала $M > 0$, що $\|A\widehat{x}(t)\|_H \le (1 + M)\|\widehat{\varphi}(t)\|_H$, $t \in \mathbb{R}$. Тому з урахуванням рівності Парсеваля $\|Ax\|_2 =$ $= \|\widehat{Ax}\|_2 = \|A\widehat{x}\|_2 \le (1 + M)\|\widehat{\varphi}\|_2 = (1 + M)\|\varphi\|_2$. Отже, існує така стала $C > 0$, що для всіх функцій φ вигляду (7) справджується оцінка

$$\|x\|_{G_2^1} = \|x\|_2 + \|x'\|_2 + \|Ax\|_2 \le \|\varphi\|_2 + \left(\|A^{-1}\| + 2\right) \|Ax\|_2 \le C\|\varphi\|_2. \tag{8}$$

4. Якщо $y \in L_2(\mathbb{R}, H)$, то в $L_2(\mathbb{R}, H)$ існує така послідовність простих функцій $\{\varphi_n : n \ge 1\}$ вигляду (7), що $\varphi_n \to y$, $n \to \infty$. Нехай функції x_n, $n \ge 1$, є розв'язками рівнянь $x_n' + Ax_n = \varphi_n$ в $\mathcal{G}_2^1$, які існують за лемою 1. Тоді внаслідок (8) $\|x_n - x_m\|_{G_2^1} \le C\|\varphi_n -$ $-\varphi_m\|_2 \to 0$, $m, n \to \infty$, а отже, послідовність $\{x_n : n \ge 1\}$ є фундаментальною в $\mathcal{G}_2^1$. Тому вона збігається до деякого елемента $x \in \mathcal{G}_2^1$. При цьому внаслідок (7)

$$\forall n \ge 1 \ : \ \|x_n\|_{G_p^1} \le C\|\varphi_n\|_2 \Rightarrow \|x\|_{\mathcal{G}_p^1} \le C\|y\|_2. \tag{9}$$

З оцінки (9) випливає неперервна оборотність оператора $\mathcal{L}_A$.

Крім того,

$$x_n(t) = e^{-A(t-t_0)} x_n(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} \varphi_n(s)\, ds = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} \varphi_n(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси, переходячи до границі при $n \to \infty$ в нормі простору L_2 (це можливо внаслідок нерівності Гельдера й оцінок експоненти (4)), отримуємо

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} y(s)\, ds = e^{-A(t-t_0)} x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} y(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

тобто $x \in D(\mathcal{L}_A)$. Отже, $D(\mathcal{L}_A) \subset \mathcal{G}_2^1$.

Кожна функція $x \in \mathcal{G}_2^1$ є границею послідовності функцій $\{x_n : n \geq 1\} \subset G_p^1$. При цьому послідовність $f_n = x_n' + Ax_n$ збігається в L_2 до деякої функції $f \in L_2$. Для цих функцій x, f справджується рівність (1), отже, $x \in D(\mathcal{L}_A)$. Таким чином, $D(\mathcal{L}_A) \supset \mathcal{G}_2^1$.

Обмеженість оператора $\mathcal{L}_A$ випливає з теореми Банаха про обернений оператор.

Теорему 3 доведено.

Зазначимо, що в загальному випадку оператор $\mathcal{L}_A : \mathcal{G}_p^1 \to L_p(\mathbb{R}, B)$, $p \geq 1$, не завжди має обернений.

Приклад. Нехай $p = 1$, $B = c_0 = \left\{u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \mid u_k \in \mathbb{C},\, k \geq 1;\, \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0\right\}$ — банахів простір із нормою $\|u\|_\infty = \sup\limits_{k\geq 1} |u_k|$. Тоді оператор $A : c_0 \to c_0$, що діє за формулою $Au = (u_1, 2u_2, \ldots, nu_n, \ldots)$, $x \in c_0$, є секторіальним.

При цьому для розв'язку (3) у випадку $y = \left(\dfrac{1}{\ln 2}, \dfrac{1}{\ln 3}, \dfrac{1}{\ln 4}, \ldots\right)$ справджується оцінка

$$\|Ax(t)\|_\infty \geq \left(e^{-k(t-b)} - e^{-k(t-a)}\right) \frac{1}{\ln(k+1)} \geq e^{-1} \left(1 - e^{-(b-a)\left(\frac{1}{t-b}-1\right)}\right) \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{t-b}+1\right)},$$

$$b < t \leq b+1, \quad k = \left[\frac{1}{t-b}\right].$$

Позначимо $\varepsilon := b - a$. Тоді при $\varepsilon \in (0,1)$ дістанемо

$$\|Ax\|_{L_1(\mathbb{R},c_0)} \geq \int\limits_{b+\varepsilon}^{b+1} \|Ax(t)\|_\infty\, dt \geq \int\limits_{\varepsilon}^{1} e^{-1} \left(1 - e^{-\varepsilon\left(\frac{1}{t}-1\right)}\right) \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{t}+1\right)}\, dt \geq$$

$$\geq \int\limits_{\varepsilon}^{1} e^{-1} \left(\varepsilon\left(\frac{1}{t}-1\right) - \frac{\varepsilon^2\left(\frac{1}{t}-1\right)^2}{2}\right) \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{t}+1\right)}\, dt \geq$$

$$\geq \int\limits_{\varepsilon}^{1} e^{-1}\varepsilon \left(\frac{1}{t}-1\right) \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{t}+1\right)}\, dt - \frac{1}{2\ln 2} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \varepsilon^2 \left(\frac{1}{t}\right)^2 dt = \varepsilon s(\varepsilon) - \frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{2\ln 2},$$

де $s(\varepsilon) \to +\infty$, $\varepsilon \to 0+$. Оскільки $\|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R},c_0)} = \dfrac{\varepsilon}{\ln 2}$, то $\dfrac{\|Ax\|_{L_1(\mathbb{R},c_0)}}{\|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R},c_0)}} \to +\infty$, $\varepsilon \to 0+$. Це означає, що оператор $\mathcal{L}_A$ не має оберненого.

3. Висновок. За допомогою властивостей перетворення Фур'є для функцій зі значеннями в гільбертовому просторі доведено, що коли спектр оператора A задовольняє умову (2), то оператор $\mathcal{L}_A : \mathcal{G}_2^1 \to L_2$ є обмеженим і неперервно оборотним. Цей результат посилює відповідний результат з [4], згідно з яким існує $\mathcal{L}_A^{-1} \in L(L_2(\mathbb{R}, H))$.

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 829 с.
3. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 204 с.
4. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. — 1996. — **30**, № 3. — С. 1 – 11.
5. *Городній М. Ф.* L_p-розв'язки диференціального рівняння з обмеженим операторним коефіцієнтом // Наук. зап. НаУКМА. Фіз.-мат. науки. — 2003. — **21**. — С. 32 – 35.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 624 с.

Одержано 24.10.2005