УДК 517.9

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С НЕЧЕТКИМ ПАРАМЕТРОМ

И. В. Молчанюк, А. В. Плотников

Одес. акад. строительства и архитектуры
Украина, 65029, Одесса, ул. Дидрихсона, 4
e-mail: i-molchanyuk@ukr.net
a-plotnikov@ukr.net

We consider linear control systems with undetermined parameters. The undetermined parameters are considered as elements of a fuzzy set. For a given system, we introduce the notion of a pencil of trajectories and obtain some of its properties. Also, we introduce the notion of a fuzzy attainable set and prove that it is convex and compact.

Розглядаються лінійні системи управління з невизначеними параметрами, які є елементами нечіткої множини. Для цієї системи введено поняття жмутка траєкторій і отримано деякі його властивості. Також уведено поняття нечіткої множини досяжності і доведено її опуклість та компактність.

Понятие нечеткого множества впервые введено в работе [1]. В работе [2] было рассмотрено дифференциальное уравнение с нечеткими начальными условиями, а в статье [3] рассмотрены дифференциальные уравнения с нечеткой правой частью. Для такого типа уравнений были введены понятия решений и доказаны теоремы их существования.

В данной работе рассматривается управляемое линейное дифференциальное уравнение с нечеткими параметрами в правой части, рассмотрение свойств которого сводится к исследованию управляемого дифференциального включения с нечеткой правой частью. Получены некоторые свойства нечеткого пучка траекторий и множества достижимости.

Пусть $\mathrm{Comp}\,(R^n)$ $(\mathrm{Conv}\,(R^n))$ — пространство непустых компактных (и выпуклых) подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min\{r \geq 0 | A \subset S_r(B),\ B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in \mathrm{Comp}\,(R^n)$, $S_r(x)$ — шар радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $x \in R^n$, $S_r(A) = A + S_r(0)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u + C(t)v, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор, $u(t) \in U(t)$ — вектор управления, $U(\cdot) : R^1 \to \mathrm{Conv}\,(R^m)$ — многозначное отображение, $A(t), B(t), C(t)$ — матрицы соответствующих размерностей $n \times n,\ n \times m$ и $n \times k,\ v \in R^k$ — нечеткое внешнее воздействие (помеха), $v(t) \in V$ — нечеткое множество с характеристической функцией $\mu(x), \mu(\cdot) : R^k \to [0,1]$, которые удовлетворяют следующим условиям:

Предположение 1. *1. Матрицы $A(t), B(t), C(t)$ измеримы на R^1.*

2. Существуют константы $a > 0, b > 0, c > 0$ такие, что $\|A(t)\| \leq a$, $\|B(t)\| \leq b, \|C(t)\| \leq c$ для почти всех $t \in R^1$.

3. Многозначное отображение $U(t)$ измеримо на R^1.

4. Существует константа $g > 0$ такая, что $\|U(t)\| \le g$ для почти всех $t \in R^1$.

5. Характеристическая функция $\mu(\cdot) : R^1 \to [0,1]$ удовлетворяет условиям:

а) является модальной, т. е. существует хотя бы одно $y_0 \in R^k$ такое, что $\mu(y_0) = 1$;

б) $\mu(y)$ непрерывна по y;

в) для любого $\varepsilon > 0$ и $y \in R^k \setminus \{y|\mu(y) = 1\}$ существуют $y_1, y_2 \in R^k$ такие, что $\|y - y_1\| < \varepsilon, \|y - y_2\| < \varepsilon$ и $\mu(y_1) < \mu(y) < \mu(y_2)$;

г) множество $[V]^0 = \mathrm{cl}\,\{y|\mu(y) > 0\}$ компактно.

Случай, когда ограничения на помеху были четкими, рассматривался в работах [4, 5].

Определение 1. *α-Срезку нечеткого множества V определим следующим образом:*

$$[V]^\alpha = \begin{cases} \{y \in R^n|\mu(y) \ge \alpha\}, & \alpha \in (0,1], \\ \mathrm{cl}\,\{y \in R^n|\mu(y) > \alpha\}, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Свойство 1. *Из условия 5 предположения 1 следует:*

1) для любых α_1, α_2 таких, что $\alpha_1 < \alpha_2$, $[V]^{\alpha_2} \subset [V]^{\alpha_1}$;

2) для любого $0 \le \alpha \le 1$ соответствующая α-срезка нечеткого множества V является компактным множеством в R^n.

Доказательство. 1. Возьмем любые $\alpha_1 \in (0,1], \alpha_2 \in (0,1]$ такие, что $\alpha_1 < \alpha_2$, и предположим противное, т. е. $[V]^{\alpha_2}$ не входит в $[V]^{\alpha_1}$. Следовательно, существует хотя бы один $y \in R^n$ такой, что y принадлежит $[V]^{\alpha_2}$ и не принадлежит $[V]^{\alpha_1}$. Согласно определению множества $[V]^{\alpha_2}$, ему принадлежат y, для которых выполняется $\mu(y) \ge \alpha_2$, но так как $\alpha_1 < \alpha_2$, то $\mu(y) > \alpha_1$. Отсюда следует, что $y \in [V]^{\alpha_1}$ и выполняется условие $[V]^{\alpha_2} \subset [V]^{\alpha_1}$.

2. Выберем произвольное $\alpha \in (0,1]$ и покажем замкнутость. Рассмотрим любую последовательность $\{y_k^\alpha\}_{k=1}^\infty \in [V]^\alpha$, которая сходится к некоторому $y^\alpha \in R^n$. Покажем, что $y^\alpha \in [V]^\alpha$. Используя свойство непрерывности функции $\mu(y)$, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(\{y_k^\alpha\}) \to \mu(y^\alpha)$. Поскольку элементы последовательности $\{y_k^\alpha\}$ принадлежат $[V]^\alpha$ для любого $k = \overline{1,\infty}$, то $\mu(y_k^\alpha) \in [\alpha, 1]$ для любого $k = \overline{1,\infty}$. Следовательно, $y^\alpha \in [V]^\alpha$.

Для случая $\alpha = 0$ компактность множества $[V]^0$ следует из условия 5г) предположения 1. Согласно п. 1, для любого $\alpha \in (0,1]$ $[V]^\alpha \subset [V]^0$. Следовательно, $[V]^\alpha \in R^k$ — компактно, что и требовалось доказать.

Рассмотрим управляемое нечеткое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u + C(t)V, \qquad x(0) = x_0, \tag{2}$$

которое получается из системы (1) при замене параметра $v(t)$ на нечеткое множество V.

Системе (2) поставим в соответствие систему

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u + C(t)[V]^\alpha, \qquad x(0) = x_0, \tag{3}$$

где $[V]^\alpha$ — некоторая α-срезка нечеткого множества V, $\alpha \in [0,1]$.

Определение 2. *Множество всех измеримых селекторов $U(\cdot)$ на $[0,\infty)$ будем называть множеством допустимых управлений и обозначать U.*

Обозначим через $[X(u)]^\alpha$ пучок траекторий системы (3), соответствующих допустимому управлению $u(\cdot)$, а через $[X(\cdot,u)]^\alpha$ соответствующее сечение пучка $[X(u)]^\alpha$ в момент времени $t>0$.

Теорема 1. *При выполнении условий предположения 1 для любого $\alpha\in[0,1]$ и любого допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующий пучок $[X(u)]^\alpha$ системы (3) удовлетворяет условиям:*

1) для всех $t>0$ многозначное отображение $[X(t,u)]^\alpha$ представимо в виде

$$[X(t,u)]^\alpha = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)[V]^\alpha ds; \qquad (4)$$

2) $[X(t,u)]^\alpha\in \mathrm{Conv}\,(R^n)$ для всех $t>0$;

3) при каждом допустимом управлении $u(\cdot)$ многозначная траектория $[X(\cdot,u)]^\alpha$ является абсолютно непрерывным многозначным отображением;

4) для любых $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$ таких, что $\alpha_1<\alpha_2$, и для почти всех $t>0$

$$[X(t,u)]^{\alpha_2}\subset[X(t,u)]^{\alpha_1}. \qquad (5)$$

Доказательство. Представление многозначной траектории $[X(\cdot,u)]^\alpha$ в виде (4) следует из формулы Коши для решения линейных дифференциальных уравнений и определения множества $[X(t,u)]^\alpha$.

Выполнение условия 2 следует из формулы (4), свойства 1 и свойств интеграла Ауманна [6].

Справедливость условия 3 вытекает из [7, 8].

Докажем условие 4. Для любых $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$ при $\alpha_1>\alpha_2$ $[X(t,u)]^{\alpha_1}\subset[X(t,u)]^{\alpha_2}$. Запишем уравнение (4) для соответствующих пучков:

$$[X(t,u)]^{\alpha_1} = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \Phi(t)\int\limits_o^t \Phi^{-1}(s)C(s)[V]^{\alpha_1} ds,$$

$$[X(t,u)]^{\alpha_2} = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \Phi(t)\int\limits_o^t \Phi^{-1}(s)C(s)[V]^{\alpha_2} ds.$$

Поскольку, согласно свойству 1, $[V]^{\alpha_2}\subset[V]^{\alpha_1}$ при $\alpha_1<\alpha_2$, то

$$\Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)[V]^{\alpha_2} ds \subset \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)[V]^{\alpha_1} ds, \quad \alpha_1<\alpha_2,$$

и, следовательно, $[X(t,u)]^{\alpha_2}\subset[X(t,u)]^{\alpha_1}$ при $\alpha_1<\alpha_2$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предположения 1. Если два любых нечетких множества* V_1 *и* V_2 *такие, что для любого* $\alpha \in [0,1]$ $\quad \mathrm{conv}\,[V_1]^\alpha = \mathrm{conv}\,[V_2]^\alpha$, *то для любого допустимого управления* $u(\cdot)$ *соответствующие пучки* $[X_1(u)]^\alpha$ *и* $[X_2(u)]^\alpha$ *системы (3) удовлетворяют условию*

$$[X_1(t,u)]^\alpha = [X_2(t,u)]^\alpha$$

при всех $t \geq 0$.

Доказательство. Данная теорема следует из (4) и свойства интеграла Ауманна [6], что для интегрируемого по Ауманну многозначного отображения выполняется свойство

$$\int\limits_0^T F(t)dt = \int\limits_0^T \mathrm{conv}\,(F(t))dt = \mathrm{conv}\int\limits_0^T F(t)dt.$$

Определение 3. *Назовем нечетким пучком траектории системы (2) нечеткое множество* $X(u)$ *такое, что для любого* $t > 0$ α*-срезки* $X(t,u)$ *совпадают с* $[X(t,u)]^\alpha$ *вида (4).*

Определение 4. *Нечеткое многозначное отображение будем называть абсолютно непрерывным, если каждая его* α*-срезка является абсолютно непрерывным многозначным отображением.*

Определение 5. *Нечеткое множество будем называть компактным, если каждая его* α*-срезка является компактным множеством.*

Определение 6. *Нечеткое множество будем называть выпуклым, если каждая его* α*-срезка является выпуклым множеством.*

Определение 7 [3]. *Интегралом от нечеткого многозначного отображения* $\int_0^T F(s)ds$ *будем называть нечеткое множество,* α*-срезки которого совпадают с интегралом от* α*-срезки многозначного отображения* $F(\cdot)$*, т. е. выполняется условие*

$$\left[\int\limits_0^T F(s)ds\right]^\alpha = \int\limits_0^T [F(s)]^\alpha ds = \left\{\int\limits_0^T F(s)ds | f : R^1 \to R^k\right\},$$

где $\int_0^T [F(s)]^\alpha ds$ понимается в смысле интеграла Ауманна [6].

Теорема 3. *При выполнении условий предположения 1 для любого допустимого управления* $u(\cdot)$ *соответствующий нечеткий пучок* $X(u)$ *системы (2) удовлетворяет условиям:*

1) для всех $t > 0$ *многозначное отображение* $X(t,u)$ *представимо в виде*

$$X(t,u) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)Vds, \tag{6}$$

где $\int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)V\,ds$ *понимается в смысле определения (6);*

2) при каждом допустимом управлении $u(\cdot)$ *многозначная траектория* $X(\cdot, u)$ *является нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением.*

Доказательство. Покажем справедливость (6). Существование интегралов

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds \quad \text{и} \quad \int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)V ds$$

следует из [3, 8]. Рассмотрим α-срезку выражения, содержащегося в правой части (6):

$$\left[\Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)V ds\right]^\alpha =$$

$$= [\Phi(t)x_0]^\alpha + \left[\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds\right]^\alpha + \left[\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)V ds\right]^\alpha =$$

$$= \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)C(s)[V]^\alpha ds.$$

Согласно теореме 1, последнее выражение равно $[X(t,u)]^\alpha$. Тогда утверждение 1 следует из определения 2, утверждение 2 — из утверждения 1 данной теоремы, утверждения 3 теоремы 1 и определения 6.

Теорема доказана.

Определение 8. *Множеством достижимости* $[Y(t)]^\alpha$ *системы (3) назовем множество всех подмножеств из* $\mathrm{Comp}\,(R^n)$*, в которые можно перевести систему (3) из начального состояния* x_0 *с помощью допустимых управлений* $u(\cdot)$ *за время* $[0,T]$.

Теорема 4. *При выполнении условий предположения 1 для всех* $\alpha \in [0,1]$ *множество достижимости* $[Y(T)]^\alpha$ *системы (3) выпукло и компактно.*

Доказательство. Покажем выпуклость. Возьмем призвольное $\alpha \in (0,1]$ и допустимые управления $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$. Покажем, что для любого $0 \le \beta \le 1$ существует такое допустимое $u_\beta(s)$, что

$$[X(T, u_\beta(s))]^\alpha = \beta\,[X(T, u_1(s))]^\alpha + (1-\beta)\,[X(T, u_2(s))]^\alpha\,.$$

Используя представление (4), получаем

$$\beta\left[\Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u_1(s)ds + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)(s)[V]^\alpha ds\right] +$$

$$+ (1-\beta)\left[\Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u_2(s)(s)ds + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)(s)[V]^\alpha ds\right] =$$

$$= \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)(\beta u_1(s) + (1-\beta)u_2(s))ds +$$

$$+ \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)(s)[V]^\alpha ds.$$

Поскольку для почти всех $s \geq 0$ $U(s)$ выпукло, существует такое $u_\beta(s) \in U(s)$, что $u_\beta(s) = \beta u_1(s) + (1-\beta)u_2(s)$. Значит, существует многозначная траектория $[X(\cdot, u_\beta)]^\alpha$ такая, что $[X(T, u_\beta)]^\alpha \subset [Y(T)]^\alpha$. Следовательно, $[Y(T)]^\alpha$ — выпукло.

Докажем компактность. Вначале покажем замкнутость. Рассмотрим любую последовательность $\{[X(T, u_k)]^\alpha\}_{k=1}^\infty \in [Y(T)]^\alpha$, которая сходится к некоторому $\overline{X}$. Рассмотрим последовательность $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$, соответствующую последовательности $\{[X(T, u_k)]^\alpha\}_{k=1}^\infty$. Согласно теореме Асколи – Арцела [9], из последовательности $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ можно выделить слабосходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_1}(\cdot)\}_{k_1=1}^\infty$. Благодаря выпуклости $U(t)$ для почти всех $t \geq 0$ и теореме Мазура [10] можно построить последовательность $\{[u_{k_2}(\cdot)\}_{k_2=1}^\infty$, сильносходящуюся к некоторому $\bar{u}(\cdot)$. Перейдя к пределу, получим $\lim\limits_{k_2\to\infty} = [X(T, u_{k_2}]^\alpha [X(T, \bar{u}(\cdot))]^\alpha = \overline{X}$. Тем самым $[Y(T)]^\alpha$ — замкнутое множество для всех $\alpha \in [0,1]$.

Рассмотрим дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)U(t) + C(t)[V]^\alpha, \qquad x(0) = x_0. \tag{7}$$

Известно [11], что множество достижимости $[Z(T)]$ системы (7) является выпуклым и компактным. Обозначим через $\overline{Z}$ множество, элементами которого являются компактные подмножества множества $[Z(T)]$. Поскольку $\overline{Z}$ — компактное множество [12], а $Y[T]$ — его замкнутое подмножество, $Y[T]$ — компактно.

Теорема доказана.

Определение 9. *Нечетким множеством достижимости $Y(T)$ системы (2) назовем множество всех нечетких множеств, α-срезки которого совпадают с $[Y(T)]^\alpha$ для всех $\alpha \in [0,1]$.*

Тогда из теорем 3 и 4 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *При выполнении условий предположения 1 нечеткое множество достижимости $Y(T)$ системы (2) является выпуклым и компактным.*

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy set // Inform. and Contr. — 1965. — № 8. — P. 338 – 353.
2. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1998. — **98**, № 1. — P. 147 – 148.
3. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniquenees theorem for a solution of fuzzy difterential equation // Int. J. Math. and Math. Sci. — 1999. — **2**, №2. — P. 271 – 279.
4. *Отакулов С.* Задачи оптимизации для управляемых дифференциальных включений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Ташкент, 1993. — 270 с.
5. *Плотников А. В.* Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Одесса, 1994. — 198 с.
6. *Aumann R. J.* Integrals of the set-valued function // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — **12**. — P. 1 – 12.
7. *Arstein Z., Burne J. A.* Integration of compact set-valued function // Pacif. J. Math. — 1975. — **58**, № 2. — P. 297 – 307.
8. *Натансон И. П.* Теория функций действительного переменного. — М.: Наука, 1974. — 319 с.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1967. — 624 с.
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа / Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.
11. *Благодатских В. И.* Теория дифференциальных включений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — Ч. 2. — 86 с.
12. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. — М.: Изд-во МФТИ, 1982. — 127 с.

Получено 11.12.2005