УДК 517.9

ГАМІЛЬТОНОВІ СКІНЧЕННОВИМІРНІ РЕДУКЦІЇ ОСЦИЛЯТОРНОГО ТИПУ ІНТЕГРОВНИХ ЗА ЛАКСОМ СУПЕРКОНФОРМНИХ ІЄРАРХІЙ

О. Є. Гентош

Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України
Україна, 79059, Львів, вул. Наукова, 3 Б
e-mail: dept25@iapmm.lviv.ua
hento@ua.fm

For bi-Hamiltonian superconformal hierarchies of nonlinear Benny – Kaup and Kaup – Broer dynamical systems, we develop a method for reduction into nonlocal finite dimensional invariant subspaces of Neumann and Bargman types, correspondingly. We prove that there exist even supersymplectic structures on these spaces, and that the Lax – Liouville reduced commuting vector fields generated by the hierarchies are integrable.

Для бігамільтонових суперконформних ієрархій нелінійних динамічних систем Бенні – Каупа і Каупа – Броера розвинено метод редукування на нелокальні скінченновимірні інваріантні підпростори Неймана та Баргмана відповідно. Доведено існування парних суперсимплектичних структур на цих підпросторах та інтегровність за Лаксом – Ліувіллем редукованих комутуючих векторних полів, породжених ієрархіями.

1. Вступ. У 1976 р. О. І. Богоявленський та С. П. Новіков [1] довели теорему про гамільтоновість відносно канонічної симплектичної структури обмеження векторного поля, породженого рівнянням Кортевега – де Фріза, на стаціонарний підпростір його однорідної симетрії. На основі цієї теореми було розвинено метод редукування [2] узгоджено бігамільтонових ієрархій нелінійних динамічних систем, що мають нескінченну послідовність інволютивних локальних законів збереження та матричне зображення Лакса [3 – 5] з інваріантним відносно еволюцій ієрархії спектральним параметром, на скінченновимірні підпростори критичних точок функції Лагранжа, яка є скінченною лінійною комбінацією локальних законів збереження. Використовуючи теорію Картана диференціальних форм, А. К. Прикарпатський [6] отримав диференціальні співвідношення для знаходження точної симплектичної структури на таких скінченновимірних інваріантних підпросторах та гамільтоніанів редукованих векторних полів.

Ю. Мозер [7] встановив, що достатньо широкий клас інтегровних за Лаксом – Ліувіллем [8] динамічних систем осциляторного типу на скінченновимірних многовидах типу Неймана та Баргмана [9] є інваріантними редукціями відомих інтегровних за Лаксом нескінченновимірних систем на підпростори спільних критичних точок деякого локального закону збереження та скінченної кількості власних значень (нелокальних законів збереження), а їх зображення Лакса — редукованими рівняннями Новікова – Марченка [2, 4, 10] для матриці монодромії асоційованих періодичних спектральних задач. М. Блашак [11] запропонував вивчати диференціально-геометричні властивості нелокальної скінченновимірної інваріантної редукції узгоджено бігамільтонової ієрархії динамічних систем на періодичному функціональному многовиді як властивості векторного поля на стаціонарному підпросторі однорідної симетрії системи, розширеної еволюціями прямої та спряженої спектральних задач.

Використання результатів Ю. Мозера, А. К. Прикарпатського та М. Блашака дозволило розробити і теоретично обґрунтувати алгоритм дослідження гамільтоновості та інтегровності за Лаксом – Ліувіллем редукованих комутуючих векторних полів узгоджено бігамільтонових ієрархій динамічних систем. Алгоритм застосовувався для вивчення нелокальних скінченновимірних редукцій типу Неймана або Баргмана $(1+1)$-вимірних динамічних систем Бенні – Каупа [12], Буссінеска [13], Каупа – Броера [14], інверсної системи Каупа – Броера [15] та $(2+1)$-вимірної системи Деві – Стюартсона [16]. У роботі [14] за допомогою цього алгоритму отримано гамільтоновий відносно парної канонічної суперсимплектичної структури [17, 18] та інтегровний за Лаксом – Ліувіллем супераналог осциляторної динамічної системи на скінченновимірному супермноговиді $T^*(\mathbf{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2}$, де $T^*(\mathbf{S}^{N-1})$ — кодотичний простір до сфери $\mathbf{S}^{N-1}$, а H^{N-2} — проективна $(N-2)$-вимірна гіперповерхня.

У пунктах 2 і 3 за допомогою диференціальних співвідношень для функціонала Лагранжа на розширених фазових просторах суперконформних ієрархій Бенні – Каупа і Каупа – Броера встановлено існування парних суперсимплектичних структур на нелокальних скінченновимірних інваріантних підпросторах типу Неймана і Баргмана відповідно. На основі властивостей суперматриць монодромії [19] для пов'язаних з ієрархіями періодичних матричних спектральних задач доведено інтегровність за Лаксом – Ліувіллем редукованих комутуючих векторних полів.

2. Скінченновимірна редукція типу Неймана суперконформної ієрархії Бенні – Каупа. Суперконформну ієрархію Бенні – Каупа утворюють узгоджено бігамільтонові нелінійні динамічні системи на періодичному функціональному супермноговиді $\breve{M}^{2|2} \subset C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2|2})$:

$$\left(\frac{du}{dt_j}, \frac{dv}{dt_j}, \frac{d\xi}{dt_j}, \frac{d\zeta}{dt_j}\right)^\tau = -\breve{\eta}\,\nabla_l\,\breve{\gamma}_{j+1}[u,v,\xi,\zeta] = \\ = -\breve{\vartheta}\,\nabla_l\,\breve{\gamma}_j[u,v,\xi,\zeta], \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

де $\nabla_l : \breve{M}^{2|2} \to T^*(\breve{M}^{2|2})$ — оператор лівого градієнта на супермноговиді $\breve{M}^{2|2}$, суперімплектичні оператори $\breve{\eta}, \breve{\vartheta} : T^*(\breve{M}^{2|2}) \to T(\breve{M}^{2|2})$ набирають вигляду

$$\breve{\eta} = \begin{pmatrix} v\partial + \partial v & -2\partial & \zeta\partial + \frac{1}{2}\,\partial\zeta & 0 \\ -2\partial & 0 & 0 & 0 \\ \partial\zeta + \frac{1}{2}\,\zeta\partial & 0 & -\frac{1}{2}\,v & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\breve{\vartheta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\partial^3 - (u\partial + \partial u) & 0 & -\left(\xi\partial + \frac{1}{2}\,\partial\xi\right) & 0 \\ 0 & -2\partial & 0 & 0 \\ -\left(\partial\xi + \frac{1}{2}\,\xi\partial\right) & 0 & \frac{1}{2}(u - \partial^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

а відповідна послідовність гамільтоніанів запишеться так:

$$\breve{\gamma}_0 = \int\limits_0^{2\pi} v\,dx, \quad \breve{\gamma}_1 = \int\limits_0^{2\pi} \left(u + \frac{1}{4}v^2 - \zeta\zeta_x\right)\,dx,$$
$$\breve{\gamma}_2 = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\,uv + \frac{1}{8}\,v^3 - \frac{3}{2}\,u\zeta\zeta_x + \xi\zeta_x - \xi_x\zeta\right)\,dx, \tag{3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

У випадку $j = 2$ маємо супераналог нелінійної динамічної системи Бенні – Каупа

$$\frac{du}{dt_2} = -\frac{1}{4}\,v_{xxx} + \frac{1}{2}\,u_x v + u v_x - 3\xi\zeta_{xx} - \xi_x\zeta_x,$$
$$\frac{dv}{dt_2} = u_x + \frac{3}{2}\,v v_x - 3\zeta\zeta_{xx},$$
$$\frac{d\xi}{dt_2} = -\zeta_{xxx} + u\zeta_x + \frac{3}{4}\,v_x\xi + \frac{1}{2}\,v\xi_x,$$
$$\frac{d\zeta}{dt_2} = \xi_x + \frac{3}{2}\,v\zeta_x + \frac{3}{4}\,v_x\zeta.$$

Кожне рівняння суперконформної ієрархії Бенні – Каупа (1) можна подати як умову сумісності двох лінійних матричних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dY}{dx} = AY, \tag{4}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ u + \lambda v - \lambda^2 & 0 & -(\xi + \lambda\zeta) \\ \xi + \lambda\zeta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $(u,v,\xi,\zeta)^\tau \in \breve{M}^{2|2}$, супервектор $Y := (f,g,\psi)^\tau \in L_\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C}^{2|1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, та

$$\frac{dY}{dt_j} = \left(\lambda^{j+1}S\right)_+ := B_jY, \tag{5}$$

де $j \in \mathbb{Z}_+$, $S := S(x;\lambda) \simeq \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_+} S_j\lambda^{-j}$ — асимптотичний розклад суперматриці монодромії рівняння (4),

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а нижній індекс $+$ позначає поліноміальну частину відповідного виразу.

Існування матричного зображення Лакса (4), (5) з інваріантним відносно еволюцій d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, спектральним параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ та нескінченної послідовності локальних законів збереження (3) дозволяє розвинути метод редукування на нелокальні скінченновимірні інваріантні підпростори суперконформної ієрархії Бенні – Каупа (1) та звести пошук її частинних розв'язків до інтегрування в квадратурах, наприклад, осциляторної динамічної системи типу Неймана на скінченновимірному супермноговиді $T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes \otimes H^{N-2} \otimes \mathbb{R}^{0|1}$, де $T^*(\mathbb{S}^{N-1})$ — кодотичний простір до сфери $\mathbb{S}^{N-1}$, а H^{N-2} — проективна $(N-2)$-вимірна гіперповерхня. Покажемо, що така скінченновимірна динамічна система виникає в результаті редукування векторного поля d/dx на інваріантний підпростір $\breve{M}_N^{2|2} \subset \breve{M}^{2|2}$ суперконформної ієрархії Бенні – Каупа (1):

$$\breve{M}_N^{2|2} := \left\{(u,v,\xi,\zeta)^\tau \in \breve{M}^{2|2} : \operatorname{grad}_l \mathcal{L}_N[u,v,\xi,\zeta] = 0\right\}, \tag{6}$$

де функціонал Лагранжа $\mathcal{L}_N$ має вигляд

$$\mathcal{L}_N = -\breve{\gamma}_1 + \sum_{i=1}^N c_i\lambda_i,$$

а власні значення $\lambda_i \in D(\breve{M}^{2|2})$, $i = \overline{1,N}$, періодичної спектральної задачі (4) є гладкими за Фреше функціоналами на супермноговиді $\breve{M}^{2|2}$. Далі будемо вважати λ_i, $i = \overline{1,N}$, дійсними з відповідними власними вектор-функціями $Y_i := (f_i,g_i,\psi_i)^\tau \in W := L_\infty(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}^{2|1})$, $\pi(f_i) = \pi(g_i) = 0$, $\pi(\psi_i) = 1$.

Дослідимо диференціально-геометричну структуру підпростору $\breve{M}_N^{2|2} \subset \breve{M}^{2|2}$.

Для явного опису підпростору (6) обчислимо ліві градієнти $\operatorname{grad}_l \lambda_i \in T^*(\breve{M}^{2|2})$ власних значень $\lambda_i \in D(\breve{M}^{2|2})$, $i = \overline{1,N}$, за допомогою спектральної задачі (4). Ці величини виражаються через відповідні власні вектор-функції $Y_i \in W$, $i = \overline{1,N}$, таким чином:

$$\operatorname{grad}_l \lambda_i = \left(f_i^2, \lambda_i f_i^2, -2f_i\psi_i, -2\lambda_i f_i\psi_i\right)^\tau/\mu_i,$$

де $\mu_i = \int_0^{2\pi}(2\lambda_i f_i^2 - vf_i^2 + 2\zeta f_i\psi_i)dx \in D(\breve{M}^{2|2} \times W^N)$, $i = \overline{1,N}$, — нормуючі множники, які є інваріантами векторних полів (4), (5). У випадку $\mu_i = c_i$, $i = \overline{1,N}$, умова (6) набирає вигляду обмежень типу Неймана:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{N} f_i g_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{N} f_i \psi_i = 0, \tag{7}$$

а також

$$v = 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i^2, \quad \zeta_x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_i f_i \psi_i.$$

Зі спектральної задачі (4) можна також отримати вирази для функцій $(u, v, \xi, \zeta)^\tau \in \breve{M}^{2|2}$ та означити підпростір $\breve{M}_N^{2|2}$ еквівалентним чином:

$$\breve{M}_N^{2|2} = \Bigg\{ (u, v, \xi, \zeta)^\tau \in \breve{M}^{2|2} : u = \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda_i f_i^2 - g_i^2 \right) - \frac{1}{2} v^2 + \zeta\zeta_x,$$

$$v = 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i^2, \xi = -\sum_{i=1}^{N} g_i \psi_i - \frac{1}{2} v\zeta, \ \zeta_x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_i f_i \psi_i \Bigg\}. \tag{8}$$

Отже, розв'язки суперконформної ієрархії Бенні – Каупа (1) на підпросторі (8) виражаються через компоненти власних вектор-функцій Y_i, $i = \overline{1, N}$, та функцію $\zeta \in C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^{0|1})$, що використаємо для введення координат на підпросторі $\breve{M}_N^{2|2} \subset \breve{M}^{2|2}$.

На фазовому просторі $\tilde{M}^{2|2} := \breve{M}^{2|2} \times W^{2N}$ ієрархії спарених динамічних систем (1), (5) з параметром $\lambda = \lambda_i$, $i = \overline{1, N}$, розглянемо функціонал Лагранжа $\tilde{\mathcal{L}}_N = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{L}}_N[u, v, \xi, \zeta, Y_i] dx$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_N = -\breve{\gamma}_1 + \sum_{j=1}^{N} \lambda_i' + \sum_{i=1}^{N} s_i \mu_i',$$

$$\lambda_i' := \int_0^{2\pi} \left(g_i^2 + u f_i^2 - 2\xi f_i \psi_i - \psi_i \psi_{i,x} \right) dx,$$

$$\mu_i' := \int_0^{2\pi} \left(\lambda_i f_i^2 - v f_i^2 + 2\zeta f_i \psi_i \right) dx,$$

де $s_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, N}$, — деякі константи. Умова

$$\operatorname{grad}_l \tilde{\mathcal{L}}_N[u, v, \xi, \zeta, Y_i] = 0$$

задає інваріантний підпростір $\tilde{M}_N^{2|2} \subset \tilde{M}^{2|2}$ цієї ієрархії. На $\tilde{M}_N^{2|2}$ існує точна парна 2-форма $\omega^{(2)} = d\alpha^{(1)}$, де 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(\tilde{M}^{2|2})$ задовольняє диференціальне співвідношення

$$d\tilde{\mathcal{L}}_N[u, v, \xi, \zeta, Y_i] = < (du, dv, d\xi, d\zeta, dY_i)^\tau, \ \operatorname{grad}_l \tilde{\mathcal{L}}_N[u, v, \xi, \zeta, Y_i] > + \frac{d\alpha^{(1)}}{dx} \tag{9}$$

для будь-яких $(u,v,\xi,\zeta,Y_i)^\tau \in \tilde{M}_N^{2|2}$. У формулі (9) символом $<,>$ позначено звичайний скалярний добуток в $\mathbb{R}^{(2N+2)|(N+2)}$. Із співвідношення (9) отримуємо 2-форму $\omega^{(2)}$ у вигляді

$$\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{N}(2dg_i \wedge df_i + d\psi_i \wedge d\psi_i) + d\zeta \wedge d\zeta, \tag{10}$$

яка є виродженою на $\tilde{M}_N^{2|2} \subset \tilde{M}^{2|2}$. Оскільки підпростір $\breve{M}_N^{2|2}$ можна вкласти у $\tilde{M}_N^{2|2}$ згідно з формулою (8), то парна 2-форма $\omega^{(2)}$ задає на $\breve{M}_N^{2|2}$ невироджену суперсимплектичну структуру. Існування цієї структури на $\breve{M}_N^{2|2}$ доводить дифеоморфність підпростору $\breve{M}_N^{2|2} \subset \breve{M}^{2|2}$ та заданого умовою (7) скінченновимірного супермноговиду $T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes \otimes H^{N-2} \otimes \mathbb{R}^{0|1} \subset \mathbb{R}^{2N|(N+1)}$ з суперсимплектичною структурою (10).

Для функції $\tilde{h}^{(x)} \in D(\tilde{M}_N^{2|2})$, знайденої за формулою

$$\left\langle \Big(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{d\xi}{dx}, \frac{d\zeta}{dx}, \frac{dY_i}{dx}\Big)^\tau,\ \mathrm{grad}_l\, \tilde{\mathcal{L}}_N[u,v,\xi,\zeta,Y_i] \right\rangle = -\frac{d\tilde{h}^{(x)}}{dx},$$

на підпросторі $\tilde{M}_N^{2|2} \subset \tilde{M}^{2|2}$ має місце рівність

$$i_{d/dx}\omega^{(2)} = -d\tilde{h}^{(x)},$$

де i_d/dx – внутрішнє диференціювання за векторним полем $d/dx\,:\, \tilde{M}_N^{2|2} \to T(\tilde{M}_N^{2|2})$ в алгебрі Грассмана диференціальних форм на $\mathbb{R}^{(2N+2)|(N+2)}$. Оскільки ця рівність зберігається на підпросторі $\breve{M}_N^{2|2} \subset \tilde{M}_N^{2|2}$, то при $s_i = -\lambda_i$, $i=\overline{1,N}$, функція $h^{(x)} := \tilde{h}^{(x)}|_{\breve{M}_N^{2|2}} \in \in D(\breve{M}_N^{2|2})$ є гамільтоніаном векторного поля d/dx на $\breve{M}_N^{2|2}$.

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Функціональний підпростір $\breve{M}_N^{2|2} \subset \breve{M}^{2|2}$ (6) для кожного $x \in \mathbb{S}^1$ дифеоморфний до скінченновимірного супермноговиду $T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes \mathbb{R}^{0|1} \subset \mathbb{R}^{2N|(N+1)}$, заданого умовами (7), з парною суперсимплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2N|(N+1)})$* [17, 18] *у вигляді (10), відносно якої векторне поле d/dx є гамільтоновою динамічною системою з функцією Гамільтона $h^{(x)}: \mathbb{R}^{2N|(N+1)} \to \mathbb{R}$:*

$$h^{(x)} = \sum_{i=1}^{N}(\lambda_i f_i^2 + g_i^2) + \left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i f_i^2\right)^2 + 2\zeta\sum_{i=1}^{N}\lambda_i f_i\psi_i.$$

Скінченновимірне векторне поле d/dx, редуковане на $\breve{M}_N^{2|2} \simeq T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes \otimes \mathbb{R}^{0|1} \subset \mathbb{R}^{2N|(N+1)}$, можна розглядати як супераналог осциляторної динамічної системи типу Неймана [12].

Аналогічно можна встановити, що функції $h^{(t_j)} := \tilde{h}^{(t_j)}|_{\breve{M}_N^{2|2}} \in D(\breve{M}_N^{2|2})$, де $\tilde{h}^{(t_j)} \in \in D(\tilde{M}_N^{2|2})$, які задовольняють співвідношення

$$\left\langle \Big(\frac{du}{dt_j}, \frac{dv}{dt_j}, \frac{d\xi}{dt_j}, \frac{d\zeta}{dt_j}, \frac{dY_i}{dt_j}\Big)^\tau,\ \mathrm{grad}_l\, \tilde{\mathcal{L}}_N[u,v,\xi,\zeta,Y_i] \right\rangle = -\frac{d\tilde{h}^{(t_j)}}{dx}$$

для будь-яких $(u, v, \xi, \zeta, Y_i)^\tau \in \tilde{M}_N^{2|2}$, є гамільтоніанами векторних полів d/dt_j на $\breve{M}_N^{2|2}$ для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$.

Для доведення інтегровності гамільтонових векторних полів d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на $\breve{M}_N^{2|2}$ для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ використаємо запропонований Ю. Мозером [7] підхід, який дозволяє отримати для них еквівалентне матричне зображення, залежне від спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема 2. *Гамільтонові векторні поля d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на скінченновимірному симплектичному супермноговиді $\breve{M}_N^{2|2} \simeq T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes \mathbb{R}^{0|1} \subset \mathbb{R}^{2N|(N+1)}$ мають матричне зображення Лакса*

$$\frac{dS_N}{dx} = [A_N, S_N], \quad \frac{dS_N}{dt_j} = [B_{j,N}, S_N], \tag{11}$$

де $A_N := A_N(Y_i; \lambda) = A[u, v, \xi, \zeta; \lambda]|_{\breve{M}_N^{2|2}}$, $B_{j,N} := B_{j,N}(Y_i; \lambda) = B_j[u, v, \xi, \zeta; \lambda]|_{\breve{M}_N^{2|2}}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — проекції відповідних суперматриць на супермноговид $\breve{M}_N^{2|2}$, а суперматриця $S_N :=$ $:= S_N(Y_i; \lambda)$ має вигляд

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \begin{pmatrix} -f_i g_i & f_i^2 & f_i \psi_i \\ -g_i^2 & f_i g_i & g_i \psi_i \\ -g_i \psi_i & f_i \psi_i & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\zeta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доведення. Матричне зображення Лакса для векторного поля d/dx на $\breve{M}_N^{2|2}$ знайдемо на основі властивості градієнта суперсліду $\Delta(x; \lambda) := \operatorname{str} S$ для суперматриці монодромії [19]

$$S := S(x; \lambda) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & -S_{11} & -S_{23} \\ S_{23} & S_{13} & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

періодичної спектральної задачі (4) породжувати за допомогою рекурентних співвідношень

$$\breve{\theta}\varphi_n = \breve{\eta}\varphi_{n+1}, \quad \varphi_n = \operatorname{grad}_l \breve{\gamma}_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\breve{\theta}$, $\breve{\eta}$ — суперімплектичні оператори (2), градієнти законів збереження $\breve{\gamma}_n \in D(\breve{M}^{2|2})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, та рівності для градієнтів власних значень $\lambda_i \in D(\breve{M}^{2|2})$, $i = \overline{1, N}$,

$$\breve{\theta} \operatorname{grad}_l \lambda_i = \lambda_i \breve{\eta} \operatorname{grad}_l \lambda_i.$$

Оскільки градієнт функціонала $\Delta(x; \lambda)$ можна виразити через елементи суперматриці монодромії S :

$$\varphi(x; \lambda) = (S_{12}, \lambda S_{12}, -2S_{13}, -2\lambda S_{13})^\tau,$$

де $\varphi(x;\lambda) = \mathrm{grad}_l\, \Delta(x;\lambda) \simeq \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \varphi_n \lambda^{-n}$ при $|\lambda| \to \infty$, то безпосередньо отримуємо вигляд елементів S_{12} та S_{13} на супермноговиді $\breve{M}_N^{2|2}$. Інші елементи суперматриці S знаходимо з рівняння Новікова – Марченка [2, 10]:

$$\frac{dS}{dx} = [A, S]. \tag{13}$$

Редукована на супермноговид $\breve{M}_N^{2|2}$ суперматриця монодромії S задає відображення Ю. Мозера $S \mapsto S_N := S|_{\breve{M}_N^{2|2}}$ [7], а рівняння Новікова – Марченка (13) із суперматрицею S_N — зображення Лакса для векторного поля d/dx на $\breve{M}_N^{2|2} \simeq T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes \mathbb{R}^{0|1}$.

Відповідні зображення Лакса (11) для векторних полів d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на $\breve{M}_N^{2|2}$ виникають з умов сумісності диференціальних рівнянь (4) і (5) на $\breve{M}^{2|2} \supset \breve{M}_N^{2|2}$.

Теорему доведено.

Наслідком з теореми 2 є інваріантність функціонала

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{str}\, S_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\breve{\sigma}_i}{\lambda - \lambda_i} + 1$$

відносно векторних полів d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на $\breve{M}_N^{2|2}$, коефіцієнти $\breve{\sigma}_i \in D(\breve{M}_N^{2|2})$ розкладу якого у вигляді

$$\breve{\sigma}_i = \sum_{k=1, k\neq i}^{N} \frac{(f_i g_k - g_i f_k + \psi_i \psi_k)^2}{\lambda_i - \lambda_k} + \lambda_i\, f_i^2 - f_i^2 \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f_k^2 \right)^2 + 2\zeta\, f_i \psi_i, \quad i = \overline{1, N},$$

утворюють множину N лінійно незалежних законів збереження таких полів. Функціонали $\breve{\sigma}_i$ перебувають в інволюції відносно дужки Пуассона на просторі гладких функцій $D(\mathbb{R}^{2N|(N+1)})$:

$$\{F, G\}_{\omega^{(2)}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial f_i} \frac{\partial G}{\partial g_i} - \frac{\partial F}{\partial g_i} \frac{\partial G}{\partial f_i} + \frac{\partial_r F}{\partial \psi_i} \frac{\partial_l G}{\partial \psi_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial_r F}{\partial \zeta} \frac{\partial_l G}{\partial \zeta},$$

де F, $G \in D(\mathbb{R}^{2N|(N+1)})$, $\partial_l/\partial\beta$ та $\partial_r/\partial\beta$ — оператори лівої і правої похідних відповідно за антикомутативною змінною β, породженої парною суперсимплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2N|(N+1)})$, і забезпечують інтегровність за Ліувіллем векторних полів d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на базовому многовиді $\breve{M}_N^2$ симплектичного супермноговиду $\breve{M}_N^{2|2}$, який можна вкласти у простір $\mathbb{R}^{2N}$, а згідно із дослідженнями В. Н. Шандера [20], і на $\breve{M}_N^{2|2}$. Таким чином, має місце така теорема.

Теорема 3. *Суперконформна ієрархія Бенні – Каупа (1) допускає інваріантну редукцію на скінченновимірний симплектичний супермноговид $\breve{M}_N^{2|2} \simeq T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes$ $\otimes\, \mathbb{R}^{0|1} \subset \mathbb{R}^{2N|(N+1)}$ (6), на якому векторні поля d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, є гамільтоновими та інтегровними за Ліувіллем. Співвідношення (8) описують усі періодичні розв'язки ієрархії на $\breve{M}_N^{2|2}$.*

3. Скінченновимірна редукція типу Баргмана суперконформної ієрархії Каупа – Броера. Суперконформну ієрархію Каупа – Броера утворюють узгоджено бігамільтонові нелінійні динамічні системи на періодичному функціональному супермноговиді $\check{M}^{2|2} \subset \subset C^{\infty}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2|2})$:

$$\left(\frac{dv}{dt_j}, \frac{du}{dt_j}, \frac{d\zeta}{dt_j}, \frac{d\xi}{dt_j}\right)^{\tau} = -\check{\eta}\, \nabla_l\, \check{\gamma}_{j+1}[v, u, \zeta, \xi] =$$

$$= -\check{\vartheta}\, \nabla_l\, \check{\gamma}_j[v, u, \zeta, \xi], \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

де $\nabla_l : \check{M}^{2|2} \to T^*(\check{M}^{2|2})$ — оператор лівого градієнта на супермноговиді $\check{M}^{2|2}$, суперімплектичні оператори $\check{\eta}, \check{\vartheta} : T^*(\check{M}^{2|2}) \to T(\check{M}^{2|2})$ набирають вигляду

$$\check{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial & 0 & 0 \\ -\partial & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\check{\vartheta} = \begin{pmatrix} -(v\partial + \partial v) & -u\partial + 2\partial^2 & -(\zeta\partial + \frac{1}{2}\,\partial\zeta) & \frac{1}{2}\,\partial\xi - \xi\partial \\ -\partial u - 2\partial^2 & -2\partial & -\frac{1}{2}\partial\xi & 0 \\ -\left(\partial\zeta + \frac{1}{2}\,\zeta\partial\right) & -\frac{1}{2}\,\xi\partial & \frac{1}{2}\,v & \frac{1}{2}\,(u - 4\partial) \\ \frac{1}{2}\,\xi\partial - \partial\xi & 0 & \frac{1}{2}(u + 4\partial) & 2 \end{pmatrix},$$

а відповідна послідовність гамільтоніанів запишеться так:

$$\check{\gamma}_0 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} u\, dx, \quad \check{\gamma}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v\, dx, \quad \check{\gamma}_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (uv + \xi_x\zeta - \xi\zeta_x)\; dx,$$

$$\check{\gamma}_3 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(u^2 v + u_x v - u v_x + v^2 - v\xi\xi_x + \frac{7}{3}\, u\xi_x\zeta -$$

$$-\frac{5}{3}\, u\xi\zeta_x - \frac{2}{3}\, u_x\xi\zeta + 4\xi_{xx}\zeta + 4\xi\zeta_{xx} - 4\zeta\zeta_x\Big)\; dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

При $j = 2$ співвідношення (14) задає супераналог нелінійної динамічної системи Каупа – Броера:

$$\frac{dv}{dt_2} = -v_{xx} + (uv)_x + \frac{3}{2}\,\xi_{xx}\zeta + \xi_x\zeta_x - \frac{1}{2}\,\xi\zeta_{xx},$$

$$\frac{du}{dt_2} = u_{xx} + uu_x + v_x - \frac{1}{2}\,\xi\xi_{xx},$$

$$\frac{d\zeta}{dt_2} = -2\zeta_{xx} + u\zeta_x + \frac{3}{4}\,u_x\zeta + \frac{1}{4}\,v_x\xi + \frac{1}{2}\,v\xi_x,$$

$$\frac{d\xi}{dt_2} = 2\xi_{xx} + u\xi_x + \frac{1}{4}\,u_x\xi + 2\zeta_x.$$

Кожне рівняння суперконформної ієрархії Каупа – Броера (14) можна подати як умову сумісності двох лінійних матричних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dY}{dx} = AY, \tag{15}$$

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(u-\lambda) & 1 & \frac{1}{4}\,\xi \\ -\frac{1}{4}\,v + \frac{1}{8}\,\xi\zeta & \frac{1}{4}(u-\lambda) & \frac{1}{4}\,\zeta \\ -\frac{1}{4}\,\zeta & \frac{1}{4}\,\xi & 0 \end{pmatrix},$$

де $(v,u,\zeta,\xi)^\tau \in \check{M}^{2|2}$, супервектор $Y := (f,g,\phi)^\tau \in L_\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{C}^{2|1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, та

$$\frac{dY}{dt_j} = \left(\lambda^{j+1}S\right)_+ := B_jY, \tag{16}$$

де $j \in \mathbb{Z}_+$, $S := S(x;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} S_j\lambda^{-j}$ — асимптотичний розклад суперматриці монодромії рівняння (15),

$$S_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а нижній індекс $+$ позначає поліноміальну частину відповідного виразу.

Розвинемо метод редукування на нелокальні скінченновимірні інваріантні підпростори суперконформної ієрархії (14), що дозволить звести пошук її частинних розв'язків до інтегрування в квадратурах, наприклад, осциляторної динамічної системи типу Баргмана. Покажемо, що така скінченновимірна динамічна система виникає в результаті редукування векторного поля d/dx на інваріантний підпростір $\check{M}_N^{2|2} \subset \check{M}^{2|2}$ суперконформної ієрархії Каупа – Броера (14):

$$\check{M}_N^{2|2} := \left\{(v,u,\zeta,\xi)^\tau \in \check{M}^{2|2} :\ \mathrm{grad}_l\,\mathcal{L}_N[v,u,\zeta,\xi] = 0\right\}, \tag{17}$$

де функціонал Лагранжа $\mathcal{L}_N$ має вигляд

$$\mathcal{L}_N = \check{\gamma}_2 + \sum_{i=1}^{N} c_i \lambda_i,$$

а власні значення $\lambda_i \in D(\check{M}^{2|2})$, $i = \overline{1,N}$, періодичної спектральної задачі (15) є гладкими за Фреше функціоналами на супермноговиді $\check{M}^{2|2}$. Будемо вважати λ_i, $i = \overline{1,N}$, дійсними з відповідними власними вектор-функціями $Y_i := (f_i, g_i, \phi_i)^\tau \in W$, $\pi(f_i) = \pi(g_i) = 0$, $\pi(\phi_i) = 1$. Слід зауважити, що у цьому випадку будь-яка вектор-функція $\overline{Y}_i := (g_i, -f_i, \phi_i)^\tau \in W$ є власною для спряженої до (15) спектральної задачі і відповідає власному значенню $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Дослідимо диференціально-геометричну структуру підпростору $\check{M}_N^{2|2} \subset \check{M}^{2|2}$.

Щоб описати підпростір (17) явно, обчислимо ліві градієнти $\operatorname{grad}_l \lambda_i \in T^*(\check{M}^{2|2})$ власних значень $\lambda_i \in D(\check{M}^{2|2})$, $i = \overline{1,N}$, за допомогою спектральної задачі (15). Ці величини виражаються через відповідні власні вектор-функції $Y_i \in W$, $i = \overline{1,N}$, таким чином:

$$\operatorname{grad}_l \lambda_i = \left(-\frac{1}{2} f_i^2, f_i g_i, f_i\phi_i - \frac{1}{4}\xi f_i^2, -g_i\phi_i + \frac{1}{4}\zeta f_i^2\right)^\tau / \mu_i,$$

де $\mu_i = \int_0^{2\pi} f_i g_i \, dx \in D(\check{M}^{2|2} \times W^N)$, $i = \overline{1,N}$, — нормуючі множники, які є інваріантами векторних полів (15), (16). У випадку $\mu_i = c_i$, $i = \overline{1,N}$, умова (17) набирає вигляду обмежень типу Баргмана:

$$u = \sum_{i=1}^{N} f_i^2, \quad v = -2\sum_{i=1}^{N} f_i g_i, \quad \zeta_x = \sum_{j=1}^{N} g_i\phi_i - \frac{1}{4}\zeta \sum_{i=1}^{N} f_i^2,$$
$$\xi_x = -\sum_{j=1}^{N} f_i\phi_i + \frac{1}{4}\xi \sum_{i=1}^{N} f_i^2. \tag{18}$$

Отже, розв'язки суперконформної ієрархії Каупа – Броера (14) на підпросторі (17) виражаються через компоненти власних вектор-функцій $Y_i \in W$, $i = \overline{1,N}$, та функції $\zeta, \xi \in C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^{0|1})$, що можна використати для введення координат на підпросторі $\check{M}_N^{2|2} \subset \check{M}^{2|2}$.

На фазовому просторі $\tilde{M}^{2|2} := \check{M}^{2|2} \times W^{2N}$ ієрархії спарених динамічних систем (14), (16) з параметром $\lambda = \lambda_i$, $i = \overline{1,N}$, розглянемо функціонал Лагранжа $\tilde{\mathcal{L}}_N = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathcal{L}}_N[v, u, \zeta, \zeta, Y_i] dx$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_N = \check{\gamma}_2 + \sum_{j=1}^{N} \lambda_i' + \sum_{i=1}^{N} s_i \mu_i,$$

$$\lambda_i' := \int_0^{2\pi} \left(2(f_{i,x}g_i - f_i g_{i,x}) + u f_i g_i - 2g_i^2 + \left(\frac{1}{4}\,\xi\zeta - \frac{1}{2}\,v \right) f_i^2 + \right.$$

$$\left. + (\zeta f_i - \xi g_i)\phi_i - 2\phi_i\phi_{i,x} \right) dx,$$

де $s_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,N}$, — деякі константи. Умова

$$\mathrm{grad}_l\, \tilde{\mathcal{L}}_N[v,u,\zeta,\xi,Y_i] = 0$$

задає інваріантний підпростір $\tilde{M}_N^{2|2} \subset \tilde{M}^{2|2}$ цієї ієрархії. На $\tilde{M}_N^{2|2}$ існує точна парна 2-форма $\omega^{(2)} = d\alpha^{(1)}$, де 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(\bar{M}^{2|2})$ задовольняє диференціальне співвідношення

$$d\tilde{\mathcal{L}}_N[v,u,\zeta,\xi,Y_i] = <(dv,du,d\zeta,d\xi,dY_i)^\tau,\ \mathrm{grad}_l\, \tilde{\mathcal{L}}_N[v,u,\zeta,\xi,Y_i]> + \frac{d\alpha^{(1)}}{dx} \tag{19}$$

для будь-яких $(v,u,\zeta,\xi,Y_i)^\tau \in \bar{M}_N^{2|2}$. Тут символом $<,>$ позначено звичайний скалярний добуток в $\mathbb{R}^{(2N+2)|(N+2)}$. Із співвідношення (19) отримуємо 2-форму $\omega^{(2)}$ у вигляді

$$\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{N} (4dg_i \wedge df_i + 2d\phi_i \wedge d\phi_i) + d\xi \wedge d\zeta, \tag{20}$$

яка є виродженою на $\bar{M}_N^{2|2} \subset \bar{M}^{2|2}$. Оскільки підпростір $\check{M}_N^{2|2}$ можна вкласти у $\bar{M}_N^{2|2}$ згідно з формулою (18), то парна 2-форма $\omega^{(2)}$ задає на $\check{M}_N^{2|2}$ невироджену суперсимплектичну структуру. Існування цієї структури на $\check{M}_N^{2|2}$ доводить дифеоморфність підпростору $\check{M}_N^{2|2} \subset \check{M}^{2|2}$ та скінченновимірного суперпростору $\mathbb{R}^{2N|(N+2)}$ з суперсимплектичною структурою (20).

Для функції $\bar{h}^{(x)} \in D(\bar{M}_N^{2|2})$, знайденої за формулою

$$\left\langle \left(\frac{dv}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{d\zeta}{dx}, \frac{d\xi}{dx}, \frac{dY_i}{dx} \right)^\tau,\ \mathrm{grad}_l\, \tilde{\mathcal{L}}_N[v,u,\zeta,\xi,Y_i] \right\rangle = -\frac{d\bar{h}^{(x)}}{dx},$$

на підпросторі $\bar{M}_N^{2|2} \subset \bar{M}^{2|2}$ має місце рівність

$$i_{d/dx}\omega^{(2)} = -d\tilde{h}^{(x)},$$

де i_d/dx — внутрішнє диференціювання за векторним полем $d/dx : \bar{M}_N^{2|2} \to T(\bar{M}_N^{2|2})$ в алгебрі Грассмана диференціальних форм на $\mathbb{R}^{(2N+2)|(N+2)}$. Оскільки ця рівність зберігається на підпросторі $\check{M}_N^{2|2} \subset \bar{M}_N^{2|2}$, то при $s_i = -\lambda_i$, $i = \overline{1,N}$, функція $h^{(x)} := \bar{h}^{(x)}|_{\check{M}_N^{2|2}} \in D(\check{M}_N^{2|2})$ є гамільтоніаном векторного поля d/dx на $\check{M}_N^{2|2}$.

Таким чином, має місце така теорема.

Теорема 4. *Функціональний підпростір $\check{M}_N^{2|2} \subset \check{M}^{2|2}$ (17) для кожного $x \in \mathbb{S}^1$ дифеоморфний до скінченновимірного суперпростору $\mathbb{R}^{2N|(N+2)}$ з парною суперсимплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2N|(N+2)})$ [17, 18] у вигляді (20), відносно якої векторне поле d/dx є гамільтоновою динамічною системою з функцією Гамільтона $h^{(x)} : \mathbb{R}^{2N|(N+2)} \to \mathbb{R}$:*

$$h^{(x)} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i g_i + 2\sum_{i=1}^{N} g_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} f_i g_i + \frac{1}{4}\xi\zeta\right)\sum_{k=1}^{N} f_k^2 + \xi\sum_{i=1}^{N} g_i\phi_i - \zeta\sum_{i=1}^{N} f_i\phi_i.$$

Скінченновимірне векторне поле d/dx, редуковане на $\check{M}_N^{2|2} \simeq \mathbb{R}^{2N|(N+2)}$, можна розглядати як супераналог осциляторної динамічної системи типу Баргмана [14].

Функції $h^{(t_j)} := \bar{h}^{(t_j)}|_{\check{M}_N^{2|2}} \in D(\check{M}_N^{2|2})$, де $\bar{h}^{(t_j)} \in D(\bar{M}_N^{2|2})$, які задовольняють співвідношення

$$\left\langle \left(\frac{dv}{dt_j}, \frac{du}{dt_j}, \frac{d\zeta}{dt_j}, \frac{d\xi}{dt_j}, \frac{dY_i}{dt_j}\right)^{\tau}, \operatorname{grad}_l \tilde{\mathcal{L}}_N[v,u,\zeta,\xi,Y_i] \right\rangle = -\frac{d\bar{h}^{(t_j)}}{dx}$$

для будь-яких $(v,u,\zeta,\xi,Y_i)^\tau \in \tilde{M}_N^{2|2}$, є гамільтоніанами векторних полів d/dt_j на $\check{M}_N^{2|2}$ для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 5. *Гамільтонові векторні поля d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на скінченновимірному симплектичному супермноговиді $\check{M}_N^{2|2} \simeq \mathbb{R}^{2N|(N+2)}$ мають матричне зображення Лакса*

$$\frac{dS_N}{dx} = [A_N, S_N], \quad \frac{dS_N}{dt} = [B_{j,N}, S_N], \tag{21}$$

де $A_N := A_N(Y_i;\lambda) = A[v,u,\zeta,\xi;\lambda]|_{\check{M}_N^{2|2}}$, $B_{j,N} := B_{j,N}(Y_i;\lambda) = B_j[v,u,\zeta,\xi;\lambda]|_{\check{M}_N^{2|2}}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — проекції відповідних суперматриць на супермноговид $\check{M}_N^{2|2}$, а суперматриця $S_N := S_N(Y_i;\lambda)$ має вигляд

$$S_N = 2\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}\begin{pmatrix} -f_i g_i & f_i^2 & f_i\phi_i \\ -g_i^2 & f_i g_i & g_i\phi_i \\ -g_i\phi_i & f_i\phi_i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & \xi \\ 2\sum\limits_{i=1}^{N} f_i g_i & 0 & \zeta \\ -\zeta & \xi & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\zeta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доведення. Оскільки градієнт функціонала $\Delta(x;\lambda) := \operatorname{str} S$ можна виразити через елементи суперматриці монодромії S у вигляді (12):

$$\varphi(x;\lambda) = \left(-\frac{1}{4}S_{12}, -\frac{1}{2}S_{11}, \frac{1}{2}S_{13} - \frac{1}{8}\xi S_{12}, \frac{1}{2}S_{23} + \frac{1}{8}\zeta S_{12}\right)^{\tau},$$

де $\varphi(x;\lambda) = \operatorname{grad}_l \Delta(x;\lambda) \simeq \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \varphi_n \lambda^{-n}$ при $|\lambda| \to \infty$, то безпосередньо отримуємо вигляд елементів S_{12}, S_{11}, S_{13} та S_{23} на супермноговиді $\check{M}_N^{2|2}$. Інші елементи суперматриці S знаходимо з рівняння Новікова – Марченка (13) для векторного поля d/dx.

Редукована на супермноговид $\check{M}_N^{2|2}$ суперматриця монодромії S задає відображення Ю. Мозера $S \mapsto S_N := S|_{\check{M}_N^{2|2}}$ [7], а рівняння Новікова – Марченка (13) із суперматрицею S_N — зображення Лакса для векторного поля d/dx на $\check{M}_N^{2|2} \simeq \mathbb{R}^{2N|(N+2)}$.

Відповідні зображення Лакса (21) для векторних полів d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на $\check{M}_N^{2|2}$ виникають з умов сумісності диференціальних рівнянь (15) і (16) на $\check{M}^{2|2} \supset \check{M}_N^{2|2}$.

Теорему доведено.

Наслідком з теореми 5 є інваріантність функціонала

$$-\frac{1}{4}\operatorname{str} S_N^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\check{\sigma}_i}{\lambda-\lambda_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N f_i g_i$$

відносно векторних полів d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на $\check{M}_N^{2|2}$, коефіцієнти $\check{\sigma}_i \in D(\check{M}_N^{2|2})$ розкладу якого у вигляді

$$\check{\sigma}_i = \sum_{k=1,k\neq i}^N \frac{(f_i g_k - g_i f_k + \phi_i\phi_k)^2}{\lambda_i-\lambda_k} - \frac{1}{2}\lambda_i f_i g_i - g_i^2 + \frac{1}{2} f_i^2 \left(\sum_{k=1}^N f_k g_k\right)^2 - \\ - \frac{1}{2}\xi g_i \phi_i + \frac{1}{2}\zeta f_i \phi_i, \quad i = \overline{1,N},$$

утворюють множину N лінійно незалежних законів збереження таких полів. Функціонали $\check{\sigma}_i$ перебувають в інволюції відносно дужки Пуассона на просторі гладких функцій $D(\mathbb{R}^{2N|(N+2)})$:

$$\{F,G\}_{\omega^{(2)}} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial f_i}\frac{\partial G}{\partial g_i} - \frac{\partial F}{\partial g_i}\frac{\partial G}{\partial f_i} + \frac{\partial_r F}{\partial \phi_i}\frac{\partial_l G}{\partial \phi_i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial_r F}{\partial \xi}\frac{\partial_l G}{\partial \zeta} + \frac{\partial_r F}{\partial \zeta}\frac{\partial_l G}{\partial \xi}\right),$$

де $F, G \in D(\mathbb{R}^{2N|(N+2)})$, породженої парною суперсимплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2N|(N+2)})$, і забезпечують інтегровність за Ліувіллем векторних полів d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, на дійсному базовому многовиді $\check{M}_N^2 \simeq \mathbb{R}^{2N}$ симплектичного супермноговиду $\check{M}_N^{2|2}$, а отже, і на $\check{M}_N^{2|2}$.

Теорема 6. *Суперконформна ієрархія Каупа – Броера (14) допускає інваріантну редукцію на скінченновимірний симплектичний супермноговид $\check{M}_N^{2|2} \simeq \mathbb{R}^{2N|(N+2)}$ (17), на якому векторні поля d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, є гамільтоновими та інтегровними за Ліувіллем. Співвідношення формули (18) описують усі періодичні розв'язки ієрархії на $\check{M}_N^{2|2}$.*

4. Висновки. У статті розвинено метод редукування на нелокальні скінченновимірні інваріантні підпростори типу Неймана та Баргмана для узгоджено бігамільтонових суперконформних ієрархій Бенні – Каупа і Каупа – Броера відповідно, який дозволяє звести процедуру знаходження їхніх частинних розв'язків до інтегрування в квадратурах нелінійних динамічних систем на скінченновимірних супермноговидах. Показано, що ці підпростори є ізоморфними до скінченновимірних супермноговидів з точною парною суперсимплектичною структурою, а редуковані на них векторні поля d/dx та d/dt_j, $j \in \mathbf{Z}_+$, — гамільтоновими та інтегровними за Лаксом – Ліувіллем супераналогами деяких осциляторних динамічних систем.

Метод редукування на нелокальні скінченновимірні інваріантні підпростори можна використати для дослідження достатньо широкого класу узгоджено бігамільтонових ієрархій динамічних систем, заданих на періодичних функціональних супермноговидах. У зв'язку з цим виникає необхідність розвинути для інтегровних за Ліувіллем динамічних систем на скінченновимірних супермноговидах метод інтегрування в квадратурах скінченновимірних динамічних систем за допомогою канонічних перетворень Гамільтона – Якобі, запропонований у монографії [21].

Автор вдячна А. К. Прикарпатському за обговорення результатів, викладених у статті.

1. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.* О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач // Функцион. анализ и его прил. — 1976. — **10**, № 1. — С. 9 – 13.

2. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский А. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова. — М.: Наука, 1980. — 319 с.

3. *Lax P. D.* Periodic solutions of the Korteweg – de Vries equation // Communs Pure and Appl. Math. — 1975. — **28**, № 2. — P. 85 – 96.

4. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н.(мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Под ред. О. С. Парасюка. — Киев: Наук. думка, 1987. — 296 с.

5. *Prykarpatsky A., Mykytiuk I.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. —Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. — 554 p.

6. *Prykarpatsky A., Blackmore D., Strampp W., Sydorenko Yu., Samuliak R.* Some remarks on Lagrangian and Hamiltonian formalism, related to infinite-dimensional dynamical systems with symmetries // Condensed Matt. Phys. — 1995. — № 6. — P. 79 – 104.

7. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемости гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. — 1981. — **36**, № 5. — P. 109 – 151.

8. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. — М.: Наука, 1990. — 240 с.

9. *Лезнов А. Н., Савельев М. В.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1985. — 280 с.

10. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1977. — 332 с.

11. *Blaszak M.* Bi-Hamiltonian formulation for the KdV hierarchy with sources // J. Math. Phys. — 1995. — **36**, № 9. — P. 4826 – 4831.

12. *Prykarpatsky A., Hentosh O., Kopych M., Samuliak R.* Neumann – Bogoliubov – Rosochatius oscillatory dynamical systems and their integrability via dual moment maps. I // J. Nonlinear. Math. Phys. — 1995. — **2**, № 2. — P. 98 – 113.

13. *Prykarpatsky A. K., Hentosh O. E., Blackmore D. L.* The finite-dimensional Moser type reductions of modified Boussinesq and super-Korteweg – de Vries Hamiltonian systems via the gradient-holonomic algorithm and the dual moment maps. I // Ibid. — 1997. — **4**, № 3 – 4. — P. 455 – 469.

14. *Прикарпатський Я. А., Притула М. М., Гентош О. Є.* Скінченновимірні редукції узагальненої динамічної системи Бюргерса та їх інтегровність // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 1. — С. 95 – 102.

15. *Притула М., Воробйова О., Гентош О.* Гамільтонова інваріантна редукція інверсної динамічної системи Каупа – Броера // Вісн. Львів. ун-ту. Прикл. математика та інформатика. — 2000. — № 3. — С. 118 – 124.

16. *Гентош О. Є.* Гамільтонова редукція типу Неймана системи Деві – Стюартсона // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — **47**, № 2. — С. 100 – 107.

17. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру с антикоммутирующими переменными. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — 208 с.

18. *Shander V. N.* Analogues of the Frobenius and Darboux theorems for supermanifolds // Докл. Болгар. акад. наук. — 1983. — **36**, № 3. — С. 309 – 311.

19. *Филь Б. Н.* Суперобобщение вполне интегрируемых динамических систем. — Киев, 1989. — 19 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики).

20. *Шандер В. Н.* О полной интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений на супермногообразиях // Функцион. анализ и его прил. —1983. — **17**, № 1. — С. 89 – 90.

21. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 237 с.

Одержано 28.09.2005