УДК 517.9

ІНВАРІАНТНІ МНОЖИНИ РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ ТА ЇХ СТІЙКІСТЬ

А. М. Ткачук

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We find conditions for existence and stability of invariant sets, give a substantiation for the reduction principle for the system of difference equations, and study the behavior of the invariant set under small perturbations.

Для системи різницевих рівнянь встановлено умови існування та стійкості інваріантних множин, обгрунтовано принцип зведення. Досліджено поведінку інваріантної множини при малих збуреннях.

1. Постановка задачі. Розглядається система різницевих рівнянь вигляду

$$x_{n+1}^h = x_n^h + hX(x_n^h), \tag{1}$$

де $h > 0, n \in \mathbb{Z}^+, x_n^h = x^h(t_0 + nh), \quad x_0^h(t_0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n$, функція $X(x)$ визначена в деякій області D простору $\mathbb{R}^n$ та ліпшицева. Будемо вивчати інваріантні множини таких систем.

Означення 1. *Множину $M \subset D$ назвемо інваріантною множиною системи (1), якщо вона має властивість: розв'язок $x_n^h(x_0)$ системи (1), що починається в точці $x_0 \in M$, залишається на M для довільного $n \in \mathbb{Z}$. Якщо $n \in \mathbb{Z}^+$, то множину M будемо називати додатно інваріантною множиною системи (1).*

Інваріантні множини системи (1), а також питання, які пов'язані з їх стійкістю, можуть бути вивчені в термінах знакосталих функцій аналогічно тому, як це зроблено для систем диференціальних рівнянь [1].

Означення 2. *Компактну додатно інваріантну множину N системи (1) назвемо стійкою, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що якщо $\rho(x_0, N) < \delta$, то $\rho(x_n^h(x_0), N) < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}^+$. Якщо множина N стійка та задовольняє граничне співвідношення $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n^h(x_0), N) = 0$ для всіх x_0 із деякого δ_0-околу множини N, то назвемо її асимптотично стійкою.*

Нехай D_1 — обмежена область, що міститься в D з деяким своїм околом, $\overline{D}_1 = D_1 \cup \cup \partial D_1$.

Означення 3. *Функцію $V_h(x)$, визначену в $\overline{D}_1$, будемо називати знакосталою в D_1, якщо для всіх $x \in \overline{D_1}$ ненульові значення функції $V_h(x)$ мають один і той же знак. Знакосталу в D_1 функцію $V_h(x)$ назвемо знаковизначеною в D_1, якщо множина її нулів є непорожньою і компактною в D_1.*

2. Основні результати. ***1. Інваріантні множини, їх стійкість.*** Нехай $\triangle V_h(x) = V_h(x + +hX(x)) - V_h(x)$, а $V_\mu(h)$ — множина точок $\overline{D}_1$, для яких $0 < |V_h(x)| \le \mu$. Наведена нижче теорема дає умови існування та стійкості додатно інваріантної множини для системи (1).

Теорема 1. *Якщо $V_h(x)$ — знаковизначена в D_1 функція, для якої $\triangle V_h(x)$ — знакостала в D_1 множина $N_0(h)$:*

$$V_h(x) = 0, \qquad x \in D_1, \tag{2}$$

рівномірно відділена по h від межі області ∂D_1, тобто

$$\exists h_0 > 0 \quad \exists \gamma > 0 \quad \forall\, h \le h_0 : \quad \rho(N_0(h), \partial D_1) > \gamma, \tag{3}$$

то множина (2) є додатно інваріантною та стійкою, коли знаки $V_h(x)$ і $\triangle V_h(x)$ різні.

Доведення. Припустимо, що $V_h(x) \ge 0$, $\triangle V_h(x) \le 0$, $x \in \overline{D_1}$. Покажемо, що множина $N_0(h)$, яка складається з точок D_1, для яких $V_h(x) = 0$, є додатно інваріантною стійкою множиною системи (1).

Розглянемо розв'язок системи $x_n^h(x_0)$ (1), який починається при $n = 0$ в точці $x_0 \in N_0(h)$, і покажемо, що цей розв'язок належить множині нулів $N_0(h)$. Нехай $M = \max\limits_{x \in \overline{D_1}} \|X(x)\|$ і h виберемо таким чином, щоб $hM < \dfrac{\gamma}{4}$. Тоді

$$\rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) \le \left|x_1^h(x_0) - x_0\right| \le h\,\|X(x_0)\| < \frac{\gamma}{4}. \tag{4}$$

Звідси $x_1^h(x_0) \in D_1$, де $x_1^h(x_0)$ – розв'язок системи (1) при $n = 1$.

За умовою теореми $\triangle V_h(x_1^h(x_0)) = V_h(x_0 + hX(x_0)) - V_h(x_0) \le 0$, тому $V_h(x_1^h(x_0)) \le V_h(x_0) = 0$. Отже,

$$x_1^h(x_0) \in N_0(h). \tag{5}$$

З (4) та (5) отримуємо $\rho\left(x_2^h(x_0), N_0(h)\right) \le \rho\left(x_2^h(x_0), x_1^h(x_0)\right) + \rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) < \dfrac{\gamma}{4}$. Звідси $x_2^h(x_0) \in D_1$.

З умови теореми $V_h(x_2^h(x_0)) \le V_h(x_1(x_0)) \le V_h(x_0) = 0$, а тому $x_2^h(x_0) \in N_0(h)$.

Аналогічно одержуємо

$$\rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) < \frac{\gamma}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

$$x_n^h(x_0) \in D_1, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \text{та} \qquad x_n^h(x_0) \in N_0(h).$$

Отже, $N_0(h)$ — додатно інваріантна множина.

Доведемо стійкість $N_0(h)$ для кожного $h \le h_0$, тобто покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, h) > 0$ таке, що якщо $\rho\left(x_0, N_0(h)\right) < \delta$, то $\rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}^+$. Нехай $\varepsilon > 0$ — достатньо мале число таке, що $U_\varepsilon = U_\varepsilon(N_0(h)) \subset \overline{D}_1$ і $\varepsilon < \dfrac{\gamma}{2}$. Згідно з лемою [1, с. 60] за заданим ε можна вибрати $\mu = \mu(\varepsilon, h) > 0$ і $\delta = \delta(\varepsilon, h) > 0$ так, щоб виконувалися включення

$$U_\delta(N_0(h)) \subset V_\mu \subset U_\varepsilon(N_0(h)). \tag{6}$$

Розглянемо розв'язок $x_n^h(x_0)$ системи (1), що при $n = 0$ починається в точці $x_0 \in$ $\in U_\delta(N_0(h))$. Тоді з (4) при $n = 1$ отримаємо

$$\rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) \le \rho\left(x_1^h(x_0), x_0\right) + \rho\left(x_0, N_0(h)\right) < \frac{\gamma}{4} + \delta < \gamma,$$

звідки $x_1^h(x_0) \in D_1$. Із знакосталості $\triangle V_h(x)$ в D_1 маємо

$$V_h(x_1^h(x_0)) \le V_h(x_0) \le \mu. \tag{7}$$

Отже, $x_1^h(x_0) \in V_\mu$, а з (6) випливає

$$\rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon.$$

Аналогічно при $n = 2$ одержуємо

$$\rho\left(x_2^h(x_0), N_0(h)\right) \le \rho\left(x_2^h(x_0), x_1^h(x_0)\right) + \rho\left(x_1^h(x_0), N_0(h)\right) \le \frac{\gamma}{4} + \varepsilon < \gamma,$$

звідки $x_2^h(x_0) \in D_1$. З умови $\triangle V_h(x) \le 0$ випливає

$$V_h(x_2^h(x_0)) \le V_h(x_1^h(x_0)) \le V_h(x_0) \le \mu,$$

тому $x_2^h(x_0) \in V\mu$. З (6) маємо, що $\rho\left(x_2^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon$. Продовжуючи далі, отримуємо $\rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon$ для довільного $n \in \mathbb{Z}^+$.

Теорему доведено.

Наступна теорема гарантує асимптотичну стійкість додатно інваріантної множини.

Теорема 2. *Якщо функції $V_h(x)$ та $\triangle V_h(x)$ є знаковизначеними в D_1, множини їх нулів для кожного кроку $h > 0$ в D_1 збігаються та виконується умова (3), то додатно інваріантна множина (2) є асимптотично стійкою, коли знаки $V_h(x)$ і $\triangle V_h(x)$ різні.*

Доведення. Припустимо, що $V_h(x) \ge 0$, а $\triangle V_h(x) \le 0$ для $x \in D_1$. З теореми 1 випливає, що множина нулів $N_0(h)$ функції $V_h(x)$ в D_1 є додатно інваріантною стійкою множиною системи (1). Тому для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $\rho\left(x_0, N_0(h)\right) < \delta$ виконується нерівність $\rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}^+$ та довільного $h > 0$.

Тепер для асимптотичної стійкості достатньо показати виконання граничного співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n^h(x_0), N_0(h)\right) = 0 \tag{8}$$

для довільної точки $x_0 \in U_{\delta_0} = U_{\delta_0}(N_0(h))$, де δ_0 — достатньо мале додатне число.

Виберемо $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, щоб розв'язок системи (1) $x_n^h(x_0)$ з початковими даними x_0 такими, що $\rho\left(x_0, N_0(h)\right) < \delta$, належав D_1 при $n \ge 0$. Внаслідок стійкості множини $N_0(h)$ та вибору δ і ε це завжди можна зробити. Розглянемо траєкторію $x_n^h(x_0)$ системи (1) для $n \in \mathbb{Z}^+$, $h > 0$, $x_0 \in U_\delta$. Можливі два випадки. В першому $x_p^h(x_0) \in N_0(h)$ для деякого $p \in \mathbb{Z}^+$, тоді внаслідок додатної інваріантності множини $N_0(h)$ траєкторія $x_n^h(x_p^h(x_0))$ належить $N_0(h)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}^+$, тому співвідношення (8) виконано.

Розглянемо другий випадок, коли $x_n^h(x_0)\overline{\in}N_0(h)$ ні при одному $n \in \mathbb{Z}^+$. Тоді, оскільки

$$\triangle V_h(x_n^h(x_0)) = V_h(x_n^h(x_0) + hX(x_n^h(x_0))) - V_h(x_n^h(x_0)) =$$

$$= V_h(x_{n+1}^h(x_0)) - V_h(x_n^h(x_0)) \le 0, \qquad n \in \mathbb{Z}^+,$$

функція $V_h(x_n^h(x_0))$ монотонно спадає і, отже, прямує до деякої границі $\mu_0 \ge 0$ (внаслідок невід'ємності функції V_h). Покажемо, що $\mu_0 = 0$. Припустимо, що $\mu_0 > 0$. Тоді існує таке $\delta_0 = \delta_0(\mu_0) > 0$, що має місце включення $U_{\delta_0} \subset V_{\mu_0}$ і $x_n^h(x_0) \in U_\varepsilon \backslash U_{\delta_0}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Позначимо $\sup\limits_{x \in U_\varepsilon \backslash U_{\delta_0}} \triangle V_h(x) = -\alpha$, де $\alpha > 0$ (оскільки $\triangle V_h(x)$ набуває лише від'ємних значень). Тоді

$$\triangle V_h(x_n^h(x_0)) = V_h(x_n^h(x_0) + hX(x_n^h(x_0))) - V_h(x_n^h(x_0)) \le -\alpha,\ n \in \mathbb{Z}^+,\ h > 0.$$

Звідси

$$V_h(x_{n+1}^h(x_0)) = V_h(x_0) + [V_h(x_1^h(x_0)) - V_h(x_0)] + [V_h(x_2^h(x_0)) - V_h(x_1^h(x_0))] + \ldots$$

$$\ldots + [V_h(x_n^h(x_0)) - V_h(x_{n-1}^h(x_0))] + [V_h(x_{n+1}^h(x_0)) - V_h(x_n^h(x_0))] =$$

$$= V_h(x_0) + \sum_{k=0}^{n} [V_h(x_{k+1}^h(x_0)) - V_h(x_k^h(x_0))] \le V_h(x_0) - \alpha(n+1).$$

Дана нерівність при досить великих n приводить до суперечності з додатною визначеністю функції $V_h(x)$ в області D_1. Отже, $\mu_0 = 0$. Тому якщо $x_n^h(x_0)\overline{\in}N_0(h)$ при цілих невід'ємних n, то

$$\lim_{n\to\infty} V_h(x_n^h(x_0)) = 0 \qquad \forall h > 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{9}$$

Розглянемо Ω_{x_0} — ω-граничну множину точок траєкторії $x_n^h(x_0)$. З її означення маємо

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n^h(x_0), \Omega_{x_0}\right) = 0. \tag{10}$$

Із співвідношення (10) випливає, що для доведення (8) достатньо довести включення $\Omega_{x_0} \subset N_0(h)$ для кожного $x_0 \in U_\delta$. Доведення цього факту аналогічне [1, с. 64], що й доводить асимптотичну стійкість множини $N_0(h)$.

2. Принцип зведення для різницевих систем. Нехай $N(h)$ та $M(h)$ — додатно інваріантні множини системи (1) для кожного кроку h, причому такі, що $N \supset M$.

Означення 4. *Будемо говорити, що M стійка на N, якщо для довільного околу U_ε множини M існує такий її окіл U_δ, що якщо $x_0 \in U_\delta \cap N$, то $x_n^h(x_0) \subset (U_\varepsilon \cup M)$ при всіх $n \in \mathbb{Z}^+$. Будемо говорити, що M асимптотично стійка на N, якщо M стійка на N і знайдеться $\delta_0 > 0$ таке, що $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n^h(x_0), M) = 0$ для всіх $x_0 \in U_{\delta_0} \cap N$.*

Наступний результат вказує умови, при яких із стійкості множини M на інваріантній множині N випливає її стійкість. Позначимо через $V_{\delta,\mu}(h)$ множину точок $x \in D_1$, які належать δ-околу множини M і задовольняють нерівність $|V_h(x)| \leq \mu$, де $V_h(x)$ — деяка визначена в D_1 функція.

Теорема 3. *Нехай додатно інваріантна множина N системи (1) містить замкнену додатно інваріантну й асимптотично стійку на N множину M. Тоді якщо N є множиною (2) для деякої знакосталої в D_1 функції $V_h(x)$, для якої $\triangle V_h(x)$ є знакосталою в D_1 та має протилежний з V_h знак, то M — стійка множина системи (1).*

Доведення. Використовуючи лему 1 [1, с. 68] та асимптотичну стійкість M на N, виберемо додатні числа ε і $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, щоб виконувалися співвідношення

$$\rho\left(x_n^h(x_0), M\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (U_\varepsilon \cup M) \subset D_1, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad x_0 \in V_{\delta,0}, \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n^h(x_0), M\right) = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad x_0 \in V_{\delta,0}. \tag{12}$$

Нехай n_0 — додатне ціле число, що визначається із умови $\rho\left(x_{n_0}^h(x_0), M\right) < \dfrac{\delta}{2}$ для всіх $x_0 \in V_{\delta,0}$. Можливість вибору такого n_0 випливає із рівномірності граничного співвідношення (12). Виберемо тепер $\mu_0 = \mu_0(n_0, \varepsilon)$ так, щоб траєкторія $x_n^h(x_0)$ при $n \in [0, n_0]$ належала множині $U_\varepsilon \cup M$ для довільного $x_0 \in V_{\delta,\mu_0}$. Вибір такого μ_0 є можливим. Покажемо це.

Нехай μ_0 вказаним способом вибрати не можна. Тоді знайдуться збіжні послідовності n_m, y_m, μ_m такі, що $0 < n_m \leq n_0$, $\lim\limits_{m\to\infty} n_m = \tau$, $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = y_0$, $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_m = 0$ і $y_m \in$ $\in V_{\delta,\mu_m}$, $x_n^h(y_0) \subset (U_\varepsilon \cup M), n \in [0, n_m]$, $\rho\left(x_{n_m}^h(y_m), M\right) \geq \varepsilon$. З останнього співвідношення граничним переходом отримуємо

$$\rho\left(x_\tau^h(y_0), M\right) \geq \varepsilon. \tag{13}$$

Згідно з лемою 2 [1, с. 69] множина V_{δ,μ_m} стягується до $V_{\delta,0}$ при $\mu_m \to 0$. Тому $y_0 \in V_{\delta,0}$ і $\rho\left(x_\tau^h(y_0), M\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ми прийшли до суперечності з рівністю (13).

Із неперервної залежності розв'язків системи (1) від початкових даних отримаємо нерівність

$$\rho\left(x_n^h(x_0), x_n^h(\tilde{x}_0)\right) \leq \frac{\delta}{2}, \qquad n \in [0, n_0], \tag{14}$$

для довільних двох точок $x_0, \tilde{x}_0 \in (V_{\delta,\mu_0} \cup M)$ таких, що $\rho(x_0, \tilde{x}_0) \leq d$, де d — достатньо мале.

Даний факт і подальше доведення проводиться по схемі, аналогічній для диференціальних рівнянь [1]. З нерівності (14) матимемо $\rho\left(x_n^h(y), M\right) \leq \varepsilon, \quad n \in [0, n_0]$, де y — довільна точка множини $V_{\delta,\mu}$, а $\rho\left(x_{n_0}^h(y), M\right) < \delta$. Тоді для розв'язку, який починається в точці $y \in V_{\delta,\mu}$ в момент $n = n_0$, отримаємо, що $x_{n_0}^h(y) \in (V_{\delta,\mu} \cup M)$. Звідси буде випливати стійкість множини M.

3. Дослідження поведінки інваріантної множини при малих збуреннях системи. Нехай $M_0(h)$ — замкнена інваріантна множина системи (1). Наступний результат пояснює характер поведінки M_0 при малих збуреннях системи (1). Збурення будемо характеризувати малим додатним параметром μ. Збурену систему запишемо у вигляді

$$x_{n+1}^h = x_n^h + h\left[X(x_n^h) + \mu Y(x_n^h)\right], \tag{15}$$

де функції X та Y визначені і задовольняють умову Ліпшиця для всіх x з області D.

Означення 5. *Областю притягування $\Pi(M_0)$ множини M_0 назвемо всі точки $x_0 \in D$, для яких $\Omega_{x_0} \subset M_0$, де Ω_{x_0} — ω-гранична множина траєкторії $x_n^h(x_0)$.*

Теорема 4. *Якщо M_0 — замкнена компактна асимптотично стійка інваріантна (додатно) множина системи (1), то можна вказати такі $\delta > 0$ і $\mu_0 = \mu_0(\delta) > 0$, що для всіх $\mu < \mu_0$ система (15) також має замкнену інваріантну множину $M = M(\mu, h)$, для якої $\lim\limits_{\mu\to 0} \rho(M_0, M) = 0$ і $U_\delta(M_0) \subset \Pi(M)$.*

Для доведення теореми нам буде потрібна лема.

Лема. *Якщо розв'язки системи (1) при $\mu = 0$ $x_n^h(x_0, 0) = x_n^h(x_0)$ належать області D для $n \in [0, n_0]$ і $x_0 \in \mathbb{S} \subset D$ разом з деяким ε-околом, то при достатньо малих μ розв'язки $x_n^h(x_0, \mu)$ системи (15) належать при $n \in [0, n_0]$ області D разом із деяким околом і має місце граничне співвідношення*

$$\sup_{n\in[0,n_0];x_0\in\mathbb{S}} \left|x_n^h(x_0,\mu) - x_n^h(x_0)\right| \to 0, \qquad \mu \to 0. \tag{16}$$

Доведення леми. Позначимо через P компактну підмножину точок з D, що містить траєкторію $x_n^h(x_0)$ $(n \in [0, n_0])$ разом з ε-околом, а $A = \max\limits_{x\in D} |Y(x)|$. Для кожного $h > 0$ виберемо $\mu(h)$ так, щоб

$$h\mu(h)(1 + hL)^{n_0} n_0 \max_{x\in P} |Y(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Із сумарних зображень розв'язків систем (1) та (15) відповідно

$$x_n^h(x_0) = x_0 + h\sum_{p=0}^{n-1} X\left(x_p^h(x_0)\right),$$

$$x_n^h(x_0,\mu) = x_0 + h\left[\sum_{p=0}^{n-1}(X(x_p^h(x_0,\mu)) + \mu Y(x_p^h(x_0,\mu)))\right]$$

для їх різниці отримаємо оцінку

$$\left|x_n^h(x_0,\mu)-x_n^h(x_0)\right| \le h\sum_{p=0}^{n-1}\Big[|X(x_p^h(x_0,\mu))-X(x_p^h(x_0))|+\mu|Y(x_p^h(x_0,\mu))|\Big] \le$$

$$\le Lh\sum_{p=0}^{n-1}|x_p^h(x_0,\mu)-x_p^h(x_0)| + h\mu\sum_{p=0}^{n-1}|Y(x_p^h(x_0,\mu))|.$$

Звідси та з [2] маємо

$$\forall n\in\mathbb{Z}^+:\ \left|x_n^h(x_0,\mu)-x_n^h(x_0)\right| \le (1+Lh)^n h\mu\sum_{p=0}^{n-1}|Y(x_p^h(x_0,\mu))|. \tag{18}$$

Нерівність (18) виконується при довільному $n\in[0,n_0]$ такому, що $x_n^h(x_0,\mu)\in P$. Покажемо, що $x_n^h(x_0,\mu)\in P$ для кожного $n\in[0,n_0]$. Останнє доведемо за індукцією.

Справді, при $n=0$ твердження є вірним. Нехай при $n=k-1$ воно також є вірним. Доведемо його справедливість при $n=k$. З (18) випливає, внаслідок припущення індукції і (17), оцінка

$$\left|x_k^h(x_0,\mu)-x_k^h(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

І оскільки $x_k^h(x_0)$ за умовою належить D разом з ε-околом, то з огляду на будову множини P $x_k^h(x_0,\mu)\in P$. Отже, згідно з індукцією $x_n^h(x_0,\mu)\in P$ при $n\in[0,n_0]$.

Граничне співвідношення (16) випливає тепер із (17) та (18).

Лему доведено.

Продовжимо доведення теореми. Оскільки множина M_0 є асимптотично стійкою, то умови леми, очевидно, виконуються для всіх розв'язків незбуреної системи, що починаються в достатньо малому околі M_0.

Існування замкненої додатно інваріантної множини M для системи (15) та включення $U_\delta(M_0)\subset\Pi(M)$ випливають із аналогічних до [1, с. 75] міркувань для диференціальних рівнянь, де суттєво використовується рівномірна неперервність розв'язків за параметром. Справедливість цього факту для різницевих систем випливає з доведеної леми.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

2. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1972. — 246 с.

Одержано 30.05.2005