УДК 517 . 9

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ З МАЙЖЕ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ Й ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

В. А. Бородін, В. Гр. Самойленко

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6

We study asymptotic behavior, as t approaches infinity, of solutions of differential equations with almost constant coefficients and an impulsive effects that occur at fixed times. We find conditions on the moments of the impulsive effects so that there exist values of the effects such that the solution of the considered Cauchy problem with the initial conditions, which coincide with the initial conditions for a certain fixed solution to the considered equation without impulsive effects, would be bounded, unbounded, or approach infinity.

Досліджується асимптотична (при t, що прямує до нескінченності) поведінка розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами й імпульсною дією в фіксовані моменти часу. З'ясовано питання про те, при яких умовах щодо заданих моментів імпульсної дії існують такі значення імпульсної дії, що розв'язок розглядуваної задачі Коші, початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для деякого (довільного, але фіксованого) розв'язку вихідного рівняння (без імпульсної дії), є обмеженим, не є обмеженим чи прямує до нескінченності.

1. Вступ. У сучасній техніці, механіці та фізиці доволі часто зустрічаються системи, параметри яких у деякі моменти часу $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ внаслідок макровпливу середовища стрибкоподібно змінюються, при цьому розглядувана система може переходити в інший фазовий стан, який суттєво відрізняється від попереднього. Такі системи зустрічаються, наприклад, в електродинаміці при вивченні електричного контура з насиченням сердечника при змінному струмі та в інших галузях природознавства і техніки [1].

Для математичного опису згаданих систем у даний час широко використовується теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією [2]. Зауважимо, що наявність імпульсної дії може суттєво впливати на поведінку розглядуваної системи (навіть лінійної), і така система може виявляти властивості, притаманні лише сильно нелінійним системам. При цьому властивості систем з імпульсною дією можуть значно відрізнятися від аналогічних властивостей тієї самої системи, але без імпульсної дії [3, 4]. Тому вивчення систем з імпульсною дією є досить актуальною задачею.

Дану роботу присвячено дослідженню асимптотичних (при $t \to +\infty$) властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку з майже сталими коефіцієнтами й імпульсною дією у фіксовані моменти часу $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$.

2. Формулювання задачі та основні припущення. Будемо розглядати лінійне диференціальне рівняння n-го порядку вигляду

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x^{(1)} + a_n(t)x = f(t) \qquad (1)$$

з початковими умовами $x^{(i)}(t_0) = x_{i,0}$, $i = \overline{1,n}$, та умовами імпульсної дії в фіксовані моменти часу $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\Delta x^{(i)}|_{t=\tau_k} = x^{(i)}(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0) = I_{k,i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{2}$$

Стосовно величин $\{I_{k,i}\}$, $j = \overline{1,n}$, $k \in \mathbf{N}$, та $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ припускаємо:

1) послідовність $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ не містить підпослідовності, що є збіжною до деякого числа t_*, тобто існує таке δ, що для будь-якого натурального k виконується нерівність $\tau_{k+1} - -\tau_k > \delta > 0$;

2) величини $I_{k,i}$ є обмеженими за модулем для всіх $k \in \mathbf{N}$. $i = \overline{1,n}$, деяким числом $I > 0$.

Величини τ_k називаються моментами імпульсної дії, а $I_{k,i}$ — величинами імпульсної дії.

Розв'язком задачі (1), (2) є функція, що вважається неперервною для всіх $t \in \mathbf{R}$ та n разів неперервно диференційовною для $t \in \mathbf{R}\backslash\{\tau_k\}_{k\geq 1}$. При $t = \tau_k$, $k \in \mathbf{N}$, похідні $x^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, мають розриви першого роду та вважаються неперервними зліва.

Розглядається розв'язок $\Phi(t)$, $t \geq t_0$, задачі (1), (2), початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для деякого (даного, тобто фіксованого) розв'язку $x^*(t)$ рівняння (1), а саме $\Phi^{(i)}(t_0) = x^{*(i)}(t_0) = x^*_{i,0}$, де $i = \overline{0, n-1}$, $t_0 < \tau_k$, $k \in \mathbf{N}$. З'ясовується питання про те, при яких умовах щодо заданих моментів імпульсної дії існують такі значення імпульсної дії, що розв'язок $\Phi(t)$ при $t \to +\infty$ є обмеженим, не є обмеженим чи прямує до деякого числа або нескінченності.

Випадок $n = 2$ для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами розглянуто в [3, 4], а випадок довільного $n \in \mathbf{N}$ — у [5–7]. У даній статті розглядається випадок, коли рівняння (1) має асимптотично сталі коефіцієнти, тобто виконується умова

$$\lim_{t\to+\infty} a_i(t) = a_i \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Одночасно з диференціальним рівнянням (1) будемо розглядати диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами a_i, $i = \overline{1,n}$, вигляду

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t). \tag{4}$$

3. Асимптотична еквівалентність розв'язків. Для дослідження асимптотичних (при $t \to +\infty$) властивостей розв'язків диференціального рівняння (1) спочатку розглянемо питання про відповідність між розв'язками диференціальних рівнянь (1) та (4).

Лема 1. *Нехай послідовність диференціальних рівнянь*

$$x^{(n)} + p_{1,k}(t)x^{(n-1)} + p_{2,k}(t)x^{(n-2)} + \ldots + p_{n,k}(t)x = f(t), \quad k \in \mathbf{N}, \tag{5}$$

та диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 x^{(n-2)} + \ldots + p_n y = f(t) \tag{6}$$

задовольняють такі умови:

1^0) $f(t)$ є неперервною функцією;

2^0) коефіцієнти $p_{i,k}(t)$, $i = \overline{1,n}$, $k \in \mathbf{N}$, є неперервними і для будь-якого $t \in \mathbf{R}$ для них виконуються співвідношення $p_{i,k}(t) \to p_i$ при $k \to \infty$, де $p_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Тоді розв'язки $x_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$, і $y(t)$ диференціальних рівнянь відповідно (5) і (6), які задовольняють одні й ті самі початкові умови $x_k^{(i)}(t_0) = y^{(i)}(t_0) = x_{k,i,0}$, є асимптотично близькими (при $k \to +\infty$), тобто для будь-якого $t \in \mathbf{R}$ та кожного $i = \overline{0,n-1}$ виконується співвідношення $x_k^{(i)}(t) \to y^{(i)}(t)$ при $k \to +\infty$.

Доведення. Покажемо, що для будь-якого проміжку $[t_0, T]$ існує таке $C = C(T) > 0$, що для всіх $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{0,n-1}$, та всіх достатньо великих $k \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $|x_k^{(i)}(t)| < C$.

Рівняння (5) можна звести до системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з деякою матрицею $A_k(t)$, розв'язком якої є вектор вигляду $\vec{x}_k(t) = (x_k(t), x_k'(t), \ldots \ldots, x_k^{(n-1)}(t))$. Згідно з [8], для вектора $\vec{x}_k(t)$ виконується оцінка

$$\|\vec{x}_k(t)\| \leq \|\vec{x}_{k,0}\| e^{\int\limits_{t_0}^{t} \|A_k(\tau)\| d\tau},$$

де $\vec{x}_{k,0} = (x_{k,0,0}, x_{k,1,0}, \ldots, x_{k,n,0})$.

Позначимо $\beta_k = \max\limits_{t \in [t_0,T]} \beta_k(t)$, де $\beta_k(t) = \|A_k(t)\|$, $k \in \mathbf{N}$. Зауважимо, що $\beta_k(t)$ неперервно залежить від t для кожного $k \in \mathbf{N}$.

Оскільки для всіх достатньо великих $k \in \mathbf{N}$ величини $p_{i,k}(t)$, $i = \overline{1,n}$, $k \in \mathbf{N}$, обмежені знизу та зверху значеннями $p_i - 1$ та $p_i + 1$ відповідно, то для всіх достатньо великих $k \in \mathbf{N}$ будуть обмеженими і значення $\beta_k(t)$, а отже, існує таке число β, що $\beta_k \leq \beta$ для всіх достатньо великих $k \in \mathbf{N}$. Тоді $\|\vec{x}_k(t)\| \leq \|\vec{x}_{k,0}\| e^{\beta(T-t_0)} = C(T)$.

Отже, величини $\left|x_k^{(i)}(t)\right|$ є обмеженими деякою сталою $C(T)$ для кожного $i = \overline{0,n-1}$ та всіх достатньо великих $k \in \mathbf{N}$ за умови, що $t \in [t_0, T]$. Далі, не обмежуючи загальності, вважаємо, що нерівності $|x_k^{(i)}(t)| \leq C(T)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{0,n-1}$, виконуються для всіх $k \in \mathbf{N}$.

Функції $z_k(t) = x_k(t) - y(t)$, де $x_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$ і $y(t)$ — розв'язки диференціальних рівнянь відповідно (5) і (6), при кожному $k \in \mathbf{N}$ та всіх $t \geq t_0$ задовольняють диференціальне рівняння

$$z_k^{(n)} + p_1 z_k^{(n-1)} + \ldots + p_n z_k = g_k(t) \tag{7}$$

з нульовими початковими умовами при $t = t_0$, де функцію

$$g_k(t) = (p_1 - p_{1,k}(t)) x_k^{(n-1)}(t) + \ldots + (p_n - p_{n,k}(t)) x_k(t)$$

можна вважати відомою при умові, що $x_k(t)$, як розв'язок рівняння (5), є відомою функцією.

За методом Лагранжа розв'язок рівняння (7) з нульовими початковими умовами можна записати у вигляді

$$z_k(t) = c_{1,k}(t)\varphi_1(t) + \ldots + c_{n,k}(t)\varphi_n(t), \tag{8}$$

де функції $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного диференціального рівняння

$$\varphi^{(n)} + p_1\varphi^{(n-1)} + \ldots + p_n\varphi = 0,$$

що відповідає рівнянню (7), а функції $c_{i,k}(t)$, $i = \overline{1,n}$, $k \in \mathbf{N}$, визначаються згідно з формулами

$$c_{i,k}(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{((p_{1,k}(\tau) - p_1))\, x_k^{(n-1)}(\tau) + \ldots + (p_{n,k}(\tau) - p_n))x_k(\tau))W_{n,i}(\tau)}{W(\tau)}\, d\tau.$$

Тут

$$W(t) = \begin{Vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{Vmatrix}$$

— визначник Вронського системи фундаментальних розв'язків $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, а $W_{n,i}(t)$ — визначник вигляду

$$W_{n,i}(t) = \begin{Vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_{i-1}(t) & \varphi_{i+1}(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_{i-1}'(t) & \varphi_{i+1}'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \ldots & \varphi_{i-1}^{(n-2)}(t) & \varphi_{i+1}^{(n-2)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \end{Vmatrix}.$$

Зауважимо, що за доведеним вище функції $x_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{0, n-1}$, $k \in \mathbf{N}$, при $t \in [t_0, T]$ є обмеженими деякою константою $C = C(T)$. Крім того, на інтервалі $[t_0, T]$ величини $W_{n,i}(t)/W(t)$ є також обмеженими, оскільки $W(t) \neq 0$ для всіх $t \in [t_0, T]$, а $W_{n,i}(t)$, $i = \overline{1,n}$, є неперервними при кожному $t \in \mathbf{R}$. Звідси випливає, що при кожному $t \in [t_0, T]$ величини $c_{i,k}(t)$, $i = \overline{1,n}$, прямують до 0 при $k \to +\infty$, оскільки $p_{i,k}(t) \to p_i$ при $k \to +\infty$. Очевидно, що на інтервалі $[t_0, T]$ будуть обмеженими також і функції $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Отже, для будь-якого фіксованого $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{0, n-1}$, величини $z_k^{(i)}(t) \to 0$ при $k \to +\infty$. Звідси отримуємо твердження леми.

Приклад. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x'' - \frac{1}{k^2}x = e^{\beta t}, \quad t \geq 0, \quad \beta \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

якому в граничному випадку ($k \to +\infty$) відповідає диференціальне рівняння

$$y'' = e^{\beta t}. \tag{10}$$

При початкових умовах $x(0) = c_0$, $x'(0) = c_1$, за умови, що $k > 1$, $|k\beta| \neq 1$, рівняння (9) має розв'язок

$$x_k(t) = \frac{c_0 + kc_1}{2}\, e^{t/k} + \frac{c_0 - kc_1}{2}\, e^{-t/k} + \frac{k^2}{\beta^2 k^2 - 1}\, e^{\beta t},$$

а рівняння (10) – відповідно розв'язок $y(t) = c_1 t + c_0 + \dfrac{1}{\beta^2}\, e^{\beta t}$.

Неважко пересвідчитись, що при кожному (фіксованому) $t \geq t_0$ значення $x_k(t) \to y(t)$ при $k \to +\infty$.

4. Асимптотичні властивості розв'язків задачі (1), (2): обмеженість, необмеженість, прямування (при $t \to +\infty$) до сталої. Розглянемо питання про асимптотичні (при $t \to \to +\infty$) властивості розв'язків задачі (1), (2). Рівнянням (4) та (1) відповідають однорідні диференціальні рівняння

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = 0, \tag{11}$$

$$x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t) x = 0. \tag{12}$$

Диференціальному рівнянню (11) відповідає характеристичне рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{13}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1^0) показник Ляпунова функції $f(t)$ задовольняє нерівність $\gamma < \alpha = \max\limits_{1\leq i\leq n} \mathrm{Re}\lambda_i$, де λ_i, $i = \overline{1,n}$, — характеристичні корені рівняння (13);

2^0) коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умову (3);

3^0) моменти τ_k, $k \in \mathbf{N}$, імпульсної дії задовольняють нерівності $0 < \delta < \tau_{k+1} - \tau_k < < \Delta$, $k \in \mathbf{N}$, для деяких $\delta, \Delta > 0$;

4^0) для всіх достатньо великих $k \in \mathbf{N}$ однорідне диференціальне рівняння (11) має такий частинний розв'язок $x_k(t)$, $t \geq 0$, що виконуються співвідношення $x_k(\tau_k) = 0$, $x_k(\tau_{k+1}) \geq c > 0$ (для деякої сталої c) і при цьому $x_k^{(i)}(\tau_k) = J_{k,i}$, де $|J_{k,i}| < J$ для деякого $J > 0$ та всіх $i = \overline{0, n-1}$, $k \in \mathbf{N}$.

Тоді для будь-якого розв'язку $x^*(t)$ диференціального рівняння (1) існують такі обмежені в сукупності величини імпульсної дії $\tilde{I}_{k,i}$, $k \in \mathbf{N}$, що розв'язок $\Phi(t)$ задачі (1), (2), початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для розв'язку $x^*(t)$, є обмеженим.

Доведення. Згідно з [5], у випадку диференціального рівняння (4) для будь-яких (заданих) моментів імпульсної дії $\{\tau_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, і для кожного розв'язку $x_*(t)$ рівняння (4) існують такі (обмежені в сукупності) величини імпульсної дії $I_{k,i}$, $k \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1, n-1}$, що розв'язок задачі (4), (2), початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для розв'язку $x_*(t)$, буде обмеженим. Позначимо цей розв'язок через $\Phi_1(t)$.

Нехай $\hat{x}_k(t)$ — розв'язок диференціального рівняння (11), для якого виконуються співвідношення $\hat{x}_k(0) = 0$, $\hat{x}_k^{(i)}(0) = J_{k,i}$, $i = \overline{1, n-1}$, $\hat{x}_k(\tau_{k+1} - \tau_k) \geq c > 0$. Згідно з умовою 4^0 теореми 1, такий розв'язок існує, і його можна отримати поклавши, наприклад, $\hat{x}_k(t) = x_k(t - \tau_k)$.

Розглянемо рівняння

$$y^{(n)} + q_{1,k}(t) y^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1,k}(t)y' + q_{n,k}(t) y = 0, \tag{14}$$

де $q_{i,k}(t) = a_i(t + \tau_k)$, $t \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, $k \in \mathbf{N}$, функції $a_i(t)$ є коефіцієнтами рівняння (1). Очевидно, що $p_{i,k}(t) \to a_i$ при $k \to +\infty$, де a_i, $i = \overline{1, n}$, — коефіцієнти рівняння (4).

Нехай $\hat{y}_k(t)$, $t \geq 0$, $k \in \mathbf{N}$, — розв'язок диференціального рівняння (14) з початковими умовами $\hat{y}_k(0) = 0$, $\hat{y}_k^{(i)}(0) = J_{k,i}$, $i = \overline{1, n-1}$, а $\hat{x}_k(t)$ — розв'язок диференціального рівняння (11) з початковими умовами $\hat{x}_k(0) = 0$, $\hat{x}_k^{(i)}(0) = J_{k,i}$, $i = \overline{1, n-1}$. Тоді з леми 1 випливає, що $\lim\limits_{k \to +\infty} |\hat{y}_k(t) - \hat{x}_k(t)| = 0$ для всіх $t \in \mathbf{R}$, $i = \overline{0, n-1}$.

Виконавши у рівнянні (14) та початкових умовах для $\hat{y}_k(t)$ заміну $t = s - \tau_k$, отримаємо замість (14) рівняння вигляду (12) для функції $y = y(s)m$, що задовольняє початкові умови $y_k(\tau_k) = 0$, $y_k^{(i)}(\tau_k) = J_{k,i}$, $i = \overline{1, n-1}$. Звідси $y_k(s) = \hat{y}_k(t)$, тобто $y(t + \tau_k) = \hat{y}_k(t)$.

Аналогічно, розв'язок $x_k(t)$ рівняння (11) з початковими умовами $x_k(\tau_k) = 0$, $x_k^{(i)}(\tau_k) = J_{k,i}$, $i = \overline{1, n-1}$, задовольняє співвідношення $x_k(t + \tau_k) = \hat{x}_k(t)$.

Таким чином, згідно з лемою 1, отримуємо, що $\lim\limits_{k \to +\infty} |x_k(t) - y_k(t)| = 0$ при $k \to +\infty$ для будь-якого $t \in \mathbf{R}$.

Звідси, з огляду на умову 4^0, маємо, що нерівність $y_k(\tau_{k+1}) \geq c/2$ справджується для всіх $k \geq K$ при деякому $K \in \mathbf{N}$.

Визначимо значення величин імпульсної дії $\tilde{I}_{k,i}$, $i = \overline{1, n-1}$, $k \in \mathbf{N}$, для задачі (1), (2) згідно з наступними формулами:

1) $\tilde{I}_{2k-1,i} = J_k y_{2k-1}^{(i)}(\tau_{2k-1})$, $k \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1, n-1}$, де сталі J_k вибираються таким чином, щоб виконувалась рівність $\Phi_1(\tau_{2k} + 0) = y_{2k-2}^*(\tau_{2k}) + J_k y_{2k-1}(\tau_{2k})$, $k \in \mathbf{N}$. Тут функції $y_{2k-1}(t)$ задовольняють рівняння (12), а функції $y_{2k-2}^*(t)$ — рівняння (1), причому початкові умови для $y_{2k-2}^*(t)$ мають вигляд $y_{2k-2}^{*(i)}(\tau_{2k-2}) = \Phi_1^{(i)}(\tau_{2k-2} + 0)$, $i = \overline{0, n-1}$, де розв'язок $\Phi_1(t)$ визначено на початку доведення теореми 1;

2) $\tilde{I}_{2k,i} = \Phi_1^{(i)}(\tau_{2k} + 0) - \Phi^{(i)}(\tau_{2k} - 0)$, $i = \overline{1, n-1}$, $k \in \mathbf{N}$.

Неважко переконатись [5], що при таких значеннях величин імпульсної дії $\tilde{I}_{k,i}$, $j = \overline{1, n}$, при всіх $k \in \mathbf{N}$ виконуються рівності $\Phi^{(i)}(\tau_{2k}) = \Phi_1^{(i)}(\tau_{2k})$, $i = \overline{0, n-1}$, де $\Phi(t)$ — розв'язок задачі (1) з умовами імпульсної дії вигляду (2), коли $I_{k,i} = \tilde{I}_{k,i}$, $k \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1, n}$.

Згідно з лемою 1, справджується співвідношення $y_{2k-2}^*(\tau_{2k}) \to x_{2k-2}^*(\tau_{2k})$ при $k \to +\infty$, де $x_{2k-2}^*(t)$ — розв'язок рівняння (4) з початковими умовами вигляду $x_{2k-2}^{*(i)}(\tau_{2k-2}) = \Phi_1^{(i)}(\tau_{2k-2} + 0)$, $i = \overline{0, n-1}$. Тоді на підставі умови (2) неважко пересвідчитись, що виконується рівність $\Phi_1(\tau_{2k}) = x_{2k-2}^*(\tau_{2k}) + x_{2k-1}(\tau_{2k})$, де $x_{2k-1}(t)$ — розв'язок рівняння (11) з початковими умовами $x_{2k-1}(\tau_{2k-1}) = 0$, $x_{2k-1}^{(i)}(\tau_{2k-1}) = I_{2k-1,i}$, $i = \overline{1, n-1}$.

Зауважимо, що, згідно з [8], для деякого $C_1 > 0$ виконується оцінка $|x_{2k-1}(\tau_{2k})| < C_1 e^{\alpha(\tau_{2k} - \tau_{2k-1})}$, тобто $|x_{2k-1}(\tau_{2k})| < C_1 \max\{e^{\alpha\Delta}, e^{\alpha\delta}\}$.

Далі, оскільки, згідно з лемою 1, для деякого числа $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності $|x_{2k-2}^*(\tau_{2k}) - y_{2k-2}^*(\tau_{2k})| < \varepsilon$ та $|I_{k,i}| < I$, то має місце оцінка

$$|\Phi_1(\tau_{2k}) - y_{2k-2}^*(\tau_{2k})| \leq |x_{2k-2}^*(\tau_{2k}) + x_{2k-1}(\tau_{2k}) - y_{2k-2}^*(\tau_{2k})| \leq$$

$$\leq |x_{2k-2}^*(\tau_{2k}) - y_{2k-2}^*(\tau_{2k})| + I e^{\alpha\Delta} \leq \varepsilon + C_1 \max\{e^{\alpha\Delta}, e^{\alpha\delta}\} = C_2.$$

Звідси випливає, що величини J_k для всіх $k \in \mathbf{N}$ обмежені числом

$$|J_k| = \left| \frac{\Phi_1(\tau_{2k}) - x_{2k-2}^*(\tau_{2k})}{y_{2k-1}(\tau_{2k})} \right| < \frac{2C_2}{c}.$$

Аналогічно за допомогою леми 1 неважко показати, що при всіх $k \in \mathbf{N}$ справджується нерівність

$$|\Phi_1^{(i)}(\tau_{2k}) - \Phi^{(i)}(\tau_{2k})| \le |x_{2k-2}^*(\tau_{2k}) - y_{2k-2}^*(\tau_{2k})| + C_1 \max\{e^{\alpha\Delta}, e^{\alpha\delta}\} + \frac{2C_1}{c} e^{\alpha\Delta} \le C_3.$$

Таким чином, величини імпульсної дії $\tilde{I}_{k,i}$, $k \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1, n-1}$, задовольняють нерівність $|\tilde{I}_{2k,i} - I_{2k,i}| < C_3$, $k \in \mathbf{N}$, при деякій сталій $C_3 > 0$, і при цьому $\Phi_1^{(i)}(\tau_{2k} + 0) - \Phi^{(i)}(\tau_{2k} + +0) = 0$ для $i = \overline{0, n-1}$. Звідси випливає, що величини імпульсної дії $\tilde{I}_{k,i}$ є обмеженими в сукупності, а розв'язок $\Phi(t)$ при $t \to +\infty$ також є обмеженим.

Теорему 1 доведено.

Використовуючи результати [5], можна довести наступну лему, яка дає достатні умови існування частинних розв'язків $x_k(t)$ однорідного диференціального рівняння (11), для яких виконується умова 4^0 теореми 1. Ці умови сформульовано через властивості коренів характеристичного рівняння (13).

Лема 2. *Нехай число n — парне і виконується хоча б одна з наступних умов:*

1^0) серед коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рівняння (13) є хоча б один кратний;

2^0) серед коренів рівняння (13) існують принаймні два корені з різними дійсними частинами;

3^0) серед коренів рівняння (13) існує такий корінь λ, що виконується умова

$$\varliminf_{k \to +\infty} \left\{ \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{\pi} \operatorname{Im} \lambda \right\} \ne 0$$

(*далі* $\{x\}$ *означає дробову частину числа* x);

4^0) серед коренів рівняння (13) існують такі два корені λ_1, λ_2, що

$$\varliminf_{k \to +\infty} \left\{ \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{2\pi} \operatorname{Im} \lambda_1 \right\} > 0, \quad \varliminf_{k \to +\infty} \left\{ \frac{\tau_{k+1} - \tau_k + \pi}{2\pi} \operatorname{Im} \lambda_2 \right\} > 0.$$

Тоді для кожного $k \in \mathbf{N}$ існує такий частинний розв'язок $x_k(t)$, $t \ge 0$, рівняння (11), для якого виконується нерівність $x_k(\tau_{k+1}) \ge c > 0$ (для деякої сталої c) і при цьому

$$x_k(\tau_k) = 0, \quad x_k^{(i)}(\tau_k) = J_{k,i}, \quad |J_{k,i}| < J, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{15}$$

для деякого $J > 0$.

Доведення. Припустимо, що виконується умова 1^0 леми 2, тобто нехай характеристичне рівняння (13) має корінь λ кратності 2 або більше. Покажемо, що однорідне диференціальне рівняння (11) має розв'язок $x_k(t)$, який задовольняє умову (15) та нерівність $x_k(\tau_{k+1}) > c > 0$ (для деякої сталої c).

Якщо число λ є дійсним, то рівняння (11) має розв'язок $x_k(\tau) = (\tau - \tau_k)e^{\lambda(\tau - \tau_k)}$, для якого, очевидно, $x_k(\tau_k) = 0$, але $x_k(\tau_{k+1}) \ge \delta e^{\alpha\delta} > 0$.

Аналогічно, якщо число $\lambda = \alpha + i\omega$ є комплексним, то рівняння (11) має розв'язки

$$x_k(t) = (t - \tau_k)e^{\alpha(t - \tau_k)} \operatorname{sign}\left[\cos\omega(\tau_{k+1} - \tau_k)\right] \cos\omega(t - \tau_k)$$

та

$$y_k(t) = (t - \tau_k)e^{\alpha(t-\tau_k)}\mathrm{sign}\,[\sin\omega(\tau_{k+1} - \tau_k)]\sin\omega(t - \tau_k),$$

для яких, очевидно, $x_k(\tau_k) = y_k(\tau_k) = 0$, але або $x_k(\tau_{k+1}) \geq \delta e^{\alpha\delta}/\sqrt{2} > 0$, або $y_k(\tau_{k+1}) \geq \geq \delta e^{\alpha\delta}/\sqrt{2} > 0$.

Лему 2 доведено.

Припустимо, що виконується умова 2^0 леми 2, тобто серед коренів рівняння (15) існують принаймні два корені λ_1, λ_2 з різними дійсними частинами.

Якщо λ_1, λ_2 — дійсні і $\lambda_1 > \lambda_2$, то рівняння (11) має розв'язок $x_k(t) = e^{\lambda_1(t-\tau_k)} - -e^{\lambda_2(t-\tau_k)}$, для якого $x_k(\tau_k) = 0$ і виконується нерівність $x_k(\tau_k) > e^{\lambda_1\delta} - e^{\lambda_2\delta} > 0$. Остання нерівність випливає з монотонності функції $x_k(t)$ та умови $\tau_{k+1} - \tau_k > \delta$.

Якщо серед коренів рівняння (13) є простий комплексний корінь вигляду $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ та простий дійсний корінь $\lambda_2 > \alpha$, то диференціальне рівняння (11) має розв'язок $x_k(t) = = e^{\lambda_2(t-\tau_k)} - e^{\alpha(t-\tau_k)}\cos\omega(t - \tau_k)$, для якого виконуються умови (15) та справджується нерівність

$$x_k(\tau_{k+1}) > e^{\lambda_2\delta} - e^{\alpha\delta}\cos\omega(\tau_{k+1} - \tau_k) \geq e^{\lambda_2\delta} - e^{\alpha\delta} > 0.$$

Якщо серед коренів (13) є простий комплексний корінь вигляду $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ та простий дійсний корінь $\lambda_2 < \alpha$, то диференціальне рівняння (11) має розв'язок вигляду

$$x_k(t) = e^{\alpha(t-\tau_k)}\cos\omega(t - \tau_{k+1}) - e^{\lambda_2(t-\tau_k)}\cos\omega(\tau_{k+1} - \tau_k),$$

для якого виконується (15), але має місце співвідношення

$$x_k(\tau_{k+1}) > e^{\alpha\delta} - e^{\lambda_2\delta}\cos\omega(\tau_{k+1} - \tau_k) \geq e^{\alpha\delta} - e^{\lambda_2\delta} > 0.$$

Якщо характеристичне рівняння має два комплексні корені вигляду $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1$, $\lambda_2 = \alpha_2 + i\omega_2$, де $\alpha_1 > \alpha_2$, то диференціальне рівняння (11) має розв'язок

$$x_k(t) = e^{\alpha_1(t-\tau_k)}\cos\omega_1(t - \tau_{k+1}) - e^{\alpha_2(t-\tau_k)}\cos[\omega_2(t - \tau_k) - \omega_1(\tau_{k+1} - \tau_k)],$$

для якого мають місце співвідношення (15) та нерівність

$$x_k(\tau_{k+1}) > e^{\alpha_1\delta} - e^{\alpha_2\delta}\cos(\tau_{k+1} - \tau_k)(\omega_1 - \omega_2) \geq e^{\alpha_1\delta} - e^{\alpha_2\delta} > 0.$$

Припустимо тепер, що виконується умова 3^0 леми 2. Тоді характеристичне рівняння (13) має комплексний корінь $\lambda = \alpha + i\omega$ з властивістю $\{(\tau_{k+1} - \tau_k)\omega/\pi\} > a$ при всіх достатньо великих $k \in \mathbf{N}$ та для деякого $a \in (0;1)$. Тоді, очевидно, що диференціальне рівняння (11) має розв'язок

$$x_k(t) = e^{\alpha(t-\tau_k)}\sin\omega(t - \tau_k),$$

для якого $x_k(\tau_k) = 0$ і виконується нерівність

$$x_k(\tau_{k+1}) > \min\{e^{\alpha\delta}, e^{\alpha\Delta}\}\sin\pi a > 0.$$

Припустимо тепер, що виконується умова 4^0 леми 2, тобто характеристичне рівняння (13) має два простих комплексних корені $\lambda_1 = \alpha + i\omega_1$, $\lambda_2 = \alpha + i\omega_2$, де $\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_1 > 0$,

$\omega_2 > 0$, а їх уявні частини такі, що $\left\{\dfrac{(\tau_{k+1}-\tau_k)\omega_1}{2\pi}\right\} > a$, $\left\{\dfrac{(\tau_{k+1}-\tau_k+\pi)\omega_2}{2\pi}\right\} > a$, де $a \in (0;1)$. Оскільки можна вважати, що умова 3^0 леми 2 не виконується для λ_1, тобто $\{(\tau_{k+1}-\tau_k)\omega_1/\pi\} \to 0$ при $t \to +\infty$, то в цьому випадку $a \geq \dfrac{1}{2}$. Тоді диференціальне рівняння (11) має розв'язок

$$x_k(t) = e^{\alpha(t-\tau_k)}\sin\omega_2(t-\tau_k) - e^{\alpha(t-\tau_k)}\sin\omega_1(t-\tau_k),$$

що задовольняє умову $x_k(\tau_k) = 0$ та співвідношення

$$x_k(\tau_{k+1}) \geq \min\{e^{\alpha\delta}, e^{\alpha\Delta}\}[\sin\omega_2(\tau_{k+1}-\tau_k) - \sin\omega_1(\tau_{k+1}-\tau_k)] >$$
$$> \min\{e^{\alpha\delta}, e^{\alpha\Delta}\}(-2\sin 2\pi a) = c > 0.$$

Лему доведено.

Аналогічно доводиться наступна лема.

Лема 3. *Нехай число n — непарне і виконується хоча б одна з наступних умов:*

1^0) серед коренів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рівняння (13) є хоча б один кратний;

2^0) серед коренів рівняння (13) існують принаймні два корені з різними дійсними частинами;

3^0) існує такий корінь λ рівняння (13), що виконується умова

$$\varliminf_{k\to+\infty}\left\{\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{2\pi}\operatorname{Im}\lambda\right\} \neq 0.$$

Тоді для кожного $k \in \mathbf{N}$ існує такий частинний розв'язок $x_k(t)$, $t \geq 0$, рівняння (11), для якого виконуються нерівність $x_k(\tau_{k+1}) \geq c > 0$ (для деякої сталої c) та умова (15) (для деякого $J > 0$).

Аналогічно теоремі 1 доводиться наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай для рівнянь (1) та (4) виконуються наступні умови:*

1^0) для коефіцієнтів рівнянь (1), (4) справджується умова (3);

2^0) $f(t)$ є неперервною функцією;

3^0) показник Ляпунова функції $f(t)$ задовольняє умову $\gamma < \alpha = \max\limits_{1\leq i\leq n}\operatorname{Re}\lambda_i$, де λ_i, $i = \overline{1,n}$, — корені характеристичного рівняння (13);

4^0) для всіх достатньо великих $k \in \mathbf{N}$ однорідне диференціальне рівняння (11) має такий частинний розв'язок $x_k(t)$, $t \geq 0$, що виконуються співвідношення $x_k(\tau_k) = 0$, $x_k(\tau_{k+1}) \geq c > 0$ (для деякої сталої c) і при цьому $x_k^{(i)}(\tau_k) = J_{k,i}$, де $|J_{k,i}| < J$ для деякого $J > 0$ та всіх $i = \overline{0, n-1}$, $k \in \mathbf{N}$;

5^0) справджується нерівність $\alpha > 0$.

Тоді для будь-яких (заданих) моментів імпульсної дії та для кожного розв'язку $x^*(t)$ диференціального рівняння (1) існують такі обмежені в сукупності величини імпульсної дії, що розв'язок $\Phi(t)$ задачі (1), (2), початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для розв'язку $x^*(t)$, задовольняє співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty}\Phi(t) = +\infty$.

Доведення. Згідно з [6], у випадку диференціального рівняння (4) для будь-яких (заданих) моментів імпульсної дії $\{\tau_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, і для кожного розв'язку $x_*(t)$ рівняння (4) існують такі (обмежені в сукупності) величини імпульсної дії $I_{k,i}$, $k \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1, n-1}$, що розв'язок $\Phi_1(t)$ задачі (4), (2), початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для розв'язку $x_*(t)$, задовольняє співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi_1(t) = +\infty$.

Тоді на підставі міркувань, які використані при доведенні теореми 1, одержуємо твердження теореми 2.

У випадку, коли $\alpha = \max\limits_{1\le i\le n} \mathrm{Re}\lambda_i < 0$, де λ_i, $i = \overline{1, n}$, – корені рівняння (13), внаслідок неперервності по t величин $\kappa_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, де $\kappa(t)$, $\overline{1, n}$, — корені рівняння

$$\kappa^n + a_1(t)\kappa^{n-1} + a_2(t)\kappa^{n-2} + \ldots + a_n(t)\kappa = 0,$$

існують такий момент часу t_* та число $\beta < 0$, що для всіх $t > t_*$ виконується нерівність $\max\limits_{1\le i\le n} \mathrm{Re}\kappa_i(t) < \beta$.

Доведемо таке твердження.

Лема 4. *Нехай для рівнянь (1) та (4) виконуються наступні умови:*

1^0) коефіцієнти рівнянь (1), (4) задовольняють умову (3);

2^0) $f(t)$ є неперервною функцією;

3^0) показник Ляпунова функції $f(t)$ задовольняє умову $\gamma < \alpha = \max\limits_{1\le i\le n} \mathrm{Re}\,\lambda_i$, де λ_i, $i = \overline{1, n}$, — корені характеристичного рівняння (13);

4^0) справджується нерівність $\alpha < 0$.

Тоді розв'язок $x(t)$ диференціального рівняння (1) з довільними (фіксованими) початковими умовами $x^{(i)}(t_*) = x_{i,0}$, $i = \overline{0, n-1}$ в момент t_*, є асимптотично близьким (при $t \to +\infty$) до тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$, тобто для кожного $i = \overline{0, n-1}$ виконується співвідношення $x^{(i)}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Доведення. Які при доведенні леми 1, рівняння (1) можна записати у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з деякою матрицею $A(t)$, розв'язком якої є вектор вигляду $\overrightarrow{x}(t) = (x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$. Згідно з [8], для $\overrightarrow{x}(t)$ виконується нерівність

$$\|\overrightarrow{x}(t)\| \le \|x_0\| e^{\int\limits_{t_*}^{t} \|A_k(\tau)\| d\tau},$$

де $\overrightarrow{x}_0 = (x_{0,0}, x_{1,0}, \ldots, x_{n-1,0})$ — вектор початкових умов.

Позначимо $\beta_k = \max\limits_{\tau\in[t_*,t]} \beta_k(\tau)$, де $\beta_k(\tau) = \|A_k(\tau)\|$, $k \in \mathbf{N}$. Зауважимо, що $\beta_k(t)$ неперервно залежить від t при кожному $k \in \mathbf{N}$.

Оскільки, згідно з зазначеним вище, існує таке $\beta < 0$, що $\beta_k \le \beta$ для всіх $k \in \mathbf{N}$, то виконується нерівність $\|\vec{x}(t)\| \le \|\vec{x}_0\| e^{\beta(t-t_*)}$. Звідси випливає, що $x^{(i)}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всіх $i = \overline{0, n-1}$.

Лему 4 доведено.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення 1^0 – 4^0 теореми 2 та справджується нерівність $\alpha < 0$. Тоді для будь-яких (заданих) моментів імпульсної дії і для кожного розв'язку $x^*(t)$ диференціального рівняння (1) для заданих дійсних чисел A_i, $i = \overline{1, n}$, існують такі обмежені в сукупності величини імпульсної дії, що розв'язок $\Phi(t)$ задачі*

(1), (2), початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для розв'язку $x^*(t)$, задовольняє при всіх $i = \overline{1,n}$ співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi^{(i)}(t) = A_i$.

Доведення. Згідно з [6], у випадку диференціального рівняння (4) для будь-яких (заданих) моментів імпульсної дії $\{\tau_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, і для кожного розв'язку $x_*(t)$ рівняння (4) існують такі (обмежені в сукупності) величини імпульсної дії $I_{k,i}$, $k \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1, n-1}$, що розв'язок $\Phi_1(t)$ задачі (4), (2), початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для розв'язку $x_*(t)$, задовольняє співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi_1^{(i)}(t) = A_i$ при всіх $i = \overline{1,n}$.

Тоді на підставі міркувань, які використані при доведенні теореми 1, одержуємо, що для будь-якого t_* можна вибрати таку імпульсну дію при $\tau_k < t_*$ для задачі (1), (2), що $\Phi^{(i)}(t_*) = \Phi^{(i)}(t_*)$, $i = \overline{1,n}$.

Для всіх $\tau_k > t_*$ значення імпульсної дії можна взяти таким самим, як і для розв'язку $\Phi_1(t)$. Тоді, згідно з лемою 4, буде виконуватись співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi^{(i)}(t) = A_i$, $i = \overline{1,n}$.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для будь-яких (заданих) моментів імпульсної дії і для кожного розв'язку $x^*(t)$ диференціального рівняння (1) при будь-яких обмежених в сукупності величинах імпульсної дії розв'язок $\Phi(t)$ задачі (1), (2), початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для розв'язку $x^*(t)$, задовольняє співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty} |\Phi(t)| < +\infty$.*

Теорема 4 безпосередньо випливає з теореми 3 [6] та леми 4.

Висновки. В даній статті досліджено асимптотичну (при $t \to \infty$) поведінку розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами та імпульсною дією в фіксовані моменти часу. З'ясовано питання про те, при яких умовах щодо заданих моментів імпульсної дії існують такі значення імпульсної дії, що розв'язок вказаної задачі, початкові умови для якого збігаються з початковими умовами для деякого (довільного, але фіксованого) розв'язку початкового рівняння (без імпульсної дії), є обмеженим, не є обмеженим чи прямує до нескінченності. Показано, що такі величини імпульсної дії існують при певних умовах щодо моментів імпульсної дії та коренів характеристичного рівняння однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, яке відповідає початковому.

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. О.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща школа, 1987. — 287 с.
3. *Самойленко В. Г, Элгондыев К. К.* Асимптотическое интегрирование слабо нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. — Киев, 1989. — 52 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.37).
4. *Самойленко В. Г, Елгондиєв К. К.* Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. — 1987. — **49**, № 1. — С. 141 – 148.
5. *Бородін В. А., Самойленко В. Г.* Асимптотичні властивості розв'язків диференціального рівняння n-го порядку з імпульсною дією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — **51**, № 4. — С. 76 – 81.

6. *Бородін В. А., Самойленко В. Г.* Вплив імпульсної дії на асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. — 2004. — Вип. 11. — С. 31 – 36.

7. *Бородін В. А.* Асимптотична еквівалентність систем лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Допов. НАН України. — 2003. — № 8. — С. 7 – 11.

8. *Демидович В. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Одержано 07.07.2005