

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ
НЕЗАМКНУТОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ
ЕЕ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ***

В. А. Троценко, Ю. В. Троценко

*Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: trots@imath.kiev.ua*

We develop a variational method for solving the spectral problem of free oscillation of a rotation shell, which is nonclosed in the meridian direction. This method is equally efficient for both the medium and small relative width of the shell. Coordinate systems of functions are constructed with regard to the structure of the formal asymptotic expansions for solutions to the initial equations. By considering an example of calculating the frequencies of oscillations of a circular cylindrical shell, it was shown that the algorithm for solving the problem under consideration gives a uniform convergence of solutions and their first three derivatives in the entire region where the equations are integrated.

Розвинуто варіаційний метод розв'язання спектральної задачі про вільні коливання незамкненої в меридіональному напрямку оболонки обертання, який є однаково ефективним як при середніх, так і малих значеннях відносної товщини оболонки. Координатні системи функцій будувались з урахуванням структури формальних асимптотичних розкладів фундаментальної системи розв'язків початкових рівнянь. На прикладі розрахунку частот і форм коливань кругової циліндричної оболонки показано, що алгоритм розв'язку задачі, який пропонується, забезпечує рівномірну збіжність розв'язків та їхніх перших трьох похідних у всій області інтегрування рівнянь.

1. Введение. Система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающая собственные колебания тонкой упругой оболочки вращения, имеет одну из существенных особенностей, связанную с наличием малого параметра при старшей производной, который обусловлен тонкостенностью оболочки. Этот факт является определяющим при выборе существующих и разработке новых методов интегрирования таких уравнений.

Наличие малого параметра дает возможность во многих случаях применять методы асимптотического интегрирования разрешающих уравнений. В этом классическом направлении аналитической теории дифференциальных уравнений выполнено большое количество исследований, основные результаты которых изложены в работах В. Вазова [1], А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова [2], М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [3], И. М. Рапопорта [4], С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля и Л. Д. Николенко [5] и других авторов. При практическом применении асимптотических методов обычно ограничиваются построением алгоритмов нулевого (первого) приближения, так как процесс получения высших приближений является весьма трудоемким.

Традиционные методы математической физики решения краевых задач (аппроксимация операторов разностными соотношениями, методы типа Рунге, конечных элементов

* Выполнена при частичной поддержке НИР № 0105U001108.

и т. п.) могут быть эффективно использованы лишь при средних значениях параметра при старшей производной и оказываются непригодными при его малых значениях. Причины, по которым классические схемы интегрирования непригодны для решения сингулярно возмущенных задач, связаны с наличием узких пограничных либо внутренних переходных слоев с большими градиентами решений. Аппроксимация таких решений конечными разностями или отрезками конечных рядов не дает положительного результата, поскольку для получения с необходимой точностью решения приходится уменьшать шаг дискретизации или брать большое количество членов в разложениях для искомых функций. В результате это приводит к усложнению получения решения, что связано, в первую очередь, с возникающей при этом неустойчивостью вычислений. Как правило, при решении сингулярно возмущенных задач существует такая область изменения малого параметра, где асимптотические методы еще не дают требуемой точности решения задачи (необходимо брать большое число приближений), а традиционные методы уже не могут применяться.

В связи с изложенным выше возникает проблема разработки таких методов решения граничных задач для уравнений с параметром при старшей производной, которые имели бы одинаковую сходимость как при малых, так и при средних его значениях.

Разработке разностных схем, сходящихся равномерно по параметру, посвящена монография Э. Дулана, Дж. Миллера, У. Шилдерса [6]. Обзор по численным методам решения сингулярно возмущенных задач содержится в работе Ю. П. Боглаева и А. А. Станилевского [7].

Широкое использование асимптотических методов применительно к спектральным задачам теории оболочек изложено в монографии А. Л. Гольденвейзера, В. Б. Лидского и П. Е. Товстика [8]. Наибольшее применение для решения одномерных задач теории оболочек получил численный метод, основанный на сведении исходной краевой задачи к решению последовательности задач Коши. В связи с тем, что решения для оболочек имеют большую изменчивость, прямое применение методов типа Рунге-Кутты для решения задач Коши приводит к неустойчивости вычислений. Избежать этих трудностей (в определенной мере) позволяет метод дискретной ортогонализации решений, который был предложен С. К. Годуновым [9]. Однако рассматриваемый модифицированный метод Рунге-Кутты не имеет равномерной сходимости по параметру, поскольку число шагов при интегрировании системы уравнений, необходимое для получения решений с заданной точностью, существенно возрастает с уменьшением относительной толщины оболочки. Обширные данные по решению задач динамики и статики оболочек различного вида, полученные на основе этого метода, содержатся в монографиях Я. М. Григоренко, Е. И. Беспаловой, А. Б. Китайгородского, А. И. Шинкаря [10] и А. В. Кармишина, В. А. Лясковца, В. И. Мяченкова, А. Н. Фролова [11].

Применение аналитических методов типа Ритца к решению задач теории оболочек существенно затруднено в связи с выбором систем базисных функций, которые бы учитывали наличие в точных решениях высоких градиентов в окрестностях граничных точек задачи. Развитию вариационного метода для решения нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи статики высокоэластичных мембран посвящена работа В. А. Троценко [12]. При этом класс допустимых функций, на котором реализован метод Ритца, выбирался на основе установленной структуры асимптотических разложений фундаментальной системы решений соответствующей линеаризованной задачи, имеющей особенности как по параметру при старшей производной, так и по независимой переменной. По-

лученные на такой основе приближенные решения имеют свойство равномерной сходимости вместе со своими производными до определенного порядка во всех точках области интегрирования исходных нелинейных уравнений.

В настоящей работе предлагается аналогичный подход для построения систем координатных функций при решении методом Ритца спектральной задачи о свободных колебаниях незамкнутой в меридиональном направлении оболочек вращения. Эффективность такого подхода построения приближенных решений проанализирована на задаче о колебаниях круговой цилиндрической оболочки, у которой один край жестко закреплен, а другой — свободен.

2. Постановка задачи. Рассмотрим оболочку, срединная поверхность которой является поверхностью вращения. У такой оболочки линиями главных кривизн будут ее меридианы и параллели. Будем предполагать, что оболочка ограничена двумя параллелями. В качестве криволинейных координат возьмем длину дуги меридиана s ($s_1 \leq s \leq s_2$) и угол φ , определяющий положение точки на соответствующем параллельном круге. Обозначим через R_1 радиус кривизны меридиана, а через $r = r(s)$ расстояние от точки меридиана до оси вращения. Второй радиус кривизны R_2 равен длине отрезка нормали к срединной поверхности от этой поверхности до оси оболочки. При этом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{dr}{ds} = r' = \cos \theta, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{r''}{\sqrt{1 - (r')^2}}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sin \theta}{r} = \frac{\sqrt{1 - (r')^2}}{r}, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R_2} \right) = \frac{r'}{r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

где θ — угол, образуемый нормалью к оболочке и осью вращения.

Проекция перемещения точек срединной поверхности на положительные направления меридиана и параллели, а также внешнюю нормаль к поверхности оболочки обозначим соответственно через u , v и w . Рассматривая установившиеся колебания оболочки с n волнами по параллели, перемещения оболочки представим в виде

$$u(s, \varphi, t) = u(s) \cos n\varphi \sin \omega t, \quad v(s, \varphi, t) = v(s) \sin n\varphi \sin \omega t, \quad (2)$$

$$w(s, \varphi, t) = w(s) \cos n\varphi \sin \omega t.$$

Тогда определение вектор-функции $\vec{u} = (u, v, w)$ и частоты колебаний оболочки ω сводится к интегрированию однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при соответствующих граничных условиях, выражающих условия закрепления торцов оболочки. Переходя к безразмерным величинам, эту систему уравнений записываем в следующей форме:

$$A\vec{u} - \lambda\vec{u} = 0, \quad (3)$$

где

$$A = c^2 K + L, \quad c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad \lambda = \frac{(1 - \nu^2)\rho R_0^2 \omega^2}{E},$$

h и R_0 — толщина и характерный линейный размер оболочки, E , ν и ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки.

Дифференциальные выражения, входящие в матрицы L и K , имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{2}{R_1 R_2} \right), & L_{12} &= -n \frac{d}{ds} \frac{1}{r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r, \\ L_{13} &= \frac{1-\nu}{R_2} \frac{d}{ds} - \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), & L_{21} &= \frac{n}{r^2} \frac{d}{ds} r - \frac{(1-\nu)n}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r}, \\ L_{22} &= \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{1-\nu}{R_1 R_2} \right) - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r, & L_{23} &= \frac{n}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ L_{31} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{d}{ds} r - \frac{1-\nu}{r} \frac{d}{ds} \frac{r}{R_2}, & L_{32} &= \frac{n}{r} \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \\ L_{33} &= \frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2}, & K_{33} &= \Delta_n \Delta_n + \frac{1-\nu}{r} \left(\frac{d}{ds} \frac{r}{R_1 R_2} \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r R_1 R_2} \right), \\ & & \Delta_n &= \frac{1}{r} \frac{d}{ds} r \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Операторы K_{ij} , при которых стоит малый параметр c^2 , содержат дифференцирования не выше второго порядка при $i, j \leq 2$ и не выше третьего при $i + j < 6$. Их явный вид, в отличие от L_{ij} , зависит от предположений, которые делаются в рамках различных теорий оболочек, использующих гипотезу Кирхгофа–Ляве. Выражения для K_{ij} в случае оболочек произвольного очертания и наиболее общих соотношениях упругости приведены в работе [13]. Ниже будем считать, что

$$K_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i + j < 6. \quad (4)$$

Предположение (4) в терминологии В. З. Власова [14] соответствует технической теории оболочек, в которой пренебрегают членами, зависящими от касательных перемещений в формулах для изменения кривизны и кручения.

Решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3) должны быть подчинены соответствующим однородным граничным условиям. Для случая абсолютно жесткого закрепления края оболочки эти условия имеют вид

$$u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0. \quad (5)$$

При свободном перемещении края оболочки имеем следующие силовые граничные условия [14]:

$$\begin{aligned}
T_{1(n)} &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{n}{r}v + \frac{r'}{r}u + \frac{w}{R_2} \right) = 0, \\
S_{(n)} &= \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r}v - \frac{n}{r}u \right) = 0, \\
M_{1(n)} &= -c^2 \left[\frac{d^2w}{ds^2} + \nu \left(\frac{r'}{r} \frac{dw}{ds} - \frac{n^2}{r^2}w \right) \right] = 0, \\
Q_{1(n)}^* &= -c^2 \left[\frac{d}{ds} \Delta_n w - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r}w \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

В других случаях крепления края оболочки используется линейная комбинация условий (5) и (6).

Приведенная краевая задача порождает оператор $\mathcal{A} = c^2 K + L$, который определен на гладких трехкомпонентных вектор-функциях \vec{u} , удовлетворяющих заданным граничным условиям. Этот оператор является симметричным и положительно определенным [13]. Из этого следует, что рассматриваемая задача имеет бесконечное множество вещественных собственных чисел $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n, \dots$ с единственной предельной точкой, расположенной на бесконечности.

3. Общие принципы построения приближенного решения задачи. Решение исходной однородной системы дифференциальных уравнений (3) при соответствующих граничных условиях можно свести к эквивалентной задаче отыскания минимума для функционала [15]

$$R(\vec{u}) = \frac{(\mathcal{A}\vec{u}, \vec{u})}{(\vec{u}, \vec{u})}. \tag{7}$$

Здесь символом (\vec{f}, \vec{g}) обозначено скалярное произведение вектор-функций $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ и $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$:

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \int_{s_1}^{s_2} (f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3) r ds.$$

Число $R(\vec{u})$ может быть образовано для любых функций сравнения. Под функциями сравнения будем понимать функции, которые необходимое число раз дифференцируемы и удовлетворяют всем граничным условиям задачи. Обозначим через $\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}, \dots, \vec{u}^{(n)}, \dots$ собственные функции рассматриваемой задачи, которым соответствуют собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, расположенные в порядке их возрастания. Первая собственная функция $\vec{u}^{(1)}$ доставляет минимум функционалу (7), а значение этого минимума совпадает с первым собственным значением задачи. Второе собственное значение λ_2 является наименьшим значением отношения $R(\vec{u})$ для функций сравнения, которые

ортогональны первой собственной функции $\vec{u}^{(1)}$, т. е. должно выполняться дополнительное условие $(\vec{u}, \vec{u}^{(1)}) = 0$. Аналогично $(n + 1)$ -е собственное значение равно минимуму функционала (7), когда \vec{u} пробегает область всех тех функций сравнения, которые ортогональны к первым n собственным функциям.

Для нахождения минимальных значений функционала (7) воспользуемся методом Ритца. В связи с этим представим функции $u(s)$, $v(s)$ и $w(s)$ в виде отрезков обобщенных рядов

$$u(s) = \sum_{j=1}^N x_j U_j(s), \quad v(s) = \sum_{j=1}^N x_{j+N} V_j(s), \quad w(s) = \sum_{j=1}^N x_{j+2N} W_j(s). \quad (8)$$

Здесь x_j , $j = 1, 2, \dots, 3N$, — пока неопределенные постоянные, $\{U_j\}$, $\{V_j\}$ и $\{W_j\}$ — системы координатных функций, которые подчинены лишь геометрическим граничным условиям задачи. Силовые граничные условия являются естественными граничными условиями для функционала (7) и, следовательно, нет необходимости их априорного выполнения в представлениях (8) для перемещений оболочки. Это обстоятельство в существенной мере облегчает проблему построения систем координатных функций и является важным преимуществом вариационного метода решения граничных задач по сравнению с другими приближенными методами математической физики.

При нахождении минимума функционала R , как функции x_1, x_2, \dots, x_{3N} , необходимыми условиями являются равенства

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 3N.$$

В итоге решение исходной задачи сводится к решению обобщенной алгебраической задачи на собственные значения

$$(A - \lambda B) \vec{x}^T = 0, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3N}), \quad (9)$$

с симметричными матрицами A и B . Симметричность матрицы A следует из симметричности оператора \mathcal{A} . Собственные числа алгебраической задачи (9) являются приближенными значениями первых $3N$ собственных чисел рассматриваемой граничной задачи. При этом все они являются верхними границами для λ_i , $i = 1, 2, \dots, 3N$.

Последовательности координатных функций должны быть полными и линейно независимыми [15]. Выполнение первого условия обеспечивает сходимость метода, а именно N -й член последовательности Ритца можно сделать как угодно близким к исходному обобщенному решению задачи, выбрав довольно большое число N . Второе условие обуславливает существование только одного решения алгебраической задачи (9). Следует отметить, что выполнение этих требований является необходимым, но не достаточным условием для эффективного построения минимизирующей последовательности Ритца. Дело в том, что при большом числе координатных функций необходимо решать алгебраические системы большой размерности. При этом ошибки округления чисел начинают играть существенную роль, с одной стороны, при вычислении коэффициентов алгебраической системы, а с другой — при решении этой системы уравнений [16]. Все это приводит к потере устойчивости вычислительного процесса до достижения граничных

значений решений. Таким образом, вопрос о выборе последовательности координатных функций не является тривиальным и успех использования вариационного метода при построении приближенного решения граничных задач в значительной мере зависит от этого выбора.

В одномерных задачах построение координатных функций можно осуществлять на классе степенных функций. Однако построенные таким образом приближения пригодны лишь для тех случаев, когда в разложениях Ритца можно обойтись небольшим числом членов. Иначе элементы алгебраической системы очень быстро возрастают по модулю и это существенно влияет на устойчивость вычислительного процесса. Определенных успехов можно достичь, если при аппроксимации искомых решений использовать полиномы Лежандра, модули которых не превышают единицу для любого аргумента. Это позволяет увеличить предельное значение числа N в три–четыре раза по отношению к степенному базису и тем самым расширить диапазон входных параметров задачи, при которых можно проводить расчеты с заданной точностью [17].

На скорость сходимости последовательности Ритца существенно влияет относительная толщина оболочки. Уменьшение ее приводит к тому, что рассматриваемая граничная задача переходит в разряд сингулярно возмущенных спектральных задач. Наличие малого параметра при старшей производной в разрешающей системе уравнений указывает на то, что искомые решения имеют одновременно как быстро, так и медленно изменяющиеся компоненты. Аппроксимация быстро изменяющейся компоненты решения полиномиальным базисом не приводит к желаемому результату и, таким образом, возникает принципиальный вопрос о расширении класса допустимых функций такими функциями, которые позволяли бы получать приближенные решения с одинаково высокой степенью точности как при наличии узкой зоны с большими градиентами в решениях, так и без нее. Указанная проблема относится к проблеме построения приближенных алгоритмов решения сингулярно возмущенных граничных задач, имеющих равномерную сходимость [6].

Одним из важных преимуществ метода Ритца является то обстоятельство, что он позволяет при построении приближенного решения учесть свойства искомых решений, которые можно установить на основе чисто качественного анализа рассматриваемой задачи. С другой стороны, методы малого параметра, помимо своего непосредственного назначения, могут служить основой для выяснения качественных особенностей задач. Поэтому с целью установления структуры решения задачи и характера его вырождения, когда параметр при старшей производной стремится к нулю, приведем формальные асимптотические разложения фундаментальной системы решений уравнений (3). Система дифференциальных уравнений (3) приводится к одному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами относительно неизвестной $w(s)$. Это уравнение можно представить в следующем виде:

$$\mu^{m-l}N(w) - M(w) = 0, \quad (10)$$

где

$$N(w) = \sum_{k=0}^m a_{m-k}(s) \frac{d^k w}{ds^k}, \quad M(w) = \sum_{k=0}^l b_{l-k}(s) \frac{d^k w}{ds^k}, \quad m > l.$$

Структура уравнения (10) вписывается в общую теорию дифференциальных уравне-

ний m -го порядка с малым параметром при старшей производной [1]. Обозначение малого параметра c^2 через μ^{m-l} используется далее лишь для удобства.

При $m = 8$ и $l = 4$ к этому уравнению сводится система уравнений, описывающая неосесимметричные колебания оболочки вращения при небольшом числе волн по параллели. Для случая осесимметричных колебаний оболочки имеем $m = 6$ и $l = 2$. Коэффициенты уравнения $a_i(s)$ и $b_i(s)$ являются действительными и дифференцируемыми функциями на конечном замкнутом интервале $s_1 \leq s \leq s_2$. Кроме того,

$$a_0(s) \equiv 1, \quad b_0(s) = \lambda - \frac{1 - \nu^2}{R_2^2}. \quad (11)$$

Явный вид остальных коэффициентов нам не понадобится, поскольку в дальнейшем нас будет интересовать только структура линейно независимых решений уравнения (10). Потребуем, чтобы

$$b_0(s) \neq 0, \quad b_0(s) < 0 \quad \text{при} \quad s_1 \leq s \leq s_2. \quad (12)$$

Первое условие исключает из рассмотрения точки поворота для рассматриваемого уравнения, а второе условие означает, что в дальнейшем будем рассматривать только низшую часть спектра оболочки.

Построим сначала l интегралов уравнения (10), используя для этой цели прямое разложение его решения по малому параметру:

$$w_j(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^{p(m-l)} w_{j,p}(s), \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (13)$$

Подставим этот ряд в уравнение (10) и приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ . Тогда для нулевого приближения получим однородное дифференциальное уравнение

$$M(w_{j,0}(s)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (14)$$

Очевидно, что функции $w_{j,0}(s)$ образуют фундаментальную систему решений для вырожденного дифференциального уравнения (10) при $\mu = 0$. Определение последующих функций $w_{j,p}(s)$ сводится к интегрированию этого же уравнения, правая часть которого содержит ранее найденные функции $w_{j,p-1}(s)$:

$$M(w_{j,p}(s)) = N(w_{j,p-1}(s)), \quad p = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Существенным свойством построенных таким образом первых l интегралов уравнения (10) является то, что каждый из них можно представить в виде ряда Тейлора в интервале $s_1 \leq s \leq s_2$.

Последующие $m-l$ интегралов будем искать в виде разложений, включающих в себя экспоненциальный множитель [1]:

$$w_{l+j}(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p w_{l+j,p}(s) \exp \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{s_0}^s \varphi_j(t) dt \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m-l. \quad (16)$$

Для определения функций $\varphi_j(s)$ и $w_{l+j,p}(s)$ подставим этот ряд в дифференциальное уравнение (10) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ . Коэффициент при μ^{-l} дает характеристическое уравнение для определения функций $\varphi_j(s)$:

$$(\varphi_j(s))^{m-l} - b_0(s) = 0, \quad (17)$$

откуда находим четыре ненулевых значения $\varphi_j(s)$. Располагая их в порядке возрастания действительных частей, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \frac{-1+i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, & \varphi_2(s) &= \frac{-1-i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, \\ \varphi_3(s) &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}, & \varphi_4(s) &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}|b_0|^{1/4}. \end{aligned} \quad (18)$$

По терминологии работы [3] вырождение исходной краевой задачи в задачу при $\mu \rightarrow 0$ является регулярным, поскольку уравнение (17) в рассматриваемом диапазоне частот свободных колебаний оболочки имеет корни, из которых два имеют отрицательную вещественную часть, а два — положительную. Коэффициент при μ^{-l+1} дает однородное линейное уравнение первого порядка для нахождения функций $w_{l+j,0}(s)$. В свою очередь коэффициент при μ^{-l+1+p} , $p = 1, 2, \dots$, приводит к решению этого же уравнения относительно функций $w_{l+j,p}(s)$, но с правыми частями, которые линейно зависят от предыдущих функций $w_{l+j,k}(s)$, $k < p$, и их производных. Структура этих уравнений и аналитические свойства их коэффициентов позволяют сделать заключение, что все функции $w_{l+j,p}(s)$ представимы в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точек $s = s_1$ и $s = s_2$.

В представлении интегралов (16) при $j = 1, 2$ положим $s_0 = s_1$, а при $j = 3, 4$ — $s_0 = s_2$ и отделим в этих интегралах их вещественную и мнимую части. При этом для экспоненциального множителя получим выражения

$$e^{\beta_k(s)} \cos \beta_k(s), \quad e^{\beta_k(s)} \sin \beta_k(s), \quad \beta_k(s) = \frac{(-1)^k}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_k}^s |b_0(t)|^{1/4} dt, \quad k = 1, 2. \quad (19)$$

Исходя из этого, можно сделать вывод, что первые два интеграла (16) локализованы в окрестности точки $s = s_1$, тогда как остальные два интеграла — в окрестности точки $s = s_2$. Иными словами, их вклад в общее решение уравнения (10) существен только вблизи одного из краев оболочки на расстояниях $|s - s_k|$, $k = 1, 2$, порядка $O(\mu)$ от края.

Для большинства оболочек вращения интеграл, входящий в выражение для $\beta_k(s)$, не вычисляется в элементарных функциях. В этом случае интегралы с большой изменчивостью можно представить в другой форме, которая является более удобной для их построения. Как показано в работе [3], интегралы (16), у которых $\operatorname{Re} \varphi_j(s) < 0$, можно представить в виде

$$w_{l+j}(s, \mu) = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^p P_j^{(p)}(\tau) \exp\{\varphi_j(s_1)\tau\}, \quad \tau = \frac{s - s_1}{\mu}, \quad (20)$$

где $P_j^{(p)}(\tau)$ — полином по τ степени не выше $2p$ с постоянными коэффициентами, зависящими от коэффициентов уравнений $a_i(s)$ и $b_i(s)$ и их производных в точке $s = s_1$.

Аналогичное представление интегралов имеет место и в окрестности точки $s = s_2$ при $\operatorname{Re} \varphi_j(s) > 0$. Эти полиномы в литературе получили название полиномов Вишика — Люстерника.

Структура интегралов с большой изменяемостью для функций $u(s, \mu)$ и $v(s, \mu)$ совпадает со структурой интегралов для функции $w(s, \mu)$ с тем лишь отличием, что в разложениях типа (16) появляется постоянный множитель, зависящий от параметра μ [8].

Построение интегралов (13) с медленной изменяемостью, как правило, осуществляется с помощью стандартных численных методов интегрирования соответствующей последовательности уравнений. Явные выражения для интегралов с большой изменяемостью для ряда оболочек (в том числе с учетом точек поворота) для нулевого и первого приближений построены в работах Н. А. Алумяэ [18], Г. И. Пшеничнова [19, 20], П. Е. Товстика [8, 21] и других авторов.

После того, как построены все линейно независимые решения системы уравнений (3), ее общее решение можно представить в виде

$$u(s) = \sum_{n=1}^m c_n u_n(s), \quad v(s) = \sum_{n=1}^m c_n v_n(s), \quad w(s) = \sum_{n=1}^m c_n w_n(s), \quad (21)$$

где c_n — произвольные постоянные.

Подставляя (21) в граничные условия задачи, получаем однородную алгебраическую систему уравнений m -го порядка относительно постоянных c_n . Равенство нулю определителя дает уравнение для определения частотного параметра λ . В этом состоит суть решения рассматриваемой спектральной задачи на основе асимптотического метода. Метод последовательных приближений для решения сингулярно возмущенных задач развит в работе М. И. Вишика и Л. Н. Люстерника [3].

Приведенные выше результаты дают возможность сформулировать основные принципы построения координатных функций при решении рассматриваемой задачи вариационным методом в условиях ее сингулярного возмущения.

Учитывая установленную выше регулярность функций $w_{j,p}(s)$, $j = 1, 2, \dots, m$, $p = 0, 1, \dots$, в разложениях (13) и (16), их можно представить в виде соответствующих рядов Тейлора на замкнутом интервале $s_1 \leq s \leq s_2$ с неизвестными коэффициентами. Тогда общее решение для функций $u(s)$, $v(s)$ и $w(s)$ после перегруппировки членов в выражениях (21) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} f(s) = & \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,0} s^i + e^{\beta_1(s)} \cos \beta_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,1} (s - s_1)^i + e^{\beta_1(s)} \sin \beta_1(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,2} (s - s_1)^i + \\ & + e^{\beta_2(s)} \cos \beta_2(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,3} (s - s_2)^i + e^{\beta_2(s)} \sin \beta_2(s) \sum_{i=0}^{\infty} f_{i,4} (s - s_1)^i, \end{aligned} \quad (22)$$

где $f_{i,j}$ — неопределенные постоянные, зависящие от параметра μ , а под функцией $f(s)$ будем понимать любую из неизвестных функций $u(s)$, $v(s)$ и $w(s)$ с соответствующими для них коэффициентами разложений.

В соответствии с изложенным выше общие решения (22) необходимо подчинить главным граничным условиям рассматриваемой задачи на собственные значения. Исходя из этих условий, находим дополнительные соотношения между некоторыми коэффициентами в представлении (22). Подставляя эти соотношения в общий вид решений для функций $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$ и собирая члены при одинаковых коэффициентах, получаем наборы координатных функций для аппроксимации искомых решений. При этом следует учитывать то обстоятельство, что второе и третье слагаемые в (22) заметно отличаются от нуля лишь в окрестности точки $s = s_1$, тогда как четвертое и пятое слагаемые — в окрестности точки $s = s_2$. Поэтому взаимным влиянием этих двух групп слагаемых при выводе координатных функций будем пренебрегать, совершая при этом малую погрешность порядка

$$\exp \left\{ -\frac{1}{\mu\sqrt{2}} \int_{s_1}^{s_2} |b_0(t)|^{1/4} dt \right\}. \quad (23)$$

Для получения наиболее простых соотношений между коэффициентами в выражениях (22) при выполнении граничных условий первую сумму, не нарушая общности, можно представлять в виде разложений по степеням $s - s_1$ или по степеням $s - s_2$. Полученный при этом степенной базис с некоторой весовой функцией можно представить в виде произведения этой весовой функции на полиномы Лежандра, модули которых не возрастают с ростом порядка полинома. С целью понижения влияния ошибок округления элементов алгебраической системы (9) на точность ее решения необходимо также провести определенную нормировку координатных функций, локализованных в окрестности точек $s = s_1$ и $s = s_2$.

Для тех форм меридиана оболочки, для которых явное вычисление интеграла, входящего в выражение для $\beta_k(s)$, не представляется возможным, построение систем координатных функций должно осуществляться на основе представления интегралов с большой изменчивостью в форме (20).

Оценку эффективности аппроксимации искомых решений с помощью построенных таким образом систем базисных функций ниже приведем на задаче о свободных колебаниях цилиндрической оболочки, которая имеет точное решение [22].

4. Решение задачи о свободных колебаниях цилиндрической оболочки. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку средней длины l . В качестве характерного линейного размера оболочки выберем ее радиус R_0 . С длиной меридиана s свяжем продольную координату z . В дальнейшем будем предполагать, что один край оболочки при $z = 0$ свободен от закрепления, а другой край при $z = l$ жестко закреплен.

Введем в рассмотрение дифференциальные выражения вида

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p, q) &= \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz} + \nu_1 n^2 p q, & \Psi_{12}(p, q) &= \nu n p \frac{dq}{dz} - \nu_1 n \frac{dp}{dz} q, \\ \Psi_{13}(p, q) &= -\nu p \frac{dq}{dz}, & \Psi_{23}(p, q) &= n p q, & \Psi_{22}(p, q) &= n^2 p q + \nu_1 \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz}, \\ \Psi_{33}(p, q) &= p q + c^2 \left[\left(\frac{d^2 p}{dz^2} - \nu n^2 p \right) \frac{d^2 q}{dz^2} + \left(n^4 p - \nu n^2 \frac{d^2 p}{dz^2} \right) q + 2(1 - \nu) n^2 \frac{dp}{dz} \frac{dq}{dz} \right], \end{aligned}$$

где $\nu_1 = (1 - \nu)/2$, p и q — произвольные функции.

Тогда элементы матриц A и B алгебраической системы [9], которые расположены на главной диагонали и выше ее, будут вычисляться по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} &= \int_0^l \Psi_{11}(U_j, U_i) dz, & a_{i,j+N} &= \int_0^l \Psi_{12}(V_j, U_i) dz, & a_{i,j+2N} &= \int_0^l \Psi_{13}(W_j, U_i) dz, \\
 a_{i+N,j+N} &= \int_0^l \Psi_{22}(V_j, V_i) dz, & a_{i+N,j+2N} &= \int_0^l \Psi_{23}(W_j, V_i) dz, \\
 a_{i+2N,j+2N} &= \int_0^l \Psi_{33}(W_j, W_i) dz, & b_{i,j} &= \int_0^l U_i U_j dz, & b_{i+N,j+N} &= \int_0^l V_i V_j dz, \\
 b_{i+2N,j+2N} &= \int_0^l W_i W_j dz, & b_{i,j+N} &= b_{i,j+2N} = b_{i+N,j+2N} = 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь координатные функции $U_i(z)$, $V_i(z)$ и $W_i(z)$ должны быть подчинены главным граничным условиям (5).

В результате применения описанной выше процедуры система базисных функций для аппроксимации функции $w(z)$ будет иметь структуру

$$\begin{aligned}
 \{W_i\}_{i=1}^N &= \{W_1, \dots, W_m; W_{m+1}, \dots, W_{m+m_p}; W_{m+m_p+1}, \dots, W_{m+2m_p}; \\
 &W_{m+2m_p+1}, \dots, W_{m+3m_p}; W_{m+3m_p+1}, \dots, W_{m+4m_p}\}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

В выражении (25) выделены пять групп функций, которые отделены друг от друга точкой с запятой. Первая группа из m функций представляет собою регулярный базис, образованный из полиномов Лежандра с определенной весовой функцией. Вторая и третья группы функций связаны с наличием погранслоя в окрестности точки $z = 0$, а четвертая и пятая группы функций — в окрестности точки $z = l$. Количество функций в этих группах обозначено через m_p . Аналогичную структуру имеют и координатные функции для аппроксимации решений $u(z)$ и $v(z)$. Поскольку главные граничные условия для функций $u(z)$ и $v(z)$ имеют одинаковый вид, то $V_i = U_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned}
 g_c^{(1)}(z) &= e^{-pz} \cos pz, & g_s^{(1)}(z) &= e^{-pz} \sin pz, & g_c^{(2)}(z) &= e^{p(z-l)} \cos p(z-l), \\
 g_s^{(2)}(z) &= e^{p(z-l)} \sin p(z-l), & p &= p(\lambda) = (1 - \nu^2 - \lambda)^{1/4} / (\mu\sqrt{2}).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда явные выражения для координатных функций U_j и W_j будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 U_j &= \frac{z-l}{l} P_j \left(\frac{2z}{l} - 1 \right), \quad W_j = \left(\frac{z-l}{l} \right)^2 P_j \left(\frac{2z}{l} - 1 \right), \quad j = 1, 2, \dots, m, \\
 U_{m+j} &= W_{m+j} = g_c^{(1)}(z) z^{(j-1)} N_j, \quad U_{m+m_p+j} = W_{m+m_p+j} = g_s^{(1)}(z) z^{(j-1)} N_j, \\
 & \quad j = 1, 2, \dots, m_p, \\
 U_{m+2m_p+1} &= g_c^{(2)}(z) - 1, \quad U_{m+2m_p+2} = (z-l) g_c^{(2)}(z) N_2, \quad U_{m+3m_p+1} = g_s^{(2)}(z) N_1, \\
 & \quad (27) \\
 U_{m+3m_p+2} &= W_{m+3m_p+2} = (z-l) g_s^{(2)}(z) N_2, \quad W_{m+2m_p+1} = \frac{g_c^{(2)}(z) - 1 - p(z-l)}{pl}, \\
 W_{m+2m_p+2} &= (z-l) (g_c^{(2)}(z) - 1), \quad W_{m+3m_p+1} = \frac{g_s^{(2)}(z) - p(z-l)}{pl}, \\
 U_{m+2m_p+j} &= W_{m+2m_p+j} = (z-l)^{(j-1)} g_c^{(2)}(z) N_j, \\
 U_{m+3m_p+j} &= W_{m+3m_p+j} = (z-l)^{(j-1)} g_s^{(2)}(z) N_j, \quad j = 3, 4, \dots, m_p.
 \end{aligned}$$

Здесь $P_j(z)$ — смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра, вычисление которых можно проводить с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
 P_{j+2} &= \frac{1}{j+1} [(2j+1)zP_{j+1}(z) - jP_j(z)], \\
 & \quad (28) \\
 P_1(z) &= 1, \quad P_2(z) = z, \quad j = 1, 2, \dots, m-2.
 \end{aligned}$$

Нормировочные коэффициенты N_j в формуле (27) выбирались из условия близости к единице диагональных элементов матрицы B , включающих в себя координатные функции с экспоненциальными множителями. При таком способе выбора коэффициентов N_j наибольшие и сравнимые с единицей элементы матриц A и B будут расположены на их главных диагоналях, что способствует повышению точности решения алгебраической системы (9). Значения нормировочных коэффициентов определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 N_j &= \frac{1}{\sqrt{I_j}}, \quad I_j = \int_0^l (z-l)^{2(j-1)} e^{2p(z-l)} dz \approx \int_0^l z^{2(j-1)} e^{-2pz} dz \approx \frac{(2j-2)!}{(2p)^{2j-1}}, \\
 & \quad (29) \\
 & \quad j = 1, 2, \dots, m_p.
 \end{aligned}$$

Соответствующие элементы матрицы B ограничены сверху интегралами I_j , при вычислении которых пренебрегалось малой величиной порядка $\exp(-2pl)$.

Следует заметить, что регулярная часть базиса (25) совпадает с базисом, который ранее применялся при решении методом Ритца аналогичной задачи при средних значениях малого параметра μ [17].

Определенные неудобства при решении рассматриваемой задачи на собственные значения доставляет тот факт, что, как и следовало ожидать, в показатель изменчивости координатных функций, связанных с наличием краевых эффектов, входит параметр λ , который заранее неизвестен. Это приводит к необходимости организации итерационного процесса последовательных приближений по параметру λ для нахождения его минимального значения, что определенным образом усложняет алгоритм решения задачи. Этого процесса можно избежать, если найти такое приближенное значение $\tilde{\lambda}$, которое отличается от истинного значения λ на малую величину порядка μ . Поскольку параметр λ является интегральной характеристикой задачи, его вычисление с достаточной степенью точности можно провести на основе использования лишь регулярной части базиса даже в условиях сингулярного возмущения задачи. При этом неточность вычисления λ в выражении для p в формулах (26) будет компенсироваться количеством m_p членов для соответствующих решений с высокими градиентами. Получение начального значения параметра λ можно осуществить в рамках единой программы для ПЭВМ, положив в ней параметр m_p равным нулю.

5. Численные результаты. Приведем некоторые результаты расчета частот и форм собственных колебаний рассматриваемой цилиндрической оболочки по предложенному выше алгоритму. Во всех расчетах полагалось, что безразмерная длина оболочки равна 2, а коэффициент Пуассона равен 0,3. Отношение радиуса оболочки к ее толщине обозначим через δ .

Таблица 1

m	ω_i	w_i	w_i'	w_i''	$-w_i'''$
$i = 1$					
4	0,274757470	0,13284117	-0,3780437	0,070326	304,926
6	0,274757291	0,13281398	-0,3786006	0,126137	303,671
8	0,274757291	0,13281411	-0,3785960	0,125836	303,682
10	0,274757291	0,13281411	-0,3785960	0,125836	303,682
12	0,274757291	0,13281411	-0,3785960	0,125836	303,682
$i = 2$					
4	0,707898061	-0,02092539	2,219538	-6,18506	770,432
6	0,707797155	-0,02067484	2,195217	-5,57440	752,321
8	0,707797069	-0,02068875	2,196036	-5,59275	753,238
10	0,707797069	-0,02068857	2,196024	-5,59261	753,217
12	0,707797069	-0,02068857	2,196024	-5,59261	753,217
$i = 3$					
6	0,851573131	1,77506787	-7,110491	-186,394	6042,70
8	0,851566298	1,77441040	-7,129094	-184,507	6040,75
10	0,851566289	1,77441107	-7,128133	-184,563	6041,99
12	0,851566289	1,77441117	-7,128156	-184,563	6041,95
14	0,851566289	1,77441112	-7,128152	-184,563	6041,95

В табл. 1 приведены результаты вычисления при $\delta = 1000$ первых трех безразмерных частот $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, функций $w_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, и их производных в точке $z = 1, 9$ при изгибных колебаниях оболочки ($n = 1$) в зависимости от количества членов m в регулярном базисе. Для аппроксимации компонент решений с большими градиентами, локализованными в окрестностях точек $z = 0$ и $z = 2$, было использовано по две координатные функции ($m_p = 2$). В таблице приведено такое количество знаков в рассчитываемых

величинах, которые не изменяются с увеличением числа m_p . Полученные данные свидетельствуют о равномерной сходимости решений и их первых трех производных к соответствующим значениям точного решения задачи. Аналогичная сходимость наблюдается и в других точках интервала $0 \leq z \leq 2$, что позволяет определять значения усилий, моментов и перерезывающих сил во всех точках срединной поверхности оболочки.

Скорость сходимости рассчитываемых величин к их предельным значениям, как и следовало ожидать, является неодинаковой. Так, для низшей частоты первые девять знаков стабилизируются, начиная с $m = 6$, тогда как для третьей производной при этом же значении m стабилизируется лишь четыре значащие цифры. При увеличении номера формы колебаний наблюдается некоторое замедление сходимости последовательностей Рунге. Однако для третьей формы колебаний достаточно положить $m = 14$, чтобы достичь той же точности вычисления рассчитываемых величин, которая имеется для первой формы колебаний при $m = 8$.

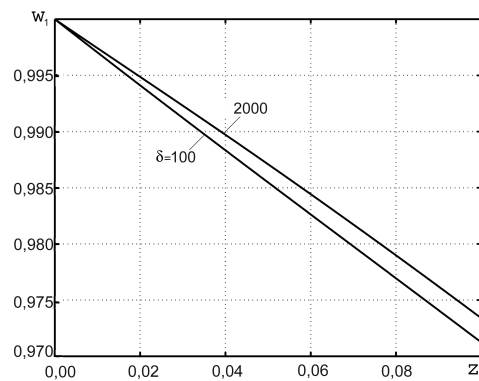
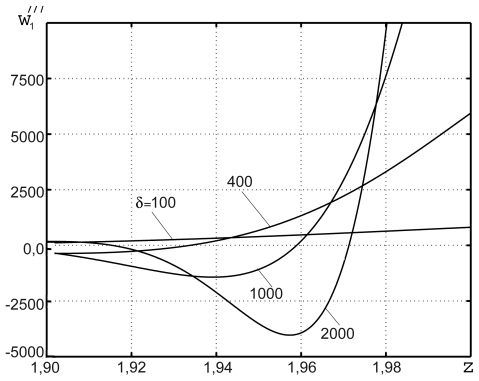
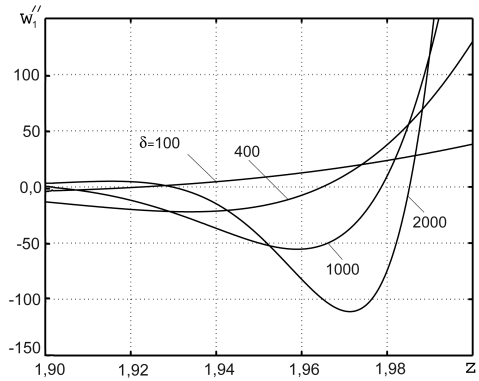
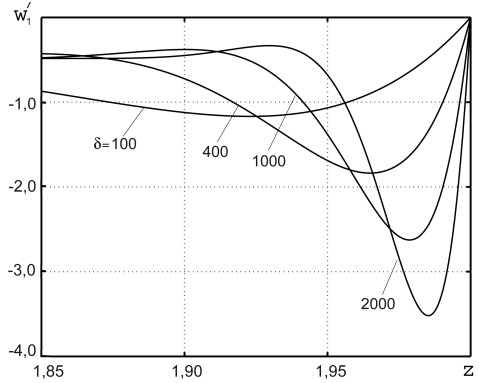
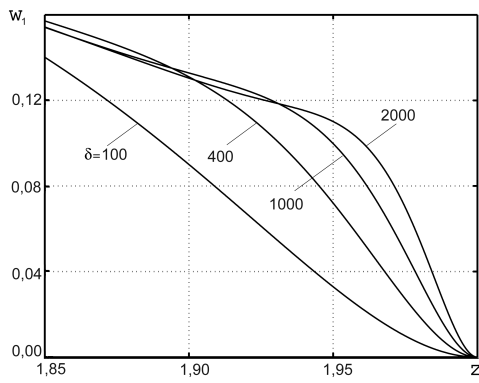
Получение аналогичных результатов для первой формы колебаний оболочки с использованием только регулярного базиса возможно при $m = 50$. Это можно объяснить тем обстоятельством, что точные решения, которые включают в себя экспоненты с большими аргументами, плохо представляются в виде рядов Тейлора. При дальнейшем уменьшении относительной толщины оболочки использование регулярного базиса для получения решений рассматриваемого качества становится неэффективным, поскольку наступает потеря устойчивости счета до достижения предельных значений рассчитываемых величин.

Таблица 2

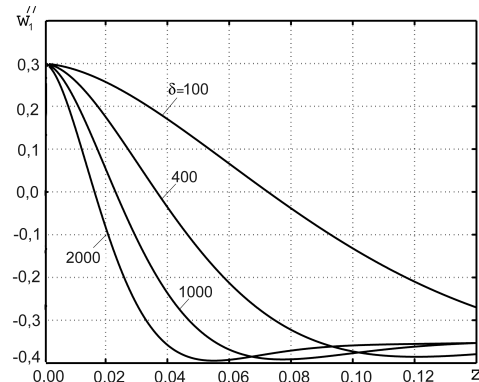
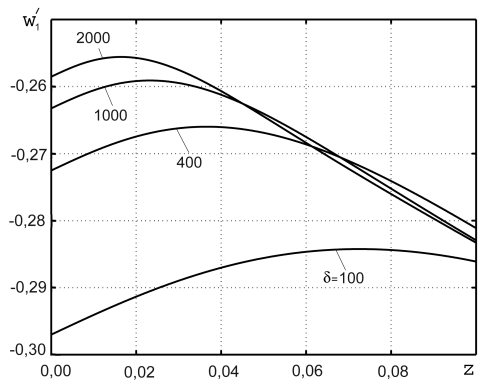
m	ω_1	w_1	$-w_1'$	w_1''	w_1'''
$\delta = 100$					
4	0,275418500	0,09004540	1,1217103	-3,630205	108,688
6	0,275418486	0,09004761	1,1217452	-3,632626	108,729
8	0,275418486	0,09004759	1,1217453	-3,632605	108,729
10	0,275418486	0,09004759	1,1217454	-3,632605	108,729
12	0,275418486	0,09004759	1,1217454	-3,632603	108,729
$\delta = 2000$					
4	0,274692751	0,13040219	0,4471844	3,069208	170,676
6	0,274692513	0,13040613	0,4491070	3,064162	173,447
8	0,274692513	0,13040606	0,4490949	3,064322	173,428
10	0,274692513	0,13040606	0,4490950	3,064320	173,429
12	0,274692513	0,13040606	0,4490950	3,064320	173,429

В табл. 2 приведены аналогичные данные в точке $z = 1,9$ для первой формы изгибных колебаний оболочки, полученные при $n = 1$, $m_2 = 2$, $\delta = 100$ и $\delta = 2000$, в зависимости от количества членов m в регулярном базисе. Сопоставляя эти результаты, можно сделать вывод, что предложенный алгоритм решения рассматриваемой задачи имеет одинаковую эффективность как при средних, так и при малых значениях параметра при старшей производной в исходных уравнениях.

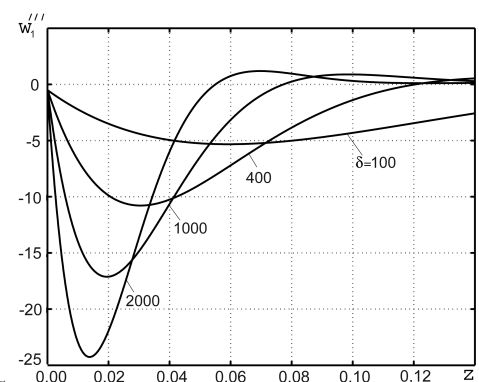
Следует также заметить, что поскольку сама исходная система уравнений (3) является неточной, то нет необходимости проводить вычисления с высокой степенью точности. Приведенное количество значащих цифр для рассчитываемых величин в таблицах 1 и 2 иллюстрирует лишь возможности предлагаемого способа построения приближенного решения спектральной задачи. Ограничиваясь в практических расчетах реальной



a



b



Поведение функции $w(z)$ и ее первых трех производных в окрестности заземленного (а) и свободного (б) края оболочки.

точностью вычислений, можно существенно уменьшить порядок решаемой алгебраической системы.

На рисунке показано поведение функции $w_1(z)$ и ее первых трех производных в окрестностях граничных точек $z = 2$ и $z = 0$ соответственно. Приведенные рисунки иллюстрируют возникновение и развитие зоны больших изменений этих функций по мере изменения толщины оболочки от средних до малых значений. С уменьшением толщины оболочки изменчивость функции и ее производных увеличивается с одновременным уменьшением области этих изменений. При этом чем выше порядок производной, тем большие значения она принимает. Так, максимальные значения второй и третьей производной у заземленного края оболочки при $\delta = 1000$ и $\delta = 2000$ соответственно равны $w''(2) = 302,928$; $w'''(2) = 22668,8$ и $w''(2) = 584,784$; $w'''(2) = 62938,6$.

Аналогичная картина поведения производных от функции $w_1(z)$ наблюдается и в окрестности свободного края оболочки с тем лишь отличием, что их максимальные значения значительно меньше максимальных значений в окрестности заземленного края оболочки.

Заключение. Предложенные в работе системы координатных функций для решения вариационным методом спектральной краевой задачи о свободных колебаниях оболочки вращения обеспечивают при небольшой размерности алгебраических систем равномерную сходимость решений и их первых трех производных во всех точках области интегрирования разрешающих уравнений.

Разработанный алгоритм решения рассматриваемой задачи имеет одинаковую скорость сходимости как при средних, так и при малых значениях относительной толщины оболочки. В области тех значений параметра при старшей производной в уравнениях, когда возможно применение регулярного базиса на основе полиномов Лежандра, использование предложенных систем координатных функций приводит к понижению в два – три раза порядка решаемых алгебраических систем.

Аналогичный подход построения приближенных аналитических решений может быть использован и при решении нелинейных задач теории оболочек вращения.

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, вып. 5(77). — С. 3–122.
4. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1954. — 286 с.
5. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1966. — 248 с.
6. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983. — 200 с.
7. Боглаев Ю. П., Станилевский А. А. Обзор библиографии по численным методам решения сингулярно возмущенных задач. — М., 1984. — 48 с. — (Препринт/АН СССР, Ин-т физики твердого тела).
8. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979. — 384 с.
9. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1961. — **16**, вып. 3(99). — С. 171–174.

10. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. — Киев: Наук. думка, 1986. — 172 с.
11. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мясченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. — М.: Машиностроение, 1975. — 374 с.
12. Троценко В. А. Применение вариационного метода для решения нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи статики высокоэластичных мембран // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1996. — № 4. — С. 168–180.
13. Асланян А. Г., Лидский В. Б. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1974. — 156 с.
14. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. — М.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.
15. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968. — 504 с.
16. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977. — 456 с.
17. Троценко В. А., Троценко Ю. В. Методы расчета собственных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом // Нелінійні коливання. — 2004. — 7, № 2. — С. 263–285.
18. Алумяэ Н. А. О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметричных установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения // Изв. АН ЭССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук. — 1960. — 10, № 1. — С. 3–15.
19. Пшеничников Г. И. Малые свободные колебания упругих оболочек вращения // Инж. журн. — 1965. — 5, вып. 4. — С. 685–690.
20. Пшеничников Г. И. Свободные осесимметричные колебания оболочки вращения // Инж. журн. Механика твердого тела. — 1967. — № 4. — С. 124–135.
21. Товстик П. Е. Низкочастотные колебания выпуклой оболочки вращения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1975. — № 6. — С. 110–116.
22. Швейко Ю. Ю., Гаврилов Ю. В., Брусиловский А. Д. О влиянии граничных условий на спектр собственных частот цилиндрической оболочки // Докл. науч.-техн. конф. Моск. энергет. ин-та. — 1965. — С. 131–148.

Получено 21.06.2005