УДК 517.9

НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З КВАЗІНІЛЬПОТЕНТНИМ ОПЕРАТОРОМ ТА НЕСТІЙКИМ НУЛЬОВИМ РОЗВ'ЯЗКОМ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@USUWM.rv.ua

В. І. Сукретний

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

Let E be a Banach space. The instability of ordinary solution for differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)Ax, \quad t \geq 0,$$

are proved. Here $f : [0,+\infty) \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ is the continuous map, for which $\inf\limits_{t\geq 0,\ x\in E} f(t,x) > 0$, $\sup\limits_{t\geq 0,\ x\in E} f(t,x) < +\infty$, and $A \in L(E,E) \setminus \{O\}$, $\sigma(A) = \{0\}$.

Нехай E — банахів простір. Доведено нестійкість тривіального розв'язку диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)Ax, \quad t \geq 0,$$

де $f : [0,+\infty) \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ — неперервне відображення, для якого $\inf\limits_{t\geq 0,\ x\in E} f(t,x) > 0$, $\sup\limits_{t\geq 0,\ x\in E} f(t,x) < +\infty$ і $A \in L(E,E) \setminus \{O\}$, $\sigma(A) = \{0\}$.

У даній роботі виділено один клас диференціальних рівнянь із нелінійним квазінільпотентним оператором, нульові розв'язки яких є нестійкими за Ляпуновим.

1. Основний об'єкт дослідження. Розглянемо довільні банахів простір E та неперервне відображення $f : [0,+\infty) \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, для якого

$$\inf_{(t,x)\in[0,+\infty)\times E} f(t,x) > 0 \tag{1}$$

і

$$\sup_{(t,x)\in[0,+\infty)\times E} f(t,x) < +\infty. \tag{2}$$

Розглянемо також диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)Ax, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

де A — лінійний неперервний оператор.

Будемо вимагати, щоб для кожного вектора $a \in E$ це рівняння мало хоча б один розв'язок $x(t, a)$, що задовольняє початкову умову

$$x(0, a) = a. \tag{4}$$

Ця вимога виконується, якщо, наприклад, для деякої монотонно зростаючої функції $L : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ справджується співвідношення

$$\sup_{t\in[0,+\infty),\ \|x\|\le r,\ \|y\|\le r,\ x\ne y} \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{\|x - y\|} \le L(r) \tag{5}$$

для всіх $r > 0$. На підставі співвідношень (2) і (5) для кожного $r > 0$ для правої частини рівняння (3) має місце співвідношення

$$\sup_{t\in[0,+\infty),\ \|x\|\le r,\ \|y\|\le r,\ x\ne y} \frac{\|f(t,x)Ax - f(t,y)Ay\|}{\|x - y\|} \le M(r),$$

де

$$M(r) = \sup_{(t,u)\in[0,+\infty)\times E} f(t,u)\|A\| + L(r)r\|A\|.$$

Тому завдяки відомим твердженням про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь (див., наприклад, [1]) задача (3), (4) для кожного вектора $a \in E$ має єдиний розв'язок. Зокрема, якщо $a = 0$, то розв'язок задачі (3), (4) є нульовим.

Далі будемо вважати, що A — ненульовий квазінільпотентний оператор.

Покажемо, що нульовий розв'язок рівняння (3) є нестійким.

2. Необмеженість на $\mathbb{N}$ експоненти e^{tA} з ненульовим квазінільпотентним оператором A. Спочатку розглянемо поведінку розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Для кожного ненульового оператора $A \in L(E, E)$ з нульовим спектральним радіусом справджується співвідношення*

$$\sup_{t\in\mathbb{N}} \left\|e^{tA}\right\| = +\infty. \tag{6}$$

Доведення. Якщо A є нільпотентним оператором, а число m — індексом нільпотентності [2] цього оператора, то e^{tA} подається у вигляді

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}A^{m-1}.$$

Тому для кожного $t \ge 0$

$$\left\|e^{tA}\right\| = \left\|I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}A^{m-1}\right\| \ge \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\left\|A^{m-1}\right\| - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{t^k}{k!}\left\|A^k\right\|.$$

Оскільки $\left\|A^{m-1}\right\| > 0$, то

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\left\|A^{m-1}\right\| - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{t^k}{k!}\left\|A^k\right\|\right) = +\infty.$$

Тому виконується співвідношення (6).

Тепер розглянемо випадок, коли A є квазінільпотентним оператором і $A^n \neq O$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Виберемо довільний нормований вектор $a \in E$ ($\|a\| = 1$), для якого $Aa \neq 0$. Розглянемо векторну послідовність

$$a, Aa, \ldots, A^n a, \ldots.$$

Можливі два випадки: 1) для деякого $m \in \mathbb{N}$ вектори $a, Aa, \ldots, A^m a$ є лінійно залежними; 2) для кожного $n \in \mathbb{N}$ вектори $a, Aa, \ldots, A^n a$ є лінійно незалежними.

Розглянемо перший випадок. Нехай $L[a, Aa, \ldots, A^m a]$ — векторний підпростір простору E, породжений векторами $a, Aa, \ldots, A^m a$. З лінійної залежності векторів $a, Aa, \ldots, A^m a$ випливає, що $L[a, Aa, \ldots, A^m a]$ є інваріантним підпростором щодо оператора A. Тому завдяки квазінільпотентності цього оператора його звуження на $L[a, Aa, \ldots, A^m a]$ є нільпотентним оператором з індексом нільпотентності

$$\mu \leq \dim L[a, Aa, \ldots, A^m a].$$

Звідси випливає, що для кожного $t \geq 0$

$$e^{tA}a = \left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}A^{\mu-1}\right)a.$$

Оскільки, очевидно, для всіх $t \geq 0$

$$\left\|e^{tA}a\right\| \geq \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\left\|A^{\mu-1}a\right\| - \sum_{k=0}^{\mu-2}\frac{t^k}{k!}\left\|A^k\right\|,$$

$$\mu \geq 2,$$

і

$$\left\|A^{\mu-1}a\right\| \neq 0,$$

то

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|e^{tA}a\right\| = +\infty.$$

Тому справджується співвідношення (6).

Розглянемо другий випадок. На підставі квазінільпотентності оператора A справджується співвідношення

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\|A^n\|}{\varepsilon^n} = 0 \tag{7}$$

для кожного числа $\varepsilon > 0$.

Зафіксуємо довільне досить мале число $\varepsilon > 0$. Завдяки (7) існує таке натуральне число n_ε, що

$$\frac{\|A^n\|}{\varepsilon^n} \leq 1 \quad \text{для всіх} \quad n \geq n_\varepsilon. \tag{8}$$

Нехай $L[a, Aa, \ldots, A^{n_\varepsilon}a]$ і $L[a, A^2a, A^3a, \ldots, A^{n_\varepsilon}a]$ — векторні підпростори простору E, породжені відповідно множинами $\{a, Aa, \ldots, A^{n_\varepsilon}a\}$ і $\{a, A^2a, A^3a, \ldots, A^{n_\varepsilon}a\}$, l_{n_ε} — лінійний функціонал на $L[a, Aa, \ldots, A^{n_\varepsilon}a]$, для якого

$$l_{n_\varepsilon}(Aa) = \|Aa\|$$

і

$$l_{n_\varepsilon}(x) = 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in L[a, A^2a, A^3a, \ldots, A^{n_\varepsilon}a].$$

Очевидно, що норма розглянутого функціонала дорівнює 1. Далі розглянемо лінійне продовження $\breve{l}_{n_\varepsilon}$ функціонала l_{n_ε} на E, норма якого дорівнює 1. Функціонал $\breve{l}_{n_\varepsilon}$ з такими властивостями існує на підставі теореми Гана – Банаха про продовження лінійного функціонала [3, 4]. Застосовуючи $\breve{l}_{n_\varepsilon}$ до $e^{\varepsilon^{-1}A}a$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\breve{l}_{n_\varepsilon}\left(e^{\varepsilon^{-1}A}a\right) &= \breve{l}_{n_\varepsilon}\left(\left(\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\frac{\varepsilon^{-k}}{k!}A^k + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-k}}{k!}A^k\right)a\right) = \\
&= \breve{l}_{n_\varepsilon}\left(\left(\sum_{k=0}^{n_\varepsilon}\frac{\varepsilon^{-k}}{k!}A^k\right)a\right) + \breve{l}_{n_\varepsilon}\left(\left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-k}}{k!}A^k\right)a\right) = \\
&= \breve{l}_{n_\varepsilon}\left(\varepsilon^{-1}Aa\right) + \breve{l}_{n_\varepsilon}\left(\left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-k}}{k!}A^k\right)a\right) = \\
&= \varepsilon^{-1}\|Aa\| + \breve{l}_{n_\varepsilon}\left(\left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-k}}{k!}A^k\right)a\right).
\end{aligned}$$

Тому завдяки (8)

$$\begin{aligned}
\left|\breve{l}_{n_\varepsilon}\left(e^{\varepsilon^{-1}A}a\right)\right| &\geq \varepsilon^{-1}\|Aa\| - \left|\breve{l}_{n_\varepsilon}\left(\left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{\varepsilon^{-k}}{k!}A^k\right)a\right)\right| \geq \\
&\geq \varepsilon^{-1}\|Aa\| - \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \geq \\
&\geq \varepsilon^{-1}\|Aa\| - \frac{1}{(n_\varepsilon+1)!}\left(1 + \frac{1}{n_\varepsilon+1} + \frac{1}{(n_\varepsilon+1)^2} + \ldots\right) = \\
&= \varepsilon^{-1}\|Aa\| - \frac{1}{n_\varepsilon! n_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\|\breve{l}_{n_\varepsilon}\| = 1$, то

$$\left\|e^{\varepsilon^{-1}A}\right\| \geq \left|\breve{l}_{n_\varepsilon}\left(e^{\varepsilon^{-1}A}a\right)\right|.$$

Тому

$$\left\|e^{\varepsilon^{-1}A}\right\| \geq \varepsilon^{-1}\|Aa\| - \frac{1}{n_\varepsilon! n_\varepsilon}.$$

Із цієї нерівності та довільності вибору числа ε (зазначимо, що $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} n_\varepsilon = +\infty$) отримуємо (6).

Теорему доведено.

Дискретним аналогом теореми 1 є наступне твердження.

Теорема 2. *Для кожного ненульового оператора $A \in L(E, E)$ з нульовим спектральним радіусом справджується співвідношення*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|(I + A)^n\| = +\infty. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки спектральний радіус $r(A)$ оператора A дорівнює 0, то операторний ряд

$$A - \frac{1}{2}A^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}A^n + \ldots$$

збігається і сумою цього ряду є оператор $\ln(I + A)$. Тому

$$(I + A)^n = e^{n\ln(I+A)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

і для обґрунтування твердження теореми можна використати теорему 1.

Покажемо, що оператор $\ln(I + A)$ задовольняє умови теореми 1.

За теоремою Данфорда про відображення спектра [5]

$$\sigma(\ln(I + A)) = \{0\}.$$

Тут використано рівність

$$\ln(I + A) = A - \frac{1}{2}A^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}A^n + \ldots.$$

Тому

$$r(\ln(I + A)) = 0.$$

Також

$$\ln(I + A) \neq O.$$

Справді, якщо $\ln(I + A) = O$, то $I + A = e^{\ln(I+A)} = e^O = I$ і $A = O$, що неможливо.

Отже, оператор $\ln(I + A)$ задовольняє умови теореми 1. Тому на підставі (10) справджується співвідношення (9).

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що теореми 1 і 2 та їх застосування до дослідження стійкості розв'язків лінійних еволюційних рівнянь наведено в [6].

3. Дослідження рівняння (3) у випадку $f(t,x) \equiv \mathrm{const}$. Якщо

$$f(t,x) \equiv c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{11}$$

то рівняння (3) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = cAx, \quad t \geq 0, \tag{12}$$

і є лінійним рівнянням, причому ненульовий оператор cA є квазінільпотентним. Тому за теоремою 1

$$\sup_{t \geq 0} \left\| e^{tcA} \right\| = +\infty. \tag{13}$$

Оскільки загальний розв'язок рівняння (12) подається у вигляді

$$x = e^{tcA} a,$$

де $a \in E$, то завдяки (13) та теоремі Банаха – Штейнгауза [4] справджується наступне твердження.

Теорема 3. *У випадку ненульового квазінільпотентного оператора A і виконання співвідношення (11) усі розв'язки рівняння (3) є нестійкими.*

Якщо $f(t,x) \equiv 0$, то, очевидно, розв'язки рівняння (3) є стійкими.

4. Інтегральне співвідношення для розв'язків рівняння (3). Перш ніж доводити нестійкість нульового розв'язку диференціального рівняння (3) у випадку виконання співвідношень (1) і (2), наведемо для розв'язків цього рівняння одне інтегральне співвідношення.

Зазначимо, що кожний розв'язок задачі Коші (3), (4) є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = a + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) A x(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \tag{14}$$

і навпаки.

Покажемо, що кожний розв'язок задачі Коші (3), (4) також є розв'язком більш складного, але зручнішого для подальших досліджень, інтегрального рівняння.

Нехай неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ функція $y = y(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння (14). Тоді

$$y(t) \equiv a + \int_0^t f(\tau, y(\tau)) A\, y(\tau)\, d\tau.$$

Звідси випливає

$$y(t) \equiv a + \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) d\tau_1 \right) Aa + \int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) A^2 y(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1,$$

$$\begin{aligned} y(t) \equiv a &+ \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) d\tau_1 \right) Aa + \\ &+ \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) d\tau_2 d\tau_1 \right) A^2 a + \\ &+ \int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) \int\limits_0^{\tau_2} f(\tau_3, y(\tau_3)) A^3 y(\tau_3)\, d\tau_3\, d\tau_2\, d\tau_1, \end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned} y(t) \equiv a &+ \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) d\tau_1 \right) Aa + \\ &+ \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) d\tau_2 d\tau_1 \right) A^2 a + \ldots \\ &\ldots + \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) \ldots \int\limits_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n, y(\tau_n)) d\tau_n \ldots d\tau_2 d\tau_1 \right) A^n a + \\ &+ \int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) \ldots \int\limits_0^{\tau_n} f(\tau_{n+1}, y(\tau_{n+1})) A^{n+1} y(\tau_{n+1}) d\tau_{n+1} \ldots d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned}$$

Легко перевірити, що з урахуванням (2) для кожних $t \geq 0$ і $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int\limits_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) \ldots \int\limits_0^{\tau_n} f(\tau_{n+1}, y(\tau_{n+1})) A^{n+1} y(\tau_{n+1}) d\tau_{n+1} \ldots d\tau_2 d\tau_1 \right| \leq$$

$$\leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \left(\sup_{(\tau,x)\in[0,t)\times E} f(\tau, x) \right)^{n+1} \|A^{n+1}\| \max_{0\leq s\leq t} |y(s)|.$$

Завдяки останньому співвідношенню функціональний ряд

$$a + \left(\int_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) d\tau_1 \right) Aa +$$
$$+ \left(\int_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) d\tau_2 d\tau_1 \right) A^2 a + \ldots$$
$$\ldots + \left(\int_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n, y(\tau_n)) d\tau_n \ldots d\tau_2 d\tau_1 \right) A^n a + \ldots$$

збігається для кожного $t \geq 0$ і

$$y(t) \equiv a + \left(\int_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) d\tau_1 \right) Aa +$$
$$+ \left(\int_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) d\tau_2 d\tau_1 \right) A^2 a + \ldots$$
$$\ldots + \left(\int_0^t f(\tau_1, y(\tau_1)) \int_0^{\tau_1} f(\tau_2, y(\tau_2)) \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n, y(\tau_n)) d\tau_n \ldots d\tau_2 d\tau_1 \right) A^n a + \ldots .$$

Отже, справджується така теорема.

Теорема 4. *Якщо функція $y(t)$ є розв'язком задачі Коші (3), (4), то ця функція є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = a + \left(\int_0^t f(\tau_1, x(\tau_1)) d\tau_1 \right) Aa +$$
$$+ \left(\int_0^t f(\tau_1, x(\tau_1)) \int_0^{\tau_1} f(\tau_2, x(\tau_2)) d\tau_2 d\tau_1 \right) A^2 a + \ldots$$
$$\ldots + \left(\int_0^t f(\tau_1, x(\tau_1)) \int_0^{\tau_1} f(\tau_2, x(\tau_2)) \ldots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n, x(\tau_n)) d\tau_n \ldots d\tau_2 d\tau_1 \right) A^n a + \ldots . \quad (15)$$

5. Основне твердження про нестійкість розв'язків рівняння (3).

Теорема 5. *Якщо виконуються співвідношення (1) і (2), а ненульовий оператор A є квазінільпотентним, то нульовий розв'язок рівняння (3) є нестійким.*

Доведення. Покажемо, що для будь-якого числа $\delta > 0$ існує вектор $a \in E$, $\|a\| = \delta$, такий, що кожний розв'язок $x(t,a)$ початкової задачі (3), (4) буде необмеженим на $[0,+\infty)$. Звідси випливає твердження теореми.

Зафіксуємо довільне число $\delta > 0$. Спочатку розглянемо випадок, коли оператор A є нільпотентним. Нехай m — індекс нільпотентності цього оператора. Тоді $A^m = O$, $A^{m-1} \neq O$ і тому рівняння (15) має вигляд

$$x(t) = a + \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, x(\tau_1))d\tau_1\right) Aa +$$
$$+ \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, x(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, x(\tau_2))d\tau_2 d\tau_1\right) A^2 a + \ldots$$
$$\ldots + \left(\int\limits_0^t f(\tau_1, x(\tau_1)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, x(\tau_2)) \ldots \int\limits_0^{\tau_{m-2}} f(\tau_{m-1}, x(\tau_{m-1}))d\tau_{m-1} \ldots d\tau_2 d\tau_1\right) A^{m-1}a. \tag{16}$$

Використаємо числа

$$\alpha = \inf_{t \geq 0,\ x \in E} f(t,x),$$

$$\beta = \sup_{t \geq 0,\ x \in E} f(t,x)$$

та вектор $a \in E$, для якого $A^{m-1}a \neq 0$ і $\|a\| = \delta$.

Завдяки (16) для кожного $t \geq 0$

$$\|x(t,a)\| \geq \left\|\int\limits_0^t f(\tau_1, x(\tau_1,a)) \ldots \int\limits_0^{\tau_{m-2}} f(\tau_{m-1}, x(\tau_{m-1},a))d\tau_{m-1} \ldots d\tau_1\right\| \|A^{m-1}a\| -$$
$$- \|a\| - \left\|\int\limits_0^t f(\tau_1, x(\tau_1,a))d\tau_1\right\| \|Aa\| -$$
$$- \left\|\int\limits_0^t f(\tau_1, x(\tau_1,a)) \int\limits_0^{\tau_1} f(\tau_2, x(\tau_2,a))d\tau_2 d\tau_1\right\| \|A^2 a\| - \ldots$$
$$\ldots - \left\|\int\limits_0^t f(\tau_1, x(\tau_1,a)) \ldots \int\limits_0^{\tau_{m-3}} f(\tau_{m-2}, x(\tau_{m-2},a))d\tau_{m-2} \ldots d\tau_1\right\| \|A^{m-2}a\| \geq$$
$$\geq \frac{\alpha^{m-1}\|A^{m-1}a\|}{(m-1)!} t^{m-1} - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\beta^k \|A^k a\|}{k!} t^k.$$

Оскільки $\|A^{m-1}a\| > 0$, то

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\alpha^{m-1}\|A^{m-1}a\|}{(m-1)!}t^{m-1} - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{\beta^k\|A^k a\|}{k!}t^k\right) = +\infty.$$

Тому

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t,a)\| = +\infty.$$

Тепер розглянемо випадок, коли A є квазінільпотентним оператором і $A^n \neq O$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Виберемо довільний вектор $a \in E$, для якого $Aa \neq 0$ і $\|x\| = \delta$. Розглянемо векторну послідовність

$$a, Aa, \ldots, A^n a, \ldots.$$

Можливі два випадки: 1) для деякого $m \in \mathbb{N}$ вектори $a, Aa, \ldots, A^m a$ є лінійно залежними; 2) для кожного $n \in \mathbb{N}$ вектори $a, Aa, \ldots, A^n a$ є лінійно незалежними.

Розглянемо перший випадок. З лінійної залежності векторів $a, Aa, \ldots, A^m a$ випливає, що векторний простір $L[a, Aa, \ldots, A^m a]$ простору E, породжений векторами $a, Aa, \ldots$ $\ldots, A^m a$, є інваріантним підпростором щодо оператора A. Завдяки квазінільпотентності цього оператора його звуження на $L[a, Aa, \ldots, A^m a]$ є нільпотентним оператором з індексом нільпотентності

$$\mu \leq \dim L[a, Aa, \ldots, A^m a].$$

Тому, як і у випадку нільпотентного оператора A,

$$\|x(t,a)\| \geq \frac{\alpha^{\mu-1}\|A^{\mu-1}a\|}{(\mu-1)!}t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{\mu-2}\frac{\beta^k\|A^k a\|}{k!}t^k$$

для всіх $t \geq 0$. Отже,

$$\lim_{t\to+\infty}\|x(t,a)\| = +\infty,$$

оскільки $\|A^{\mu-1}a\| > 0$.

Розглянемо другий випадок. На підставі квазінільпотентності оператора A для кожного числа $\varepsilon > 0$ справджується співвідношення (7). Зафіксуємо довільне досить мале число $\varepsilon > 0$. Завдяки (7) існує таке натуральне число m_ε, що

$$\frac{\beta^n\|A^n\|}{\varepsilon^n} \leq 1 \quad \text{для всіх} \quad n \geq m_\varepsilon. \tag{17}$$

Нехай l_{m_ε} — лінійний функціонал на $L[a, Aa, \ldots, A^{m_\varepsilon}a]$, для якого

$$l_{m_\varepsilon}(Aa) = \|Aa\|$$

і

$$l_{n_\varepsilon}(x) = 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in L[a, A^2a, A^3a, \ldots, A^{m_\varepsilon}a]. \tag{18}$$

Очевидно, що

$$\|l_{m_\varepsilon}\| = 1.$$

Розглянемо лінійне продовження $\breve{l}_{m_\varepsilon}$ функціонала l_{m_ε} на E, норма якого дорівнює 1. Функціонал $\breve{l}_{m_\varepsilon}$ з такими властивостями існує на підставі теореми Гана – Банаха про продовження лінійного функціонала. Застосуємо $\breve{l}_{m_\varepsilon}$ до $x(\varepsilon^{-1}, a)$. Використовуючи (15) і (18), отримуємо

$$\breve{l}_{m_\varepsilon}\left(x(\varepsilon^{-1}, a)\right) = \breve{l}_{m_\varepsilon}\left(\left(\int\limits_0^{\varepsilon^{-1}} f(\tau_1, x(\tau_1))d\tau_1\right) Aa\right) +$$

$$+ \breve{l}_{m_\varepsilon}\left(\sum_{k=m_\varepsilon+1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\varepsilon^{-1}} f(\tau_1, x(\tau_1))\ldots\int\limits_0^{\tau_{k-1}} f(\tau_k, x(\tau_k))d\tau_k\ldots d\tau_1\right) A^k a\right).$$

Тому завдяки (17)

$$\left|\breve{l}_{m_\varepsilon}\left(x(\varepsilon^{-1}, a)\right)\right| \geq \varepsilon^{-1}\alpha\|Aa\| - \sum_{k=m_\varepsilon+1}^{\infty}\frac{\delta}{k!} \geq \varepsilon^{-1}\alpha\|Aa\| - \frac{\delta}{m_\varepsilon! m_\varepsilon}.$$

Оскільки $\left\|\breve{l}_{m_\varepsilon}\right\| = 1$, то

$$\left\|\breve{l}_{m_\varepsilon}\left(x(\varepsilon^{-1}, a)\right)\right\| \geq \varepsilon^{-1}\alpha\|Aa\| - \frac{\delta}{m_\varepsilon! m_\varepsilon}.$$

Тому

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\|x(t, a)\| = +\infty.$$

Теорему 5 доведено.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 535 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
3. *Банах С. С.* Курс функціонального аналізу. — Київ: Рад. шк., 1948. — 216 с.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 896 с.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь. — Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2004. — 416 с.

Одержано 10.10.2004