УДК 517 . 938

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

І. М. Грод

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: grod@mail.tspu.edu.ua

We find sufficient conditions for the systems of nonlinear difference equations

$$x(n+1) = A(x(n))x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

where $A(x)$ is a matrix-valued function continuous on $\mathbb{R}^m$, to have solutions in the space of two-way infinite bounded number sequences.

Отримано достатні умови існування розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь

$$x(n+1) = A(x(n))x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

($A(x)$ — неперервна на $\mathbb{R}^m$ матрична функція) у просторі обмежених двосторонніх числових послідовностей.

Одним із важливих питань теорії різницевих рівнянь є питання існування для них обмежених на $\mathbb{R}$ розв'язків.

Будемо досліджувати системи нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(n+1) = A(x(n))x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $A(x)$ — неперервна на $\mathbb{R}^m$ матрична функція.

Нехай $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ — банахів простір усіх відображень $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$, множина значень кожного з яких є обмеженою, з нормою

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Введемо в розгляд допоміжні оператори $D : l_\infty \to l_\infty$ і $D_y : l_\infty \to l_\infty$, що визначаються рівностями

$$(Dx)(n) = x(n+1) - A(x(n))x(n),$$

$$(D_y x)(n) = x(n+1) - A(y(n))x(n),$$

$$n \in \mathbb{Z},$$

де $y(n) \in \mathbb{R}^m$ при $n \in \mathbb{Z}$ — довільний фіксований вектор.

Відмітимо, що завдяки неперервності $A(x)$ на $\mathbb{R}^m$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{R}^m$ задані оператори D, D_y є неперервними і обмеженими на $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$. Крім цього, оператор D_y є лінійним оператором при кожному фіксованому $y \in l_\infty$. Позначимо через $R(D)$ множину значень оператора D. Тоді зрозуміло, що існування розв'язків для кожного $f \in l_\infty$ задається рівністю

$$R(D) = l_\infty. \tag{2}$$

Для отримання основних тверджень будемо використовувати результати теорії c-неперервних операторів, а тому нагадаємо деякі поняття.

Згідно з [1], послідовність $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до елемента $x \in l_\infty$ при $k \to \infty$,

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо ця послідовність є обмеженою і

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|n|\le p} |x_k(n) - x(n)| = 0$$

для всіх $p \in \mathbb{N}$.

Оператор називається *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in l_\infty$ і послідовності $x_k \in \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_k \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} x$ при $k \to \infty$, випливає, що $Fx_k \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} Fx$ при $k \to \infty$. Клас таких операторів, очевидно, є досить широким.

Сформулюємо основний результат.

Теорема. *Нехай:*

1) $A(x)$ *— неперервна на* $\mathbb{R}^m$ *матрична функція;*

2) для кожного $y \in l_\infty$ *оператор* $D_y : l_\infty \to l_\infty$ *має обернений неперервний* $(D_y)^{-1} : l_\infty \to l_\infty$;

3) $\sup_{y \in l_\infty} \|(D_y)^{-1}\| < +\infty$.

Тоді для кожного $f \in l_\infty$ *різницеве рівняння (1) має хоча б один розв'язок* $x \in l_\infty$.

Перш ніж доводити цю теорему, наведемо деякі допоміжні результати. Для цього крім рівняння (1) розглянемо також рівняння

$$x(n+1) = A(y(n))x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

де $y = y(n)$ — довільний елемент простору l_∞. Враховуючи, що це рівняння є лінійним, для нього можна застосувати теорію, викладену, наприклад, у роботах [2, 3]. Завдяки припущенню 2 теореми єдиний розв'язок $x \in l_\infty$ рівняння (3), що відповідає функції $f \in l_\infty$, подається за допомогою оператора $(D_y)^{-1}$ у вигляді

$$x = (D_y)^{-1} f. \tag{4}$$

Далі, вважаючи, що функцію $f \in l_\infty$ зафіксовано, розглянемо відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$, яке кожному елементу $y \in l_\infty$ ставить у відповідність елемент $(D_y)^{-1} f$ цього ж простору. Це відображення, очевидно, визначається рівністю

$$\mathcal{U}_f = (D_y)^{-1} f, \tag{5}$$

де $y \in l_\infty$.

Зупинимось на деяких властивостях відображень $\mathcal{U}_f$ при $f \in l_\infty$.

Лема 1. *Оператор* $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$ *є неперервним для кожного* $f \in l_\infty$.

Доведення. Зафіксуємо довільні елементи $y = y(n)$ і $z = z(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, простору l_∞ і розглянемо різницеві рівняння

$$x(n+1) = A(y(n))x(n) + f(n),$$

$$x(n+1) = A(z(n))x(n) + f(n),$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $x(y) = x(n,y)$ і $x(z) = x(n,z)$, $n \in \mathbb{Z}$, — відповідні розв'язки цих рівнянь, тобто

$$x(n+1,y) \equiv A(y(n))x(n,y) + f(n),$$

$$x(n+1,z) \equiv A(z(n))x(n,z) + f(n), \tag{6}$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$x(y) = (D_y)^{-1} f = \mathcal{U}_f y \tag{7}$$

і

$$x(z) = (D_z)^{-1} f = \mathcal{U}_f z. \tag{8}$$

Подамо (6) у вигляді

$$x(n+1,z) - A(y(n))x(n,z) \equiv [A(z(n)) - A(y(n))]x(n,z) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси отримаємо

$$\begin{aligned} x(z) &= (D_y)^{-1}([A(z)) - A(y)]x(z) + f) = \\ &= (D_y)^{-1} f + (D_y)^{-1}([A(z) - A(y)]x(z)) = \\ &= (D_y)^{-1} f + (D_y)^{-1}([A(z) - A(y)]\left((D_z)^{-1} f\right). \end{aligned}$$

Отже, на підставі (7) та (8) маємо

$$\mathcal{U}_f z - \mathcal{U}_f y = (D_y)^{-1}\left([A(z) - A(y)]\mathcal{U}_f z\right). \tag{9}$$

Далі розглянемо довільну послідовність $(y_k)_{k \geq 1}$ функцій $y_k \in l_\infty$, $k \geq 1$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k - y\|_{l_\infty} = 0. \tag{10}$$

Використовуючи рівність (9), записуємо

$$\mathcal{U}_f y_k - \mathcal{U}_f y = (D_y)^{-1} \left([A(y_k) - A(y)] \mathcal{U}_f y_k \right) \tag{11}$$

для всіх $k \geq 1$.

Враховуючи (10), припущення 3 теореми та рівність (5), можемо стверджувати, що існує стала $a > 0$ така, що

$$\sup_{k \geq 0} \|\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} \leq a. \tag{12}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \|[A(y_k) - A(y)]\,\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|[A(y_k(n)) - A(y(n))](\mathcal{U}_f y_k)(n)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A(y_k(n)) - A(y(n)))\|_{L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)} \|\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} \leq \\ &\leq a \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A(y_k(n)) - A(y(n))\|_{L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

операторна функція $A(x)$ неперервна на $\mathbb{R}^m$, а банахів простір $\mathbb{R}^m$ скінченновимірний, то завдяки (10)

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A(y(n)) - A(y(n))\|_{L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)} = 0.$$

Тоді на підставі (12)

$$\lim_{k \to \infty} \|[A(y_k(n)) - A(y(n))]\,\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} = 0$$

і

$$\lim_{k \to \infty} \left\|(D_y)^{-1}([A(y_k) - A(y)]\,\mathcal{U}_f y_k\right\|_{l_\infty} = 0.$$

Звідси та з (11) отримуємо

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathcal{U}_f y(n) - \mathcal{U}_f y\|_{l_\infty} = 0.$$

Отже, якщо виконується співвідношення (10), то має місце також рівність (12). Це означає, що відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$ є неперервним у точці $y \in l_\infty$. Оскільки точку $y \in l_\infty$ було вибрано довільно, то $\mathcal{U}_f$ є неперервним на l_∞ для кожного $f \in l_\infty$.

Лему 1 доведено.

Далі позначимо через $\mathbb{B}_r$ замкнену кулю

$$\{x \in l_\infty : \|x\|_{l_\infty} \leq r\}$$

і розглянемо число

$$d = \sup_{y \in l_\infty} \|(Ly)^{-1}\|_{D(l_\infty, l_\infty)}.$$

Завдяки припущенню 3 теореми це число є скінченним. Тому з урахуванням рівності (5) для всіх $y \in l_\infty$ та $f \in l_\infty$ справджується співвідношення

$$\|\mathcal{U}_f y\|_{l_\infty} = \|(Ly)^{-1} f\|_{l_\infty} \le \|(Ly)^{-1}\|_{D(l_\infty, l_\infty)} \|f\|_{l_\infty} \le d\|f\|_{l_\infty},$$

тобто має місце наступне твердження.

Лема 2. *Замкнена куля* $\mathbb{B}_{d\|f\|_{l_\infty}}$ ($d\|f\|_{l_\infty}$ — *радіус цієї кулі*) *є інваріантною по відношенню до оператора* $\mathcal{U}_f$, *тобто*

$$\|\mathcal{U}_f y\|_{l_\infty} \le d\|f\|_{l_\infty}$$

для всіх $y \in l_\infty$.

Лема 3. *Відображення* $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$, $f \in l_\infty$, *є c-неперервним.*

Доведення. Нагадаємо [4], що в розглядуваному випадку оператор $(D_y)^{-1} : l_\infty \to l_\infty$ є c-неперервним.

Розглянемо довільні $y \in l_\infty$ і послідовність $y_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$y_k \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Нехай $x(y) \in l_\infty$ і $x(y_k) \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, — такі функції, що

$$x(n+1, y) \equiv A(y(n))x(n, y) + f(n) \tag{13}$$

і

$$x(n+1, y_k) \equiv A(y_k(n))x(n, y_k) + f(n), \tag{14}$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

Подамо друге із цих співвідношень у вигляді

$$x(n+1, y_k) \equiv A(y(n))x(n, y_k) + [A(y_k(n)) - A(y(n))]x(n, y_k) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Згідно з припущеннями 2 та 3 теореми, враховуючи (13), (15), отримуємо

$$x(y) = (D_y)^{-1} f$$

і

$$x(y_k) = (D_y)^{-1}(f + [A(y_k(n) - A(y(n)]x(n, y_k)), \quad k \ge 1.$$

На підставі (5) та леми 2 послідовність $(x(y_k))_{k \ge 1}$ є обмеженою. Тому завдяки (14), неперервності $A(x)$ на $\mathbb{R}^m$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{R}^m$ маємо

$$[A(y_k(n) - A(y(n)]x(n, y_k) \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

або

$$f + [A(y_k(n) - A(y(n)]x(n, y_k) \xrightarrow{\text{лок.}, \, l_\infty} f \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Звідси з урахуванням c-неперервності оператора $(D_y)^{-1} : l_\infty \to l_\infty$ отримуємо

$$x(y_k) \xrightarrow{\text{лок.}, \, l_\infty} x(y) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Оскільки на підставі (5)

$$x(y) = \mathcal{U}_f y = (D_y)^{-1} f$$

і

$$x(y_k) = \mathcal{U}_f y_k = (D_{y_k})^{-1} f, \quad r \geq 1,$$

то

$$\mathcal{U}_f y_k \xrightarrow{\text{лок.}, \, l_\infty} \mathcal{U}_f y \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

що й доводить лему 3.

Зауваження 1. Оскільки простір $\mathbb{R}^m$ є скінченновимірним, то з c-неперервності відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$, $f \in l_\infty$, випливає його c-цілком неперервність.

Це випливає з того, що множина

$$\{(P_r \mathcal{U}_f y) : \|y\|_{l_\infty} \leq 1\}$$

є передкомпактною в $\mathbb{R}^m$ для кожного $r \in \mathbb{Z}$ (P_r — проектор : $P_r y = y_r$).

Доведення теореми. Завдяки (4) і (5) зрозуміло, що кожна нерухома точка відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$ є обмеженим розв'язком рівняння (1). Крім цього, на підставі доведених лем можна стверджувати, що відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$, $f \in l_\infty$ є c-цілком неперервним. Залишилось показати, що у випадку виконання умов теореми для кожного $f \in l_\infty$ множина нерухомих точок відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$ є непорожньою. Для цього зафіксуємо довільне $f \in l_\infty$ і введемо в розгляд послідовність операторів $\mathcal{U}_{f\,k} : l_\infty \to l_\infty$:

$$(\mathcal{U}_{f\,k})_n = \begin{cases} (\mathcal{U}_f)_n, & \text{якщо} \quad n \in [-k, k] \bigcap \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus [-k, k], \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Для них з урахуванням леми 2 має місце включення

$$\mathcal{U}_{f\,k} B_{2d\|f\|_{l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)}} \subset B_{d\|f\|_{l_\infty}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Можна показати, що дані відображення є цілком неперервними. Тому за теоремою Шаудера про нерухому точку [5] для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує така точка $c_k \in B_{d\|f\|_{l_\infty}}$, що

$$\mathcal{U}_{f\,k} c_k = c_k. \tag{16}$$

Оскільки множини $\{c_{n,k}\, k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, передкомпактні і

$$\sup_{k \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{Z}} \|c_{n,k}\|_E \leq r,$$

то існує строго зростаюча послідовність натуральних чисел k_l, $l \geq 1$, така, що послідовність

$$c_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} c \quad \text{при} \quad l \to \infty, \tag{17}$$

де c — деяка точка з кулі $B_{d\|f\|_{l_\infty}}$.

Враховуючи c-неперервність оператора і (16), можна показати, що

$$\mathcal{U}_{f_{k_l}} c - \mathcal{U}_f c \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty$$

і

$$\mathcal{U}_{f_{k_l}} c - \mathcal{U}_{f_{k_l}} c_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.},\, l_\infty} 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Тому, враховуючи (16) і (17), маємо

$$\mathcal{U}_f c = c.$$

Теорему доведено.

Наведемо приклад різницевого рівняння, яке задовольняє всі вимоги теореми 2.

Приклад. Розглянемо неперервну на $\mathbb{R}$ функцію

$$b(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{якщо} \quad x \leq 2, \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & \text{якщо} \quad 2 < x \leq 3, \\ \dfrac{2}{3}, & \text{якщо} \quad x > 3. \end{cases} \tag{18}$$

Очевидно, що функція $b(x)$ є неперервною на $\mathbb{R}$ і

$$\frac{1}{2} \leq b(x) \leq \frac{2}{3} \quad \text{для всіх} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Розглянемо різницеве рівняння

$$x(n+1) = b(x(n))x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

якщо $b(x)$ збігається з (18), а $f(n) \equiv 1$.

Рівняння (20) має безліч обмежених розв'язків, зокрема такі: $x(n) \equiv c \in [2, 3]$. Це випливає з того, що для кожного $c \in [2, 3]$ виконується рівність $a(c)c = c$.

Нехай $f(t) \equiv -1 = 0$. Оскільки тоді $a(x)x - 1 = 0$ для всіх $x \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$, то рівняння (16) при $f(t) \equiv -1 = 0$ має нескінченну кількість розв'язків $x(t) \equiv C$, де $C \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.

Далі покажемо, що для даного рівняння виконуються умови 2, 3 теореми.

Зафіксуємо довільну послідовність $y_n \in l_\infty$ і розглянемо рівняння

$$x(n+1) = b(y(n))x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Це рівняння має єдиний обмежений розв'язок для кожної послідовності $f \in l_\infty$, що подається у вигляді

$$x(n+1) = f(n-1) + b(y(n-1))f(n-2) + b(y(n-1))b(y(n-2))f(n-3) + \ldots$$
$$\ldots + b(y(n-1))b(y(n-2))\ldots b(y(n-k))f(n-k-1) + \ldots.$$

Завдяки (19)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq b(y(n-1))b(y(n-2))\ldots b(y(n-k)) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad k \geq 1.$$

Тому

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)| \leq \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \ldots\right) \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| = 3 \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|. \tag{22}$$

Якщо рівняння (19) також має обмежений розв'язок $z(n)$, тобто

$$z(n+1) = b(y(n))z(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

то згідно з (21)

$$x(n+1) - z(n+1) = b(y(n))(x(n) - z(n)) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси на підставі (19) отримуємо

$$\frac{1}{2}|x(n) - z(n)| \leq |x(n+1) - z(n+1)| \leq \frac{2}{3}|x(n) - z(n)|$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Ця нерівність для обмежених $x(n)$ і $z(n)$ можлива, лише якщо $x(n) \equiv z(n)$.

Отже, різницевий оператор

$$(R_y x)_n = x(n+1) - b(y(n))x(n)$$

для кожного $y_n \in l_\infty$ має обмежений неперервний оператор, причому завдяки (22)

$$\|R_y)^{-1}\| \leq 3 \quad \text{для всіх} \quad y \in l_\infty.$$

Таким чином, для рівняння (20) виконуються всі умови теореми.

Зауваження 2. Як показує наведений приклад, рівняння (1), що задовольняє вимоги теореми 2, може мати багато обмежених розв'язків $x \in l_\infty$ для деяких $f \in l_\infty$.

1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269–274.

2. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. — 168 с.

3. *Баскаков А. Г.* Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов // Докл. РАН. — 1993. — **333**, № 3. — С. 282–284.

4. *Слюсарчук В. Ю.* Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. — Рівне: Вид-во Рівн. техн. ун-ту, 2003. — 366 с.

5. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1997. — 232 с.

6. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 660–662.

Одержано 14.03.2005