УДК 517.54

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

А. К. Бахтин

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We solve new extremal problems on nonoverlapping regions with free poles on the rays. Similar results are obtained for open sets.

Розв'язано нові екстремальні задачі про неперетинні області з вільними полюсами на променях. Отримано аналогічні результати для відкритих множин.

В данной работе решены новые экстремальные задачи о неналегающих областях. Задачи такого типа составляют известное классическое направление в геометрической теории функций комплексного переменного. Возникновение этого направления связано с работой М. А. Лаврентьева [1]. В дальнейшем эта тематика получила развитие в работах многих авторов (см., например, [2–14]).

1. Введем необходимые обозначения и определения. Пусть N, R — соответственно множества натуральных и вещественных чисел, C — комплексная плоскость, а $\overline{C} = C \bigcup \bigcup \{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация.

Пусть $R_+ := (0, \infty)$. Систему точек $\{a_k\}_{k=1}^{n} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in N$, $n \geq 2$, $a_k \in C$, $k = \overline{1,n}$, будем называть лучевой, если выполнены следующие условия:

$$|a_k| \in R_+, \quad k = \overline{1,n},$$
$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi. \tag{1}$$

Для любой лучевой системы точек $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ положим

$$\arg a_k = \theta_k, \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\left(\theta_{k+1} - \theta_k\right), \quad k = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\theta_{n+1} := \theta_1 + 2\pi, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad a_{n+1} := a_1.$$

Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2. \tag{3}$$

Для каждой лучевой системы $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ определим функционал

$$P\big(\{a_k\}_{k=1}^{n}\big) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k|, \tag{4}$$

где величины α_k определены соотношениями (1) – (3), а $\chi(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$.

Система произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $B_k \subset \overline{C}$, $k = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, $n \in N$, называется системой неналегающих областей, если

$$B_k \bigcap B_p = \varnothing \quad \forall k \neq p, \quad k,p = \overline{1,n}. \tag{5}$$

В работе [14] дано определение операции заполнения несущественных граничных компонент произвольной системы неналегающих областей. Операция заполнения сопоставляет любой системе неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ систему неналегающих областей $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^{n}$ таких, что $B_k \subset \widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, причем каждая область $\widetilde{B}_k$ является конечносвязной областью без изолированных граничных точек. Множество $\widetilde{B}_k \setminus B_k$ есть объединение всех несущественных граничных компонент области B_k, $k = \overline{1,n}$.

Пусть $r\,(B,a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{C}$ относительно точки $a \in \in B$ [15], а $\operatorname{cap} e$ — логарифмическую емкость множества e. Связную компоненту открытого множества $B \subset \overline{C}$, содержащую точку a, будем обозначать $B\,(a)$.

2. Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Для любого фиксированного $n \in N$, $n \geq 2$, любой лучевой системы точек $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и произвольного открытого множества $B \subset \overline{C}$ такого, что*

$$\{a_k\}_{k=1}^{n} \subset B \quad \text{и} \qquad B(a_k) \bigcap B(a_{k+1}) = \varnothing, \quad k = \overline{1,n},$$

выполняется неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(B,a_k) \leq 2^n\, P\big(\{a_k\}_{k=1}^{n}\big) \prod_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{6}$$

Равенство в неравенстве (6) реализуется, когда открытое множество B является объединением системы неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ таких, что

$$\widetilde{B_k} = E_k := \left\{ w \in C : (2k-3)\frac{\pi}{n} < \arg w < (2k-1)\frac{\pi}{n} \right\}$$

и $\operatorname{cap}(E_k \setminus B_k) = 0$, $k = \overline{1,n}$, а система точек $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ определена равенствами

$$a_k = \Big[P\big(\{a_m\}_{m=1}^{n}\big)\Big]^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Доказательство базируется на использовании метода разделяющего преобразования, развитого в работах [8 – 10].

Пусть

$$D_k = \{w \in C : \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}\}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Функция

$$\Pi_k(w) = -i\big(e^{-i\theta_k} w\big)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{9}$$

однолистно и конформно отображает область D_k, $k = \overline{1,n}$, на правую полуплоскость.

В соответствии с формулами (2) можем считать $\Pi_{n+1} := \Pi_1$, $\Pi_0 := \Pi_n$, $\alpha_0 := \alpha_n$. Из соотношений (8) и (9) легко видеть, что

$$\mid \Pi_k(w) - \Pi_k(a_p) \mid \sim \frac{1}{\alpha_k} \mid a_p \mid^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \mid w - a_p \mid, w \to a_p, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = k, k+1. \tag{10}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} \Pi_k(a_k) = \omega_k^{(1)}, \quad \Pi_k(a_{k+1}) = \omega_k^{(2)}, \qquad k = \overline{1,n}, \\ \Pi_n(a_{n+1}) = \Pi_n(a_1) := \omega_n^{(2)}. \end{gathered} \tag{11}$$

Для некоторых точек a_{k_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots, q$, $q < \left[\frac{n}{2}\right]$, заданной лучевой системы связные компоненты $B(a_{k_\nu})$ могут совпадать. В силу условий теоремы 1 имеем соотношение

$$B(a_{k+1}) \bigcap B(a_k) = \varnothing, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Поскольку по определению $r(B, a_k) = r(B(a_k), a_k)$ (см. [10, с. 25]), выполняем разделяющее преобразование каждой области $B(a_k)$ относительно пары функций $\{\Pi_{k-1}(w), \Pi_k(w)\}$ и системы углов D_k, $k = \overline{1,n}$ [7 – 10].

Из теоремы 1.9 [9] (см. также [8, 10]) и соотношений (1) – (3), (8) – (11) получаем неравенства

$$r(B, a_k) = r(B(a_k), a_k) \le \left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right) r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}} \mid a_k \mid^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1} \frac{1}{\alpha_k} \mid a_k \mid^{\frac{1}{\alpha_k}-1}} \right], \qquad k = \overline{1,n}, \tag{13}$$

где пара областей $\left\{G_{k-1}^{(2)}, G_k^{(1)}\right\}$ есть результат разделяющего преобразования области $B(a_k)$ относительно семейства функций $\{\Pi_k, \Pi_{k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$, причем

$$G_0^{(2)} := G_n^{(2)}, \quad \omega_k^{(s)} \in G_k^{(s)}, \quad k = \overline{1,n}, \quad s = 1, 2.$$

Случай реализации знака равенства в неравенстве (13) полностью изучен в работах [8 – 10].

Используя (13), можно получить следующую оценку:

$$\prod_{k=1}^{n} r(B, a_k) \le \prod_{k=1}^{n} \left[\alpha_{k-1}\alpha_k \frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right) r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right)}{\mid a_k \mid^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}+\frac{1}{\alpha_k}}} \mid a_k \mid^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \frac{\mid a_k \mid}{\mid a_k \mid^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}}+\frac{1}{\alpha_k}\right)}} \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right) \right]^{1/2}. \tag{14}$$

Из свойств разделяющего преобразования и условия (12) следует, что области $G_k^{(1)}$ и $G_k^{(2)}$ удовлетворяют условию (5) и поэтому являются парой неналегающих областей для любого $k = \overline{1,n}$.

Отметим, что из соотношений (9) и (11) следует

$$\omega_k^{(1)} = \Pi_k(a_k) = -i \mid a_k \mid^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

$$\omega_k^{(2)} = \Pi_k(a_{k+1}) = -i \left(e^{-i\theta_k \pi} e^{i(\theta_k + \alpha_k)\pi} \mid a_{k+1} \mid \right)^{\frac{1}{\alpha_k}} =$$

$$= -ie^{i\pi} \mid a_{k+1} \mid^{\frac{1}{\alpha_k}} = i \mid a_{k+1} \mid^{\frac{1}{\alpha_k}}, \tag{15}$$

$$\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid = \mid a_k \mid^{\frac{1}{\alpha_k}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{1}{\alpha_k}} .$$

Преобразуя неравенство (14) с учетом (15), получаем оценку

$$\prod_{k=1}^{n} r(B, a_k) \leq$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \frac{\mid a_k \mid^{\frac{1}{\alpha_k}} + \mid a_{k+1} \mid^{\frac{1}{\alpha_k}}}{\mid a_k a_{k+1} \mid^{\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_k}}} \mid a_k \mid \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right]^{1/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \mid a_k \mid \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right]^{1/2} =$$

$$= 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \chi \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \mid a_k \mid \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right]^{1/2}, \tag{16}$$

где $\chi(t) = \dfrac{1}{2}(t + t^{-1})$.

С учетом формулы (4) находим

$$\prod_{k=1}^{n} r(B, a_k) \leq 2^n P\left(\{a_k\}_{k=1}^{n}\right) \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right]^{1/2}, \tag{17}$$

а с учетом неравенства (16) получаем соотношение

$$\left[2^n P\left(\{a_k\}_{k=1}^{n}\right) \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right]^{-1} \prod_{k=1}^{n} r(B, a_k) \leq \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\mid \omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)} \mid^2} \right]^{1/2}. \tag{18}$$

Известное неравенство М. А. Лаврентьева [1, 9, с. 50] дает возможность заключить из соотношения (17), что справедлива оценка

$$\left[2^n P\left(\{a_k\}_{k=1}^n\right) \prod_{k=1}^n \alpha_k\right]^{-1} \prod_{k=1}^n r(B, a_k) \leq 1. \tag{19}$$

Знак равенства в неравенстве (18) имеет место тогда и только тогда, когда во всех неравенствах (13), (14), (17), (18) достигается равенство. Отсюда и из свойств разделяющего преобразования следует, что открытое множество $B_0 = \bigcup\limits_{k=1}^n E_k$ и система точек $\{a_k\}_{k=1}^n$, определяемых равенствами (7), реализуют знак равенства в неравенстве (18).

Легко видеть, что отсюда следует утверждение о знаке равенства в теореме 1.

Теорема 1 доказана.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого $n \in N, n \geq 3$, любой лучевой системы точек $\{a_k\}_{k=1}^n$ и любого открытого множества $B \subset \overline{C}$ такого, что*

$$\{a_k\}_{k=1}^n \subset B \quad \text{и} \quad B(a_k) \bigcap B(a_p) = \varnothing \quad \forall k \neq p, \quad k, p = \overline{1, n},$$

выполняется неравенство (6) и знак равенства в этом неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда

$$B = \bigcup_{k=1}^n B(a_k), \quad \widetilde{B(a_k)} = E_k, \quad \text{cap } (E_k \setminus B(a_k)) = 0,$$

$$a_k = (P\{a_m\}_{m=1}^n)^{\frac{1}{n}} \exp i\frac{2\pi}{n}(k-1), \quad k = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Из условий теоремы 2 получаем, что неравенство (18) выполняется. Равенство в (18) возможно тогда и только тогда, когда знак равенства достигается в соотношениях (13), (14), (17), (18). Тогда

$$B(a_k) \subset \{w : \theta_{k-1} < \arg w < \theta_{k+1}\},$$

так как в противоположном случае в неравенстве Лаврентьева не достигается знак равенства при некоторых k_ν, $\nu = \overline{1, p}$, $p \leq n$. Знак равенства в (13) при всех $k = \overline{1, n}$ обеспечивает симметрию $\widetilde{B(a_k)}$ относительно луча

$$l_k = \{w : \arg w = \theta\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда $\alpha_k = \dfrac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$. Легко видеть, что

$$\widetilde{B(a_k)} = E_k, \quad \text{cap}\,(E_k \setminus B(a_k)) = 0.$$

Отсюда следует справедливость утверждения теоремы 2 относительно знака равенства.

Теорема 2 доказана.

Приведем некоторые следствия теоремы 2.

Следствие 1. *Для любого $n \in N$, $n \geq 3$, $M \in R_+$, лучевой системы точек $\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $P\left(\{a_k\}_{k=1}^n\right) \leq M$, и системы неналегающих областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq 2^n M \prod_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{20}$$

Равенство в неравенстве (19) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{B(a_k)} = E_k, \quad \operatorname{cap}\left(E_k \setminus B(a_k)\right) = 0, \quad k = \overline{1,n},$$

а система точек $\{a_k\}_{k=1}^n$ определена равенствами

$$a_k = M^{\frac{1}{n}} \exp i\frac{2\pi}{n}(k-1), \quad k = \overline{1,n}. \tag{21}$$

Следствие 2. *При условиях следствия 1 и $M = 1$ выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{22}$$

Равенство в (21) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{B(a_k)} = E_k, \quad \operatorname{cap}\left(E_k \setminus B(a_k)\right) = 0, \quad k = \overline{1,n},$$

а система точек определена формулой (21) при $M = 1$.

Следствие 3. *При условиях следствия 2 выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n. \tag{23}$$

Знак равенства в (23) реализуется тогда и только тогда, когда равенство достигается в неравенстве (22).

Следствия 2 и 3 являются существенным усилением известных результатов В. Н. Дубинина (см. [8–10]).

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159–245.

2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.

3. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. — М.: Наука, 1975. — 336 с.

4. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

5. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.

6. *Кузьмина Г. В.* Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. — Л.: Наука, 1980. — 241 с.

7. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та РАН. — 2001. — **276**. — С. 253 – 275.

8. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

9. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1 (295). — С. 3 – 76.

10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Уч. пос. — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2003. — 114 с.

11. *Емельянов Е. Г.* О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1987. — **160**. — С. 91 – 98.

12. *Ковалев Л. В.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Математика. — 2000. — № 6. — С. 82 – 87.

13. *Ковалев Л. В.* О трех непересекающихся областях // Дальневост. мат. журн. — 2000. — **1**, № 1. — С. 3 – 7.

14. *Бахтин А. К.* Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами на лучах // Допов. НАН України. — 2004. — № 12. — С. 7 – 13.

15. *Хейман В. К.* Многолистные функции. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 180 с.

Получено 08.02.2005