УДК 517 . 944

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ІНВАРІАНТНИХ $\Lambda_{(\mu)}$-ГІПЕРБОЛІЧНИХ ОПЕРАТОРІВ НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

І. М. Конет

Кам'янець-Поділ. ун-т
Україна, 32300, Кам'янець-Подільський, вул. Огієнка, 61
e-mail: univer@kp.km.ua

We find an analytic representation of a fundamental solution of the Cauchy problem for I. G. Petrovsky strictly hyperbolic $\Lambda_{(\mu)}$-invariant hyperbolic equations and systems in Euclidean spaces and on special Riemannian manifolds. This is done on the basis of the introduced integral transformations generated by an integral representation of the Dirac measure.

Одержано аналітичне зображення фундаментального розв'язку задачі Коші для строго гіперболічних за І. Г. Петровським $\Lambda_{(\mu)}$-інваріантних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь в евклідових просторах і на спеціальних ріманових многовидах. В основі лежать запроваджені інтегральні перетворення, породжені інтегральним зображенням міри Дірака.

1. Інтегральні перетворення. В евклідовому просторі E_n точок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в [1] одержано інтегральне зображення міри Дірака, породжене диференціальним оператором Лапласа $\Delta_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$:

$$\delta(x-\xi) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1} d\lambda, \tag{1}$$

де $j_\nu(x) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)x^{-\nu}J_\nu(x)$ $\Big(2\nu+1 \geq 0,\ j_\nu(0) = 1,\ j'_\nu(0) = 0\Big)$ — нормована функція Бесселя 1-го роду, $R(x,\xi) = \Big[\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-\xi_j)^2\Big]^{1/2}$ — віддаль між точками x та ξ, $\omega_n = 2(\pi)^{n/2}\Big[\Gamma(n/2)\Big]^{-1}$ — площа одиничної сфери в E_n, $J_\nu(x)$ — функція Бесселя 1-го роду, $\Gamma(x)$ — гамма-функція Ейлера [2].

У монографії [3] одержано інтегральне зображення міри Дірака, породжене на множині $(0,\infty)$ узагальненим диференціальним оператором Лежандра

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\Big), \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq 0,$$

$$(\mu) = (\mu_1, \mu_2) :$$

$$\delta(y-\eta) = \int\limits_0^\infty P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}\eta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\operatorname{sh}\eta \equiv \int\limits_0^\infty \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)d\beta\operatorname{sh}\eta, \tag{2}$$

$\nu^{\pm} = \dfrac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2)$, $\Omega_{(\mu)}(\beta) = 2^{\mu_1-\mu_2}(2\pi^2)^{-1}\beta \operatorname{sh} 2\pi\beta \left|\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - \nu^+ + i\beta\right)\right|^2 \left|\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - \nu^- + i\beta\right)\right|^2$,

$P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)$ — узагальнена приєднана функція Лежандра 1-го роду [4], як обмежений на $(0,\infty)$ розв'язок узагальненого рівняння Лежандра

$$\left(\Lambda_{(\mu)} + \beta^2\right)v(y) = 0.$$

Використовуючи тензорний добуток узагальнених функцій [5], можна записати інтегральне зображення міри Дірака, породжене в евклідовому просторі $E^+_{n+1} = \{(x,y) : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_j \in (-\infty,\infty),\ j = \overline{1,n};\ y \in (0,\infty)\}$ диференціальними операторами Δ_n та $\Lambda_{(\mu)}$:

$$\delta(x-\xi)\otimes\delta(y-\eta) \equiv \delta(x-\xi, y-\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R)\times$$

$$\times\,\varphi_\mu(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta \operatorname{sh}\eta. \tag{3}$$

Інтегральне зображення міри Дірака (3) дає можливість запровадити пряме $H_{n,(\mu)}$ і обернене $H^{-1}_{n,(\mu)}$ інтегральне перетворення типу Бохнера – Лежандра [6]:

$$H_{n,(\mu)}[f(\xi,\eta)] = \int\limits_0^\infty\int\limits_{E_n} f(\xi,\eta) j_{(n-2)/2}(\lambda R) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}\eta)\operatorname{sh}\eta\, d\xi d\eta \equiv \tilde f(\lambda, x, \beta), \tag{4}$$

$$H^{-1}_{n,(\mu)}[\tilde f(\lambda,x,\beta)] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \tilde f(\lambda,x,\beta) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}\eta)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta \equiv f(\varepsilon,\eta). \tag{5}$$

При цьому справджуються тотожності

$$H_{n,(\mu)}[\Delta_n f] = -\lambda^2 H_{n,(\mu)}[f], \quad H_{n,(\mu)}[\Lambda_{(\mu)}[f]] = -\beta^2 \tilde f. \tag{6}$$

Розглянемо тепер ріманів многовид $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1} = R^{(m)}_2 \times E^+_{n-1}$, побудований у роботі [7].
Згідно з результатами [7] визначимо функції

$$R(x,\xi) = \left[r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0) + \sum_{k=3}^n (x_k - \xi_k)^2\right]^{1/2},$$

$$R_1(x,\xi) = \left[r^2 + \rho^2 + 2r\rho\operatorname{ch}\alpha + \sum_{k=3}^n (x_k - \xi_k)^2\right]^{1/2},$$

$$K_m(\alpha, \varphi-\varphi_0) = \frac{\sin\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{m}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha}{m} - \cos\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{m}} + \frac{\sin\frac{\pi-(\varphi-\varphi_0)}{m}}{\operatorname{ch}\frac{\alpha}{m} - \cos\frac{\pi-(\varphi-\varphi_0)}{m}},$$

$$J(\varphi-\varphi_0) = \begin{cases} 1, & |\varphi-\varphi_0| < \pi, \\ 0, & |\varphi-\varphi_0| > \pi, \end{cases},$$

$$\Phi_{(m)} = j_{(n-2)/2}(\lambda R) J(\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{2\pi m}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1) K_m(\alpha, \varphi-\varphi_0)\, d\alpha \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{m}\left[j_{(n-2)/2}(\lambda R) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \Big(j_{(n-2)/2}(\lambda R) - j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)\Big) K_m(\alpha, \varphi-\varphi_0)\, d\alpha \right], \quad (7)$$

$$\Phi_{(\infty)} = j_{(n-2)/2}(\lambda R) J(\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1) K_{(\infty)}(\alpha, \varphi-\varphi_0)\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Big(j_{(n-2)/2}(\lambda R) - j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)\Big) K_{(\infty)}(\alpha, \varphi-\varphi_0)\, d\alpha, \quad (8)$$

$$K_{(\infty)} = \frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{\alpha^2 + (\pi+\varphi-\varphi_0)^2} + \frac{\pi-(\varphi-\varphi_0)}{\alpha^2 + [\pi-(\varphi-\varphi_0)]^2}.$$

На основі одержаного в роботі [7] інтегрального зображення міри Дірака в $R_n^{(m)}$ та інтегрального зображення (2) маємо:

1) інтегральне зображення міри Дірака на рімановім многовиді $\overset{+}{R}{}_{n+1}^{(m)}$

$$\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\Phi_{(m)}(\lambda, R, \varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}\, d\lambda\, d\beta; \quad (9)$$

2) інтегральне зображення міри Дірака на рімановім многовиді $\overset{+}{R}{}_{n+1}^{(\infty)}$

$$\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)} \equiv \tilde{\delta}_{(x-\xi, y-\eta)}(\operatorname{sh}\eta)^{-1} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\Phi_{(\infty)}(\lambda, R, \varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}\, d\lambda\, d\beta. \quad (10)$$

Інтегральне зображення (9) міри Дірака дозволяє визначити пряме $H_{n,(\mu)}^{(m)}$ і обернене $H_{n,(\mu)}^{-(m)}$ інтегральне перетворення типу Бохнера – Шестопала на $\overset{+}{R}{}_{n+1}^{(m)}$:

$$H_{n,(\mu)}^{(m)}[g(\xi,\eta)] = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\overset{+}{R}{}_{n+1}^{(m)}} g(\xi,\eta) P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(\operatorname{ch}\eta)\Phi_{(m)}(\lambda, R, \varphi-\varphi_0)\operatorname{sh}\eta\, d\eta\, d\xi \equiv \tilde{g}(\lambda, x, \beta), \quad (11)$$

$$H_{n,(\mu)}^{-(m)}[\tilde{g}(\lambda,x,\beta)] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \tilde{g}(\lambda,x,\beta)P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(\operatorname{ch} y)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda \equiv g(x,y). \quad (12)$$

При $m = \infty$ формули (11), (12) визначають пряме $H_{n,(\mu)}^{(\infty)}$ і обернене $H_{n,(\mu)}^{-(\infty)}$ інтегральне перетворення типу Бохнера – Шестопала на рімановім многовиді $\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}$. При цьому для $m \in [2,\infty]$ справджуються тотожності

$$H_{n,(\mu)}^{(m)}\left[\Delta_n[g]\right] = -\lambda^2\widetilde{g}, \quad H_{n,(\mu)}^{(m)}\left[\Delta_{(\mu)}[g]\right] = -\beta^2\widetilde{g}. \quad (13)$$

Тотожності (13) встановлено безпосередньо на основі рівностей

$$\begin{gathered}\Delta_n j_{(n-2)/2}(\lambda R) = -\lambda^2 j_{(n-2)/2}(\lambda R),\\ \Lambda_{(\mu)}\left[P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(\operatorname{ch} y)\right] = -\beta^2 P_{-1/2+i\beta}^{(\mu)}(\operatorname{ch} y).\end{gathered} \quad (14)$$

Рівності (14) виконуються згідно з диференціальними рівняннями Бесселя та Лежандра.

Запроваджені формулами (4), (5) та (11), (12) інтегральні перетворення називаються інтегральними перетвореннями з невідокремленими змінними.

Застосуємо наявні інтегральні перетворення з невідокремленими змінними для побудови фундаментальних розв'язків задачі Коші для строго $\Lambda_{(\mu)}$-гіперболічних за І. Г. Петровським інваріантних щодо групи обертань $O(n)$ навколо початку координат в E_n рівнянь та систем рівнянь.

2. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для $\Lambda_{(\mu)}$-гіперболічних інваріантних рівнянь. Розглянемо в $E_{n+2}^+ \equiv [0,T]\times \overset{+}{E}_{n+1}$ диференціальне рівняння

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\Delta_n,\Lambda_{(\mu)}\Big)u \equiv \sum_{k=0}^{\ell} A_k\left(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)}\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0, \quad (15)$$

де $A_\ell = 1$, $A_k(z_1,z_2)$ зображується скрізь збіжними рядами у просторі C^2 комплексних змінних (z_1,z_2).

Означення 1. *Диференціальне рівняння (15) називається строго $\Lambda_{(\mu)}$-гіперболічним за І. Г. Петровським, якщо корені характеристичного рівняння*

$$P_\ell(z,-\lambda^2,-\beta^2) \equiv \sum_{k=0}^{\ell} A_k(-\lambda^2,-\beta^2)z^k = 0 \quad (16)$$

чисто уявні і симетричні щодо точки $z = 0$, тобто $z_j = \pm i\gamma_j(-\lambda^2,-\beta^2)$.

Із означення випливає, що число $\ell = 2\ell_1$ є парним.

Означення 2. *Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (15) назвемо узагальнену функцію $G(t,x,\xi,y,\eta)$, яка при $t>0$ задовольняє рівняння (15) у сенсі узагальнених функцій, а при $t=0$ — початкові умови*

$$\frac{\partial^k G}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \begin{cases} 0, & k=\overline{0,\ell-2}, \\ \delta_{(\xi,\eta)}, & k=\ell-1. \end{cases} \tag{17}$$

Застосуємо до рівняння (15) і рівностей (17), замінивши $\delta_{(\xi,\eta)}$ на достатньо гладку функцію $g(x,y)$, інтегральний оператор $H_{n,(\mu)}$за правилом (4). Згідно з тотожностями (14) одержимо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння:

$$L\left(\frac{d}{dt},-\lambda^2,-\beta^2\right)\tilde{u} \equiv \sum_{k=0}^{\ell} A_k(-\lambda^2,-\beta^2)\frac{d^k\tilde{u}}{dt^k} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d^j\tilde{u}}{dt^j}\bigg|_{t=0} = \begin{cases} 0, & k=\overline{0,\ell-2}, \\ \tilde{g}, & k=\ell-1. \end{cases} \tag{19}$$

Розглянемо функцію

$$v(t,-\lambda^2,-\beta^2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{zt}dz}{P_\ell(z,-\lambda^2,-\beta^2)}, \tag{20}$$

де γ — контур Жордана, що охоплює всі корені характеристичного рівняння (16) у z-комплексній площині.

Оскільки

$$L\Big(\frac{d}{dt},-\lambda^2,-\beta^2\Big)v(t,-\lambda^2,-\beta^2) = \sum_{k=0}^{\ell} A_k(-\lambda^2,-\beta^2)\frac{d^k v(t,-\lambda^2,-\beta^2)}{dt^k} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{zt}dz \equiv 0, \tag{21}$$

то функція $v(t,-\lambda^2,-\beta^2)$, визначена формулою (20), задовольняє рівняння (18).

Далі, оскільки

$$\frac{d^j v}{dt^j}\bigg|_{t=0} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{z^j dz}{P_\ell(z,-\lambda^2,-\beta^2)} = \begin{cases} 0, & j=\overline{0,\ell-2}, \\ 1, & j=\ell-1, \end{cases} \tag{22}$$

то функція

$$\tilde{u}(t,\lambda,x,\beta) = v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\tilde{g}(\lambda,x,\beta)$$

задовольняє рівняння (18) і початкові умови (19), тобто є розв'язком задачі Коші (18), (19).

Застосуємо до функції $\widetilde{u}(t,x,\lambda,\beta)$ інтегральний оператор $H^{-1}_{n,(\mu)}$ за правилом (5). Після елементарних перетворень, вважаючи їх законними, одержимо функцію

$$u(t,x,y) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \tilde{u}(t,\lambda,x,\beta)P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta =$$

$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_{E_n} g(\xi,\eta)\left(\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)j_{(n-2)/2}\left(\lambda R(x,\xi)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta\right)\operatorname{sh}\eta\, d\xi\, d\eta \equiv \int\limits_0^\infty\int\limits_{E_n} g(\xi,\eta)G(t;x,\xi;y,\eta)\operatorname{sh}\eta\, d\xi\, d\eta. \qquad (23)$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 1. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші (15), (17) визначається формулою*

$$G(t;x,\xi;y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda\, d\beta. \qquad (24)$$

Доведення. Згідно з тотожностями (14) і умовами на A_k одержуємо

$$A_k\Big(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)}\Big)\Big[j_{(n-2)/2}(\lambda R)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\Big] = A_k(-\lambda^2,-\beta^2)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta).$$

Тоді згідно з тотожністю (21) при $t>0$ безпосередньо маємо

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\Delta_n,\Lambda_{(\mu)}\right)G = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left(\sum_{k=0}^{\ell}A_k(-\lambda^2,-\beta^2)\frac{d^k v}{dt^2}\right)\times$$

$$\times\, j_{(n-2)/2}(\lambda R)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta \equiv 0.$$

Рівності (17) виконуються згідно з рівностями (22) та інтегральним зображенням (3) міри Дірака.

За викладеною вище логічною схемою доведено таке твердження.

Теорема 2. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (15) на рімановім многовиді $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+2}$ визначається формулою*

$$G_{(m)}(t,x,\xi,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\Phi_{(m)}(\lambda,R,\varphi-\varphi_0)\times$$

$$\times\,\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta. \qquad (25)$$

Теорема 3. *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (15) на рімановім многовиді* $\overset{+(\infty)}{R}_{n+2}$ *визначається формулою*

$$G_{(\infty)}(t,x,\xi,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\Phi_{(\infty)}(\lambda,R,\varphi-\varphi_0)\times$$

$$\times\,\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta. \tag{26}$$

Приклад. Розглянемо рівняння коливань з узагальненим оператором Лежандра

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_n u + \Lambda_{(\mu)}[u]. \tag{27}$$

Для цього рівняння функція

$$v(t,-\lambda^2,-\beta^2) = \frac{\sin\sqrt{\lambda^2+\beta^2}t}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}.$$

Згідно з формулами (24), (25) та (26) маємо:

а) класичний (звичайний) фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (27)

$$G(t,x,\xi,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda^2+\beta^2}t}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}} j_{(n-2)/2}(\lambda R)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta; \tag{28}$$

б) m-розгалужений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (27)

$$G_{(m)}(t,R,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda^2+\beta^2}t}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}\Phi_{(m)}(\lambda,R,\varphi-\varphi_0)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta; \tag{29}$$

в) нескінченно розгалужений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (27)

$$G_{(\infty)}(t,R,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda^2+\beta^2}t}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}\Phi_{(\infty)}(\lambda,R,\varphi-\varphi_0)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta. \tag{30}$$

Зауважимо, що наявність фундаментального розв'язку задачі Коші дозволяє побудувати розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння (15) з початковими умовами (27). При цьому потрібно диференціювати розбіжний інтеграл (24) певну кількість разів. Необхідну регуляризацію інтеграла можна виконати, наприклад, так. Замість функції $v(t,-\lambda^2,-\beta^2)$ розглянемо функцію

$$V(t,-\lambda^2,-\beta^2) = \sum\frac{(-1)^{P_r}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{e^{zt}dz}{z^{P_r}P_\ell(z,-\lambda^2,-\beta^2)}, \tag{31}$$

де контур γ_r охоплює лише один корінь характеристичного рівняння (16), а підсумовування проводиться за всіма коренями цього рівняння. Внаслідок гіперболічності рівняння завжди можна вибрати такі цілі числа P_r, що інтеграли

$$\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty V(t,-\lambda^2,-\beta^2)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta \tag{32}$$

будуть збіжними.

Інтегральне зображення (24) фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (15) набирає вигляду

$$G(t,R,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}D_t^{P_r}(-1)^{P_r}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{e^{zt}dz}{z^{P_r}P_\ell(z^2,-\lambda^2,-\beta^2)}\right)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\times$$
$$\times\,\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta.$$

У противному разі фундаментальний розв'язок G задачі Коші (15), (17), визначений формулою (24), слід розглядати як узагальнену функцію.

3. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для $\Lambda_{(\mu)}$-гіперболічних інваріантних систем. Розглянемо $\Lambda_{(\mu)}$-гіперболічну за І. Г. Петровським інваріантну за змінною $x = (x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ щодо групи обертань навколо початку координат простору E_n систему

$$A\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x, \Lambda_{(\mu)}\right)u \equiv \sum_{k=0}^{m} A^{(k)}\left(D_x,\Lambda_{(\mu)}\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0. \tag{33}$$

Тут $D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n},\right)$, $u = (u_1,u_2,\ldots,u_\ell)$, $A^{(k)} = \left\{A_{ij}^{(k)}\right\}_{i,j=1}^{\ell}$, $A^{(m)} = E_\ell$ — одинична матриця розміру $\ell\times\ell$.

Означення 3. *Система (33) називається інваріантною по x щодо групи $O(n)$, якщо характеристичний многочлен системи (31) має вигляд*

$$\det A(z,-i\lambda,-\beta^2) \equiv \sum_{k=0}^{m\ell}\Phi_k(-\lambda^2,-\beta^2)z^k \equiv \Phi(z,-\lambda^2,-\beta^2), \tag{34}$$

де $i\lambda = (i\lambda_1, i\lambda_2,\ldots,i\lambda_n)$, $\lambda^2 = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2$, $\Phi_{m\ell} = 1$.

Інваріантна система (33) має властивість, яка полягає в тому, що завжди існує єдина диференціальна матриця

$$\Theta = \sum_{k=0}^{m(\ell-1)}\Theta^{(k)}(D_x,\Lambda_{(\mu)})\frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad \Theta^{m(\ell-1)} = E_{\ell-1},$$

така, що заміна $u = \Theta v$ зводить систему (33) до діагональної форми

$$Au = A\Theta v = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}, \Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\right) E_\ell v. \tag{35}$$

Внаслідок гіперболічності системи корені характеристичного рівняння

$$\Phi(z, -\lambda^2, -\beta^2) = 0 \tag{36}$$

при достатньо великих $(\lambda, \beta) \in E_2$ справджують оцінки

$$\left| z_k(-\lambda^2, -\beta^2) \right| \ge b(\lambda^2 + \beta^2)^\mu, \quad b \ge b_0 > 0, \quad \mu \ge \mu_0 > 0.$$

Теорема 4. *Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші в півпросторі* $[0, T] \times \times \overset{+}{E}_{n+1}$ *для системи (33) визначається формулою*

$$G(t, x, \xi, y, \eta) = \Theta G_0(t, R, y, \eta),$$

де $G_0(t, R, y, \eta)$ — *фундаментальний розв'язок задачі Коші для гіперболічного рівняння*

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}, \Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\right) v = 0. \tag{37}$$

Доведення. Безпосередньо маємо

$$AG = A\Theta G_0 = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}, \Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\right) G_0 E_\ell \equiv 0.$$

Виконання умов

$$\lim_{t \to +0} \frac{\partial^k G}{\partial t^k} = \begin{cases} 0, & k = \overline{0, m-2}, \\ \delta_{(\xi,\eta)}, & k = m-1, \end{cases}$$

випливає із (35), тотожностей

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{z^k dz}{\Phi(z, -\lambda^2, -\beta^2)} = \begin{cases} 0, & k = \overline{0, m\ell - 2}, \\ 1, & k = m\ell - 1, \end{cases}$$

та інтегрального зображення (3) міри Дірака.

Розглянемо випадок рівномірного многовиду $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+2} = [0, T] \times \overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}$.

Означення 4. *m-Розгалуженою фундаментальною матрицею розв'язків задачі Коші* $G_{(m)}(t, x, \xi, y, \eta)$ *з гіперплощиною розгалуження* $(0, 0) \times E_n$ *називається така фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для системи (33), яка в* $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+2}$ *визначена скрізь, окрім гіперплощини розгалуження, і справджує умови:*

1) $G_{(m)}(t,x,\xi,y,\eta)$ має в $\overset{+(m)}{R}_{n+2}$ одну характеристичну особливість у точці $(0,\xi,\eta)$, яка належить $\overset{+(1)}{E}_{n+2}$;

2) $G_{(m)}$ нескінченно диференційовна в узагальненому розумінні скрізь, окрім точки $(0,\xi,\eta)$ і гіперплощини розгалуження;

3) $\sum\limits_{k=1}^{m} G_{(m)}(t,x,\xi^k,y,\eta) = G(t,x,\xi,y,\eta)$ $\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} G_{(\infty)}(t,x,\xi^k,y,\eta) = G(t,x,\xi,y,\eta)\right)$, де точка $(t,\xi^1,\eta) \equiv (t,\xi,\eta)$, точки $(t,\xi^k,\eta) \in \overset{+(m)}{R}_{n+2}$ знаходяться на тому ж місці, що й точка (t,ξ,η), але в $\overset{+(k)}{R}_{n+2}$, а $G(t,x,\xi,y,\eta)$ — звичайна фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші.

Теорема 5. *Якщо $G^0_{(m)}(t,R,y,\eta)$ — m-розгалужений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (37), то m-розгалужена фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для системи (33) визначається формулою*

$$G_{(m)}(t,x,\xi,y,\eta) = \Theta\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x, \Lambda_{(\mu)}\right) G^0_{(m)}(t,R,y,\eta).$$

Теорема 6. *Якщо $G^0_{(\infty)}(t,R,y,\eta)$ — нескінченно розгалужений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (37), то нескінченно розгалужена фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для системи (33) визначається формулою*

$$G_{(\infty)}(t,x,\xi,y,\eta) = \Theta\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x, \Lambda_{(\mu)}\right) G^0_{(\infty)}(t,R,y,\eta).$$

Доведення проводиться за логічною схемою роботи [8].

Зауважимо, що без залучення нових ідей одержані в даній роботі результати переносяться на оператори вигляду $A\Big(t, \partial/\partial t, D_x, \Lambda_{(\mu)}\Big)$.

1. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965. — 328 с.
2. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965. — Т. 1. — 296 с.
3. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Інтегральні перетворення типу Мелера – Фока. — Чернівці: Прут, 2002. — 248 с.
4. *Вирченко Н. А., Федотова И. А.* Обобщенные функции Лежандра и их применение. — Киев, 1998. — 158 с.
5. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. — М.: Мир, 1965. — 412 с.
6. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. — Харьков: Выща шк., 1984. — 120 с.
7. *Шестопал А. Ф.* Интегральные преобразования с неразделенными переменными. — Киев, 1973. — 46 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 73.6).
8. *Ленюк М. П.* Розгалужені фундаментальні розв'язки задачі Коші для інваріантних параболічних рівнянь і систем рівнянь // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. — 1995. — Вип. 8. — С. 105 – 114.

Одержано 03.02.2005