УДК 517.925.44

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Л. А. Кириллова

Одес. эконом. ун-т

We study the asymptotics of unbounded solutions of the equations $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y)$, where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$, is a continuous function, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, and $\varphi : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$ is a twice continuously differentiable function that, in some sense, is close to the power function.

Досліджується питання про асимптотику необмежених розв'язків диференціальних рівнянь вигляду $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y)$, де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, — неперервна функція, а $\varphi : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$ — двічі неперервно диференційовна функція, у деякому сенсі близька до степеневої.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$ — непрерывная функция, $\varphi : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{y\to+\infty} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{y\to+\infty} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma \notin \{0, \pm\infty\}. \tag{2}$$

Из условий (2) следует

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \sigma + 1. \tag{3}$$

Этому условию заведомо удовлетворяет степенная функция $\varphi(y) = y^{\sigma+1}$. В этом случае уравнение (1) называют обобщенным уравнением Эмдена – Фаулера. Асимптотическое поведение его решений достаточно подробно исследовано в работах [1 – 6] (см. также монографию [7, с. 326 – 401], гл.V).

В случае, когда функция φ отлична от степенной и в некотором смысле близка к функциям со свойством (3), для уравнения (1) в [8] получены лишь отдельные результаты об асимптотическом поведении неограниченных решений.

Решение y уравнения (1), заданное на промежутке $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, будем называть $P_\omega(\lambda_0)$-решением, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{4}$$

© Л. А. Кириллова, 2005

Вопрос об асимптотике $P_\omega(\lambda_0)$-решений уравнения (1) при $\lambda_0 \notin \{0, 1, \pm\infty\}$ исследован в [9]. Наиболее сложными для изучения являются $P_\omega(\lambda_0)$-решения, для которых $\lambda_0 = 0, 1, \pm\infty$. Настоящая статья посвящена $P_\omega(1)$-решениям уравнения (1).

Введем вспомогательное обозначение:

$$\Phi(y) = \int\limits_{Y_0}^{y} \frac{dz}{\varphi(z)}, \quad \text{где} \quad Y_0 = \begin{cases} y_0, & \text{если} \displaystyle\int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)} = +\infty, \\ +\infty, & \text{если} \displaystyle\int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)} = +\infty. \end{cases} \tag{5}$$

Из (3) следует, что при $y \to +\infty$ $\varphi(y)$ представима в виде $y^{\sigma+1+o(1)}$. Поэтому $\displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)}$ расходится, если $\sigma < 0$, и сходится, если $\sigma > 0$. В силу (5) Φ строго монотонна на промежутке $[y_0, +\infty[$ и

$$\lim_{y \to +\infty} \Phi(y) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \ \sigma < 0, \\ 0, & \text{если} \ \sigma > 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для функции Φ существует обратная функция Φ^{-1}, заданная на промежутке $[0, +\infty[$, если $\sigma < 0$, или на промежутке $[c_\varphi, 0[$, где $c_\varphi = -\displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)}$, если $\sigma > 0$, причем

$$\lim_{z \to +\infty} \Phi^{-1}(z) = +\infty \quad \text{при} \quad \sigma < 0, \quad \lim_{z \uparrow 0} \Phi^{-1}(z) = +\infty \quad \text{при} \quad \sigma > 0. \tag{6}$$

Теорема. *Для существования $P_\omega(1)$-решений уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\alpha_0 = 1, \quad \sigma I(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{p(t) \displaystyle\int_{A_2}^{t} I(\tau)\, d\tau}{(I(t))^2} = 1, \tag{7}$$

где

$$I(t) = \int\limits_{A_1}^{t} p(\tau)\, d\tau,$$

$$A_1 = \begin{cases} a, & \textit{если} \displaystyle\int\limits_{a}^{\omega} p(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \textit{если} \displaystyle\int\limits_{a}^{\omega} p(\tau)\, d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad A_2 = \begin{cases} a, & \textit{если} \displaystyle\int\limits_{a}^{\omega} |I(\tau)|\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \textit{если} \displaystyle\int\limits_{a}^{\omega} |I(\tau)|\, d\tau < +\infty. \end{cases} \tag{8}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = \frac{\sigma^2 I^2(t)}{p(t)}[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{p(t)}{\sigma I(t)}[1+o(1)]. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_y, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — $P_\omega(1)$-решение уравнения (1). Тогда в силу третьего из условий (4)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = 1. \tag{10}$$

Поскольку y сохраняет знак в левой окрестности ω, отсюда, согласно (1), следует первое из условий (7). Далее, так как

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))}\right)' = \frac{y''(t)}{\varphi(y(t))}\left[1 - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\frac{y(t)\varphi'(y(t))}{\varphi(y(t))}\right],$$

ввиду (3) и (10)

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))}\right)' = -\sigma\frac{y''(t)}{\varphi(y(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому с учетом (1) получаем

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))}\right)' = -\sigma p(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение по промежутку $[t_y, t] \subset [t_y, \omega[$, имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} - \frac{y'(t_y)}{\varphi(y(t_y))} = -\sigma\int_{t_y}^{t} p(\tau)\,[1+o(1)]d\tau. \tag{11}$$

Если $\int_a^\omega p(\tau)\,d\tau = +\infty$, то (11) запишется в виде

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = -\sigma\int_a^t p(\tau)\,d\tau[1+o(1)].$$

В случае, когда $\int_a^\omega p(\tau)\,d\tau < +\infty$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = \text{const}$. Покажем, что значением этого предела может быть только нуль. Действительно, если бы $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = c \neq 0$, то из (1) получили бы равенство

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p(t)}{c}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это равенство по промежутку $[t_y, t] \in [t_y, \omega[$, имеем

$$\ln\left|\frac{y'(t)}{y'(t_y)}\right| = \frac{1}{c}\int\limits_{t_y}^{t} p(\tau)[1+o(1)]\,d\tau.$$

Однако последнее соотношение противоречит второму из условий (4). Поэтому $c = 0$ и (11) в данном случае принимает вид

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = -\sigma\int\limits_{\omega}^{t} p(\tau)\,d\tau[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Таким образом, с учетом обозначения $I(t)$ имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = -\sigma I(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{12}$$

Поскольку $y'(t) > 0$ в некоторой левой окрестности ω, отсюда следует второе из условий (7).

Проинтегрировав теперь (12) по промежутку $[t_y, t] \in [t_y, \omega[$, получим

$$\int\limits_{y(t_y)}^{y(t)} \frac{dz}{\varphi(z)} = -\sigma\int\limits_{t_y}^{t} I(\tau)[1+o(1)]\,d\tau. \tag{13}$$

В силу первого из условий (4) интеграл слева при $\sigma < 0$ расходится, и поэтому (13) примет вид

$$\int\limits_{y_0}^{y(t)} \frac{dz}{\varphi(z)} = -\sigma\int\limits_{a}^{t} I(\tau)\,d\tau[1+o(1)].$$

Если $\sigma > 0$, то ввиду первого из условий (4)

$$\int\limits_{y(t_y)}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)} = -\sigma\int\limits_{t_y}^{\omega} I(\tau)[1+o(1)]\,d\tau = \text{const}.$$

В этом случае (13) запишем в виде

$$\int\limits_{+\infty}^{y(t)} \frac{dz}{\varphi(z)} = -\sigma\int\limits_{\omega}^{t} I(\tau)\,d\tau[1+o(1)].$$

Поэтому с учетом (5) будем иметь

$$\Phi(y(t)) = -\sigma\int\limits_{A_2}^{t} I(\tau)\,d\tau[1+0(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{14}$$

где A_2 определено в (8).

Соотношение (10) ввиду (1) и (12) равносильно условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{[\sigma I(t)\varphi(y(t))]^2}{y(t)p(t)\varphi(y(t))}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'(t)\,[-\sigma I(t)\varphi(y(t))]}{y(t)p(t)\varphi(y(t))}=1.$$

Из этих двух предельных соотношений следуют первое и второе асимптотические представления (9).

Осталось установить справедливость последнего из условий (7).

В силу (12)

$$y'(t)=-\sigma I(t)\varphi(y(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{15}$$

Используя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{\Phi(y)\varphi(y)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{y}{\varphi(y)}\right)'}{\Phi'(y)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\varphi(y)}\left(1-\dfrac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)}{\dfrac{1}{\varphi(y)}}=-\sigma. \tag{16}$$

Поэтому в силу (15) и первого из условий (4)

$$y'(t)=\frac{I(t)y(t)}{\Phi(y(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда, учитывая (14), получаем

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{1}{\sigma}I(t)\left(\int\limits_{A_2}^{t}I(\tau)\,d\tau\right)^{-1}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Сравнивая последнее соотношение со вторым из представлений (9), приходим к выводу, что выполняется третье из условий (7). Необходимость установлена.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (8). Полагая $\beta=-\operatorname{sign}\sigma$, уравнение (1) с помощью преобразования

$$\begin{gathered}\Phi(y(t))=-\sigma\int\limits_{A_2}^{t}I(\tau)\,d\tau[1+z_1(x)],\\ \frac{y'(t)}{y(t)}=-\frac{I(t)}{\sigma\int_{A_2}^{t}I(\tau)\,d\tau}[1+z_2(x)], \quad x=\beta\ln\left|\int\limits_{A_2}^{t}I(\tau)\,d\tau\right|\end{gathered} \tag{17}$$

сводим к системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
z_1' &= \beta\left[-1 - z_1 + \frac{F(x,z_1)}{\sigma^2}(1+z_2)\right],\\
z_2' &= \beta\left[-P(x)\left(1 + z_2 + \frac{\sigma}{F(x,z_1)}\right) + \frac{\sigma+1}{\sigma} + \frac{\sigma+2}{\sigma}z_2 + \frac{z_2^2}{\sigma}\right],
\end{aligned}
\tag{18}
$$

в которой

$$
F(x,z_1) = \frac{Y(t(x),z_1)}{\displaystyle\int_{A_2}^{t(x)} I(\tau)\,d\tau\,\varphi(Y(t(x),z_1))}, \quad Y(t,z_1) = \Phi^{-1}\left(-\sigma\int\limits_{A_2}^{t} I(\tau)\,d\tau\,(1+z_1)\right),
$$

$$
P(x) = \frac{p(t(x))\displaystyle\int_{A_2}^{t(x)} I(\tau)\,d\tau}{I^2(t(x))}.
$$

В силу второго и третьего из условий (7) $\sigma\displaystyle\int_{A_2}^{t}|I(\tau)|\,d\tau < 0$. Поэтому, учитывая правила выбора пределов интегрирования, указанные в (8), имеем

$$
A_1 = A_2 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \sigma < 0,\\ \omega, & \text{если} \quad \sigma > 0. \end{cases}
$$

С учетом выбора β функция $x(t)$ имеет свойство $\lim\limits_{t\uparrow\omega} x(t) = +\infty$. Выберем число $t_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы $\beta\ln\left|\displaystyle\int_{A_2}^{t_0} I(\tau)\,d\tau\right| \geq 1$ и в случае $\sigma > 0$ выполнялось неравенство

$$
2\sigma\int\limits_{t_0}^{\omega}\int\limits_{t_0}^{\omega} p(z)\,dz\,d\tau \leq \int\limits_{y_0}^{+\infty}\frac{dz}{\varphi(z)}.
$$

Теперь, зафиксировав произвольным образом $\delta \in]0,1[$, рассмотрим полученную систему дифференциальных уравнений на множестве

$$
\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \quad \text{где} \quad x_0 = \beta\ln\left|\int\limits_{A_2}^{t_0} I(\tau)\,d\tau\right|, \quad D = \{(z_1,z_2) : |z_i| \leq \delta,\ i = 1,2\}.
$$

На этом множестве правые части системы (18) являются непрерывными функциями по переменной x и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным z_1, z_2.

Разложив при каждом фиксированном $x \in [x_0, +\infty[$ функции $F(x, z_1)$ и $\dfrac{1}{F(x, z_1)}$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности $z_1 = 0$ до второго порядка включительно, перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} z_1' &= F_1(x) + A_{11}(x)z_1 + A_{12}(x)z_2 + R_1(x, z_1, z_2), \\ z_2' &= F_2(x) + A_{21}(x)z_1 + A_{22}(x)z_2 + R_2(x, z_1, z_2), \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$F_1(x) = \beta\left[-1 + \frac{F(x,0)}{\sigma^2}\right], \quad F_2(x) = \beta\left[-P(x)\left(1 + \frac{\sigma}{F(x,0)}\right) + \frac{\sigma+1}{\sigma}\right],$$

$$A_{11}(x) = \beta\left[-1 + \frac{1}{\sigma}(M_1(x,0) - 1)\right], \quad A_{12}(x) = \beta\frac{F(x,0)}{\sigma^2},$$

$$A_{21}(x) = \beta\left[-\sigma^2\frac{P(x)}{F^2(x,0)}(1 - M_1(x,0))\right], \quad A_{22}(x) = \beta\left[-P(x)\left(1 + \frac{\sigma}{F(x,0)}\right) + \frac{\sigma+2}{\sigma}\right],$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = \beta\left[\frac{1}{\sigma}(M_1(x,0) - 1)z_1z_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2F(x,\theta_1)}(-M_1(x,\theta_1) - M_1(x,\theta_1)M_2(x,\theta_1) + M_1^2(x,\theta_1))z_1^2(1 + z_2)\right],$$

$$R_2(x, z_1, z_2) = \beta\left[\frac{z_2^2}{\sigma} - \frac{\sigma^2 P(x)}{F^2(x,0)}(1 - M_1(x,0))z_1z_2 - \frac{\sigma^3 P(x)}{F^3(x,\theta_2)}(M_1^2(x,\theta_2) + \right.$$

$$\left. + M_1(x,\theta_2)M_2(x,\theta_2) - 3M_1(x,\theta_2) + 2)z_1^2(1 + z_2)\right],$$

$$M_1(x,\theta) = \frac{Y(t(x),\theta)\varphi'(Y(t(x),\theta))}{\varphi(Y(t(x),\theta))}, \quad M_2(x,\theta) = \frac{Y(t(x),\theta)\varphi''(Y(t(x),\theta))}{\varphi'(Y(t(x),\theta))},$$

$$|\theta_i| \le |z_1|, \ i = 1, 2.$$

В силу выбора δ и свойств (6) функции Φ^{-1} $\lim\limits_{x\to+\infty} Y(t(x),\theta) = +\infty$ при $|\theta| \le \delta$. Поэтому, учитывая (2) и (3), имеем

$$\lim_{x\to+\infty} M_1(x,\theta) = \sigma + 1, \quad \lim_{x\to+\infty} M_2(x,\theta) = \sigma \quad \text{при} \quad |\theta| \le \delta. \tag{20}$$

Кроме того, с использованием правила Лопиталя находим

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,0) = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\dfrac{Y(t,0)}{\varphi(Y(t,0))}\right]'}{I_1(t)} = \sigma^2.$$

Отсюда и из последнего из условий (7) следует

$$\lim_{x \to +\infty} F_i(x) = 0, \quad i = 1, 2,$$

и предельная матрица коэффициентов линейной части системы (19) имеет вид

$$A = \lim_{x \to +\infty} \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \dfrac{\beta}{\sigma} & \dfrac{\beta}{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Использовав для функции $F(x, z_1)$ при каждом фиксированном $x \in [x_0, +\infty[$ формулу Лагранжа в окрестности $z_1 = 0$, получим представление

$$\frac{1}{F(x, z_1)} = \frac{1}{F(x, 0)} \; \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma}{F(x, 0)}(M_1(x, \xi) - 1) z_1},$$

из которого следует, что существуют $x_1 \geq x_0, \delta_1 \in]0, \delta]$ такие, что функция $\dfrac{1}{F(x, z_1)}$ ограничена при $x \in [x_1, +\infty[, |z_1| \leq \delta_1$. Учитывая этот факт, (20) и третье из условий (7), приходим к выводу, что

$$\lim_{|z_1| + |z_2| \to 0} \frac{R_i(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_1, +\infty[.$$

Записывая для матрицы A характеристическое уравнение $\det[A - \mu E_2] = 0$, где E_2 — единичная матрица второго порядка, получаем

$$\sigma \mu^2 - \beta \mu - 1 = 0.$$

Поскольку $\sigma \neq 0$, корни этого уравнения имеют вид $\mu_{1,2} = \dfrac{\beta \pm \sqrt{1 + 4\sigma}}{2\sigma}$. Значит, характеристическое уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью, поэтому для системы дифференциальных уравнений (19) выполнены все условия теоремы 2.1 из [10]. Согласно этой теореме система (19) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x_2 \geq x_1$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Ему в силу замен (17) соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\Phi(y(t)) = -\sigma \int_{A_2}^{t} I(\tau)\, d\tau [1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{I(t)}{\sigma \int_{A_2}^{t} I(\tau)\, d\tau} [1 + o(1)]. \tag{21}$$

В силу последнего из условий (7) второе из записанных соотношений можно представить в виде второй формулы (9).

С учетом (16) заметим, что

$$\Phi(y(t)) = -\frac{y(t)}{\sigma\varphi(y(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда, согласно последнему из условий (7), первое из соотношений (21) запишется в виде первого из представлений (9).

Используя установленные асимптотические представления для отношений $\dfrac{y(t)}{\varphi(y(t))}$, $\dfrac{y'(t)}{y(t)}$ и условия (8), нетрудно убедиться в том, что y является $P_\omega(1)$-решением уравнения (1).

В качестве иллюстрации полученного результата рассмотрим дифференциальное уравнение со степенно-логарифмической нелинейностью вида

$$y'' = \alpha_0 e^{\gamma t} Q(t) y^{\sigma+1} \ln^\mu y, \tag{22}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\gamma \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $Q : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{tQ'(t)}{Q(t)} = q_0 = \text{const}.$$

В данном случае $\omega = +\infty$, $p(t) = e^{\gamma t}Q(t)$, $\varphi(y) = y^{\sigma+1}\ln^\mu y$.

Поскольку $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{\gamma t} Q(t)\,dt = \int_a^{+\infty} e^{\gamma t} t^{q_0+o(1)}\,dt$ расходится при $\gamma > 0$ и сходится при $\gamma < 0$, то

$$A_1 = \begin{cases} a, & \text{если } \gamma > 0, \\ +\infty, & \text{если } \gamma < 0, \end{cases} \tag{23}$$

и $I(t) = \displaystyle\int_{A_1}^{t} e^{\gamma\tau} Q(\tau)\,d\tau$.

Согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\gamma t}Q(t)}{\gamma I(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\gamma e^{\gamma t}Q(t) + e^{\gamma t}Q'(t)}{\gamma e^{\gamma t}Q(t)} = \lim_{t\to+\infty} \left[1 + \frac{tQ'(t)}{Q(t)}\frac{1}{\gamma t}\right] = 1.$$

Поэтому

$$I(t) \sim \frac{1}{\gamma} e^{\gamma t} Q(t) \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{24}$$

Аналогично получаем

$$A_2 = \begin{cases} a, & \text{если } \gamma > 0, \\ +\infty, & \text{если } \gamma < 0, \end{cases}$$

и

$$\int\limits_{A_2}^{t} I(\tau)\,d\tau \sim \frac{1}{\gamma^2} e^{\gamma t} Q(t) \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{25}$$

Уравнение (22) имеет $P_{+\infty}(1)$-решения тогда и только тогда, когда выполняются условия (7). Второе из этих условий, ввиду (23), принимает вид неравенства $\gamma\sigma < 0$. Выполнение же последнего из условий (7) непосредственно следует из (24) и (25).

При выполнении указанных условий каждое такое решение $y : [t_y, +\infty[\to]0, +\infty[$ допускает при $t \to +\infty$ асимптотические представления

$$(y(t))^{\sigma} \ln^{\mu} y(t) = \frac{\gamma^2}{\sigma^2 e^{\gamma t} Q(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{26}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{\gamma}{\sigma}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{27}$$

Интегрируя (27) по промежутку $[t_y, t] \subset [t_y, +\infty[$, получаем

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma}{\sigma} t + \varepsilon(t)}, \quad \text{где} \quad \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0. \tag{28}$$

Подставляя это значение $y(t)$ в (26), находим

$$e^{\sigma\varepsilon(t)} = \left(-\frac{\sigma}{\gamma t}\right)^{\mu} \frac{\gamma^2}{\sigma^2 Q(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Отсюда следует

$$\varepsilon(t) = -\frac{1}{\sigma} \ln[t^{\mu} Q(t)] + \ln\left(-\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{\frac{\mu-2}{\sigma}} + \varepsilon_1(t), \quad \text{где} \quad \lim_{t \to +\infty} \varepsilon_1(t) = 0.$$

Подставляя это уточнение $\varepsilon(t)$ в (28), получаем асимптотическое представление для $y(t)$ в виде

$$y(t) = \left(-\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{\frac{\mu-2}{\sigma}} e^{-\frac{\gamma}{\sigma} t} t^{-\frac{\mu}{\sigma}} [Q(t)]^{-\frac{1}{\sigma}} [1 + o(1)]. \tag{29}$$

Из этого представления и (27) для $y'(t)$ получим представление вида

$$y'(t) = \left(-\frac{\sigma}{\gamma}\right)^{\frac{\mu-\sigma-2}{\sigma}} e^{-\frac{\gamma}{\sigma} t} t^{-\frac{\mu}{\sigma}} [Q(t)]^{-\frac{1}{\sigma}} [1 + o(1)]. \tag{30}$$

Таким образом, для существования $P_{+\infty}(1)$-решений уравнения (22) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_0 = 1$ и $\sigma\gamma < 0$. Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \to +\infty$ асимптотические представления (29), (30).

Выводы. В [11] для нелинейных дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями был выделен класс так называемых $P_\omega(\lambda_0)$-решений, допускающий установление точных асимптотических формул при всех возможных значениях λ_0.

В работе [9] идея этого подхода была распространена на случай уравнения (1). При этом были полностью исследованы $P_\omega(\lambda_0)$-решения, для которых $\lambda_0 \notin \{0, 1, \pm\infty\}$. Особенность случаев $\lambda_0 \in \{0, 1, \pm\infty\}$ заключается в существенном изменении характера роста $P_\omega(\lambda_0)$-решений.

В настоящей статье установлены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(1)$-решений уравнения (1), а также асимптотические при $t \uparrow \omega$ формулы для отношений $y(t)/\varphi(y(t))$ и $y'(t)/y(t)$. Как показано на примере уравнения (22), полученные представления в случае конкретного вида функции φ позволяют установить асимптотические формулы непосредственно для y и y'.

1. *Кигурадзе И. Т.* Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — **29**, № 5. — С. 965 – 986.
2. *Костин А. В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена – Фаулера // Докл. АН СССР. — 1971. — **200**, № 1. — С. 28 – 31.
3. *Чантурия Т. А.* Об асимптотическом представлении решений уравнения $u'' = a(t)|u|^n \operatorname{sign} u$ // Дифференц. уравнения. — 1972. — **8**, № 7. — С. 1195 – 1206.
4. *Костин А. В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. — 1976. — **231**, № 5. — С. 1059 – 1062.
5. *Евтухов В. М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Докл. АН СССР. — 1977. — **233**, № 4. — С. 531 – 534.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. — 1982. — **106**, № 3. — С. 473 – 476.
7. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 432 с.
8. *Talliaferro S. D.* Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. — 1981. — **12**, № 6.
9. *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* Asymptotic representations for unbounded solutions of second order nonlinear differential equations close to equations of Emden – Fowler type // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 2003. — **30**. — P. 153 – 158.
10. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 433 – 444.
11. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. — 1992. — **234**, № 2. — С. 258 – 260.

Получено 20.12.2004