УДК 517 . 925.7

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ПОЛУЯВНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Шарай

Одес. нац. ун-т
Украина, 65000, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail:emden@farlep.net

We study the problem of existence of analytic solutions of a certain semiexplicit differential system and obtain sufficient conditions for existence of analytic solutions of the Cauchy problem in a vicinity of a singular point.

Досліджуються питання про існування аналітичних розв'язків деякої напів'явної системи диференціальних рівнянь. Одержано достатні умови існування аналітичних розв'язків задачі Коші навколо особливої точки.

1. Введение. Рассмотрим задачу Коши

$$A(z)Y' = B(z)Y + F(z, Y), \tag{1}$$

$$Y(z) \to 0 \text{ при } z \to 0 \tag{2}$$

где однозначные матрицы $A, B : D \to G_1 \times G_2$ размерности $m \times n$ аналитичны в области $D \subset C, 0 \in D$ или $0 \in \partial D$, $G_1 \times G_2 \subset C^{m\times n}$, $\operatorname{rang} A(0) = k$, $0 < k \le \min(m, n)$, $(0, 0) \in \partial(G_1 \times G_2)$, однозначная вектор-функция $F : D \times G_2 \to G_1$ аналитична в $D \times G_2$. Предположим, что $m \ne n$ и пучок матриц $A(z)\lambda + B(z)$ является сингулярным.

Исследования задач Коши вида (1) в вещественной области для линейных систем в случае постоянного пучка были начаты Ф. Гантмахером [1]. Эти исследования дали толчок для распространения исследований на случаи, когда пучок матриц $A(x)\lambda+B(x)$ является переменным. Интерес к таким исследованиям особенно возрос за последние десятилетия. В случае линейных и нелинейных вещественных систем вида (1) отметим работы [2 – 6]. В комплексной области конкретные системы вида (1) изучались во многих работах (см., например, [7]).

Целью настоящей работы является исследование вопросов о существовании аналитических решений задачи Коши (1), (2), удовлетворяющих условию

$$Y'(z) \to 0 \text{ при } z \to 0, \tag{3}$$

в случае сингулярного переменного комплексного пучка матриц $A(z)\lambda + B(z)$ системы (1), когда z приближается из некоторой области к особой точке $z = 0$.

В п. 2 доказывается вспомогательная лемма о ранге матрицы. В п. 3 формулируется постановка задачи. В п. 4 изучается задача (1) – (3) в случае, когда $m < n$ и часть компонент искомой вектор-функции имеют в точке $z = 0$ полюс k-го порядка, $k \in N$.

2. Лемма о ранге матрицы. Для исследования задачи Коши (1), (2) необходима следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть матрица* $A(z), A : D \to C^{m \times n}$ *аналитична в односвязной области* $D \subset C, 0 \in D$ *и* $\operatorname{rang} A(0) = k, 0 < k \le \min(m, n)$. *Тогда в* D *существует или область* D_{10} *(с точкой* $z = 0$ *на границе), или область* D_1 *(с точкой* $z = 0$ *внутри нее) такая, что ранг матрицы* $A(z)$ *остается постоянным соответственно при* $z \in D_{10}$ *или* $z \in \in D_1$ *и равен* k_1*, где* $k \le k_1 \le \min(m, n)$.

Доказательство. Поскольку матрица $A(z)$ однозначна и аналитична в области $D \subset C$, $0 \in D$ и в точке $z = 0$ имеет ранг, равный k, согласно определению ранга матрицы существует минор k-го порядка $A^{(k)}(z)$, который в точке $z = 0$ отличен от нуля, т. е. $A^{(k)}(0) \neq 0$, а все миноры более высокого порядка $A^{(k+j)}(0) = 0$ при $j = 1, \ldots \ldots, \min(m, n) - k$.

Далее, так как функция $A^{(k)}(z)$ аналитична в точке $z = 0$ и $A^{(k)}(0) \neq 0$, согласно свойству аналитической функции существует область $\widetilde{D} \subset D, \widetilde{D} = \{z : |z| < \widetilde{R}\}, \widetilde{R} > 0$, такая, что $A^{(k)}(z) \neq 0 \; \forall z \in \widetilde{D}$. Произвольный фиксированный минор $(k+1)$-го порядка $A^{(k+1)}(z)$ в точке $z = 0$ обращается в нуль. Могут возникать следующие ситуации: аналитическая функция $A^{(k+1)}(z)$ в точке $z = 0$ имеет нуль бесконечного или конечного порядка.

В случае, когда в точке $z = 0$ $A^{(k+1)}(z)$ имеет нуль бесконечного порядка, согласно теореме Тейлора найдется область $D_1 = \{z : |z| < R_1\}, R_1 > 0$, такая, что $A^{(k+1)}(z) \equiv 0$ $\forall z \in D_1$, а значит, все миноры более высоких порядков тождественно равны нулю в D_1. Следовательно, $A(z)$ в области D_1 имеет постоянный ранг, равный k.

В случае, когда в точке $z = 0$ $A^{(k+1)}(z)$ имеет нуль конечного порядка, $A^{(k+1)}(z)$ не равна тождественно нулю в окрестности точки $z = 0$, и согласно теореме о нулях аналитической функции существует область $D_{10} \subseteq D$, $D_{10} = \{z : 0 < |z| < \widetilde{R}_1\}, \widetilde{R}_1 > 0$, в которой $A^{(k+1)}(z) \neq 0 \; \forall z \in D_{10}$. Для продолжения исследований возникает необходимость рассмотрения произвольного фиксированного минора $A^{(k+2)}(z)$. Возможны два случая:

1) $A^{(k+2)}(z) \equiv 0$ в области вида D_1. В результате $\operatorname{rang} A(0) = k$, $\operatorname{rang} A(z) = k + 1$ в области вида D_{10}.

2) $A_{k+2}(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $z = 0$. Продолжая исследования, аналогичные проведенным выше, получаем $\operatorname{rang} A(0) = k$, $\operatorname{rang} A(z) = k_1$, $k < k_1 \le \le \min(m, n)$ в области вида D_{10}.

Итак, доказано, что либо

1) $\operatorname{rang} A(z) = k$ постоянен в области $D_1 = \{z : |z| < R_1\}, R_1 > 0$, либо

2) $\operatorname{rang} A(z) = k_1$, где $k < k_1 \le \min(m, n)$ в области $D_{10} = \{z : 0 < |z| < \widetilde{R}_1\}, \widetilde{R}_1 > 0$.

Лемма доказана.

3. Постановка задачи. Пусть матрица $A(z)$ аналитична в области D. Согласно лемме 1 матрица $A(z)$ имеет постоянный ранг или в области D_1, или в области D_{10}. В работе [8] рассмотрен случай, когда $m > n$, $\operatorname{rang} A(z) = \min(m, n)$ при $z \in D_1$. В данной работе задача Коши (1) исследуется в случае, когда $m < n$, $\operatorname{rang} A(z) = m$ при $z \in D_1 = \{z : |z| < R_1\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что матрицы $A(z), B(z)$ и вектор $f(z,Y)$ представимы в виде

$$A(z) = (A_1(z)A_2(z)),\ B(z) = (B_1(z)B_2(z)),$$
$$Y(z) = \begin{pmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{pmatrix},\ f(z,Y) = \widetilde{f}(z,Y_1,Y_2), \tag{4}$$

где $A_1 : D_1 \to C^{m\times m}$, $B_1 : D_1 \to C^{m\times m}$, $Y_1 \in C^m$, $\widetilde{f} : D_1 \times G_{21} \times G_{22} \to C^m$, $G_{21} \subset C^m$, $G_{22} \subset C^{n-m}$, $\det A_1(z) \neq 0\ \forall z \in D_1$.

Система (1) в соответствии с представлением (4) после домножения слева на $A_1^{-1}(z)$ принимает вид

$$Y_1' = A_1^{-1}(z)B_1(z)Y_1 + A_1^{-1}(z)(B_2(z)Y_2 - A_2(z)Y_2') + A_1^{-1}(z)\widetilde{f}(z,Y_1,Y_2). \tag{5}$$

Через H_0^q обозначим класс аналитических в области D_{10} функций размерности q, которые в точке $z = 0$ имеют устранимую особенность, через $H_{1,k}^q$ — класс аналитических в области D_{10} функций размерности q, которые в точке $z = 0$ имеют полюс k-го порядка, $k \in N$.

В настоящей работе изучается задача (1) – (3) в случае, когда система (1) приводится к виду (5) и вектор-функция $Y_2(z)$ принадлежит либо классу H_0^{n-m}, либо классу $H_{1,k}^{n-m}$.

В случае, когда функция $Y_2(z)$ принадлежит классу H_0^{n-m}, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) выполнены следующие условия:*

1) однозначная матрица $A : D \to C^{m\times n}$, $m < n$, аналитична в области D;

2) существует область $D_1 \subset D, 0 \in D_1$, такая, что в D_1 $\operatorname{rang} A(z) = m$, причем $A(z)$ представима в виде (4);

3) матрицы $A(z), B(z)$ и вектор-функция $f(z,Y)$ представимы в виде (4), причем матрицы $A_1^{-1}B_j(z), j = 1,2$, аналитичны в области D_{10} и в точке $z = 0$ имеют устранимую особую точку, а вектор-функция $\widetilde{f}(z,Y_1,Y_2)$ аналитична в $D_{10}\times G_{210}\times G_{220}, G_{2j0} = G_{2j}\backslash\{0\}, j = 1,2$, и в точке $(0,0,0)$ имеет изолированную особую точку.

Тогда система (1) для каждого $Y_2(z)$ из класса H_0^{n-m} имеет в области D_2, $D_2 \subseteq D_1$, $0 \in D_2$, единственное аналитическое решение $Y = Y(z)$, удовлетворяющее условию $Y(0) = 0$, и других, кроме аналитического, решений нет.

Однако более интересным является случай, когда Y_2 принадлежит классу $H_{1,k}^{n-m}$, к рассмотрению которого мы и переходим.

4. Случай, когда $Y_2(z)$ принадлежит классу $H_{1,k}^{n-m}$. В случае, когда функция Y_2 принадлежит классу $H_{1,k}^{n-m}$, представим ее в виде

$$Y_2(z) = z^{-k}\widetilde{Y}_2(z), \quad Y_2'(z) = -kz^{-k-1}\widetilde{Y}_2(z) + z^{-k}\widetilde{Y}_2'(z), \tag{6}$$

где вектор-функция $\widetilde{Y}_2(z)$ является аналитической в области D_1.

Предположим, что аналитическая в области $D_1 \times G_{21} \times G_{22}$ функция $\widetilde{f}(z,Y_1,Y_2)$ в разложении в окрестности точки (0,0,0) имеет конечное число слагаемых, содержащих Y_2. Представим вектор-функцию $\widetilde{f}(z,Y_1,z^{-k}\widetilde{Y}_2)$ в виде

$$\widetilde{f}(z,Y_1,z^{-k}\widetilde{Y}_2) = z^{-kl}\widetilde{F}(z,Y_1,\widetilde{Y}_2), \tag{7}$$

где $l \in N, l \geq 2,$ — число слагаемых в указанном разложении, содержащих $\widetilde{Y}_2$, а функция $\widetilde{F}(z, Y_1, \widetilde{Y}_2)$ аналитична всюду в области $D_1 \times G_{21} \times G_{22}$. В соответствии с (6) и (7) система (5) после домножения на z^{kl+1} принимает вид

$$z^{kl+1}Y_1' = z^{kl+1}P(z)Y_1 + z^{k(l-1)+1}Q(z)\widetilde{Y}_2 + kz^{k(l-1)}R(z)\widetilde{Y}_2 -$$

$$- z^{k(l-1)+1}R(z)\widetilde{Y}_2' + zF(z, Y_1, \widetilde{Y}_2), \tag{8}$$

где $P(z) = A_1^{-1}(z)B_1(z), Q(z) = A_1^{-1}(z)B_2(z), R(z) = A_1^{-1}(z)A_2(z), F(z, Y_1, \widetilde{Y}_2) = A_1^{-1}(z)\times$ $\times\widetilde{F}(z, Y_1, \widetilde{Y}_2)$.

Пусть на множестве $A = \{(t, \nu) : t \in (0, t_1], \nu \in [\nu_1, \nu_2]\}, \nu_1 < \nu_2$, заданы неотрицательные функции $p(t, \nu)$ и $g(t, \nu)$.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $p(t, \nu)$ имеет свойство Q относительно функции $g(t, \nu)$ на множестве A, если для каждого $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ функция $p(t, \nu)$ является функцией более высокого порядка малости, чем $g(t, \nu)$, при $t \to +0$.*

Определение 2. *Будем говорить, что функция $p(t, \nu)$ имеет свойство $Q_1(t_0)$ относительно функции $g(t, \nu)$ на множестве A, если для каждого $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1|g(t, \nu)| \leq |p(t, \nu)| \leq c_2|g(t, \nu)|$ при $t \in (0, t_0]$.*

Определение 3. *Пусть вектор-функции $\varphi^{(1)}(z) = \operatorname{col}(\varphi_1^{(1)}(z), \ldots, \varphi_m^{(1)}(z)), \varphi^{(1)} : E \to$ $\to C^m$, $\varphi^{(2q)}(z) = \operatorname{col}(\varphi_1^{(2q)}(z), \ldots, \varphi_{n-m}^{(2q)}(z)), \varphi^{(2q)} : E \to C^{n-m}, q = 0, 1$, аналитичны в $E \subset C, 0 \in \partial E$, и представимы в виде $\varphi_j^{(1)}(z(t, \nu)) = \psi_j^{(1)}(t, \nu)e^{i\eta_j^{(1)}(t,\nu)}$, $j = \overline{1, m}$, $\varphi_j^{(2q)}(z(t, \nu)) = \psi_j^{(2q)}(t, \nu)e^{i\eta_j^{(2q)}(t,\nu)}$, $j = \overline{1, n-m}$, где $z = te^{i\nu}, t \in (0, t_1]$, $\nu \in [\nu_1, \nu_2], t_1 >$ $> 0, \nu_1 < \nu_2$, причем $\psi_j^{(r)}(t, \nu) > 0$, $(\psi_j^{(r)}(t, \nu))_t' > 0, (\psi_j^{(r)}(t, \nu))_\nu' > 0, \psi_j^{(r)}(+0, \nu) = 0, r = 1$ или $r = 2q, q = 0, 1$.*

Будем говорить, что система (8) имеет свойство S_1 относительно функций $|\varphi_j^{(1)}(z(t, \nu))|^2$, $j = \overline{1, m}$, $|\varphi_j^{(2q)}(z(t, \nu))|^2$, $j = \overline{1, n-m}, q = 0, 1$, если выполнено:

1а) $(\psi_j^{(1)}(z(t, \nu)))_t' = o(t|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j^{(1)}(t, \nu))$, $j = \overline{1, m}$, при $t \to +0$ равномерно относительно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$;

1б) функции $(\psi_j^{(1)}(t, \nu))_\nu'$ имеют свойство Q относительно $t|p_{jj}(z(t, \nu))|^2\psi_j^{(1)}(t, \nu)$, $j = \overline{1, m}$;

2а) $|p_{jk}(z(t, \nu))|\psi_k^{(1)}(t, \nu) = o(|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j^{(1)}(t, \nu))$, $j, k = \overline{1, m}$, $j \neq k$, при $t \to +0$ равномерно относительно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$;

2б) функции $|p_{jk}(z(t, \nu))|\psi_k^{(1)}(t, \nu)$ имеют свойство Q относительно $|p_{jj}(z(t, \nu))| \times$ $\times\psi_j^{(1)}(t, \nu)$, $j, k = \overline{1, m}, j \neq k$;

3а) $t^{k(l-1)+1}|q_{jk}(z(t, \nu))|\psi_k^{(20)}(t, \nu) = o(t^{kl+1}|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j^{(1)}(t, \nu))$, $t^{k(l-1)+q}|r_{jk}(z(t, \nu))| \times$ $\times\psi_k^{(2q)}(t, \nu) = o(t^{kl+1}|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j^{(1)}(t, \nu))$, $k = \overline{1, n-m}$, $j = \overline{1, m}$, $q = 0, 1$, при $t \to +0$ равномерно относительно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$;

3б) функции $t^{k(l-1)}|q_{jk}(z(t, \nu)|\psi_k^{(20)}(t, \nu)$ и $t^{k(l-1)+q}|r_{jk}(z(t, \nu))|\psi_k^{(2q)}(t, \nu)$, $q = 0, 1$, имеют свойство Q относительно $t^{kl+1}|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j^{(1)}(t, \nu), k = \overline{1, n-m}$, $j = \overline{1, m}$.

Обозначим вектор-функцию $F(z, Y_1, \widetilde{Y}_2)$ так:

при фиксированном $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$

$$F(z(t,\nu), Y_1(z(t,\nu)), \widetilde{Y}_2(z(t,\nu))) = F_{1\nu}(t, Y_{11}(t), Y_{12}(t), \widetilde{Y}_{21}(t), \widetilde{Y}_{22}(t))+$$

$$+\, iF_{2\nu}(t, Y_{11}(t), Y_{12}(t), \widetilde{Y}_{21}(t)), \widetilde{Y}_{22}(t)),$$

$$Y_1(z(t,\nu)) = Y_{11}(t) + iY_{12}(t), \quad \widetilde{Y}_2(z(t,\nu)) = \widetilde{Y}_{21}(t) + i\widetilde{Y}_{22}(t),$$

при фиксированном $t \in (0, t_1]$

$$F(z(t,\nu), Y_1(z(t,\nu)), \widetilde{Y}_2(z(t,\nu))) = F_{1t}(\nu, Y_{11}(\nu), Y_{12}(\nu), \widetilde{Y}_{21}(\nu), \widetilde{Y}_{22}(\nu))+$$

$$+\, iF_{2\nu}(t, Y_{11}(\nu), Y_{12}(\nu), \widetilde{Y}_{21}(\nu), \widetilde{Y}_{22}(\nu)),$$

$$Y_1(z(t,\nu)) = Y_{11}(\nu) + iY_{12}(\nu), \quad \widetilde{Y}_2(z(t,\nu)) = \widetilde{Y}_{21}(\nu) + i\widetilde{Y}_{22}(\nu).$$

Обозначим через $\Omega(t, Y_1, \tau_j)$ множество

$$\Omega(t, Y_1, \tau_j) = \{(t, Y) : Y_{11j}^2(t) + Y_{12j}^2(t) < \tau_j^2 |\varphi_j^{(1)}(z(t,\nu))|^2, \ j = \overline{1,m}, \ t \in (0, t_1)\},$$

$\tau_j > 0$, $j = \overline{1,m}$, — постоянные, $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$; через $\widetilde{\Omega}(t, \widetilde{Y}_2)$ множество функций $(\widetilde{Y}_{2kj})^{(q)}$, которые являются функциями более высокого порядка малости, чем $|\varphi_j^{(2q)}(z(t,\nu))|^2$, $k = \overline{1, n-m}$, $k = 1, 2$, $q = 0, 1$, при $t \to +0$ равномерно относительно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$, а через $\widetilde{\Omega}(\nu, \widetilde{Y}_2)$ множество функций $(\widetilde{Y}_{2kj})^{(q)}$, которые имеют свойство $Q_1(t_0), t_0 \in (0, t_1]$, относительно $|\varphi_j^{(2q)}(z(t,\nu))|^2$, $k = \overline{1, n-m}$, $k = 1, 2$, $q = 0, 1$.

Определение 4. *Будем говорить, что система (8) имеет свойство M_1 относительно вектор-функции $F(z(t,\nu), Y_1, \widetilde{Y}_2)$, $F_j = F_{1j} + iF_{2j}$, $j = \overline{1,m}$, для каждого произвольного фиксированного $\widetilde{Y}_2$ из множества $\widetilde{\Omega}$, если выполнено:*

1) для каждого фиксированного $Y_1(z(t,\nu))$ из множества $\widetilde{\Omega}(t, Y_1, \tau_j)$

$$F_{rj\nu}(t, Y_{11}(t), Y_{12}(t), \widetilde{Y}_{21}(t), \widetilde{Y}_{22}(t)) = o(t^{kl+1}|p_{jj}(z(t,\nu))||\varphi_j^{(1)}(t,\nu))|, \quad j = \overline{1,m}, \ r = 1, 2,$$

при $t \to +0$ равномерно относительно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ для каждого произвольного фиксированного $\widetilde{Y}_2(z(t,\nu))$ из множества $\widetilde{\Omega}(t, \widetilde{Y}_2)$;

2) для каждого фиксированного $Y_1(z(t,\nu))$ из множества $\widetilde{\Omega}(\nu, Y_1, \tau_j)$ функция

$$tF_{rjt}(\nu, Y_{11}(\nu), Y_{12}(\nu), \widetilde{Y}_{21}(\nu), \widetilde{Y}_{22}(\nu)), \quad r = 1, 2,$$

имеет свойство Q относительно $t^{kl+1}|p_{jj}(z(t,\nu))||\varphi_j^{(1)}(z(t,\nu))|^2$, $j = \overline{1,m}$, для каждого произвольного фиксированного $\widetilde{Y}_2(z(t,\nu))$ из множества $\widetilde{\Omega}(\nu, \widetilde{Y}_2)$.

Определение 5. *Будем говорить, что система (8) принадлежит классу T_{1j}, если матрица $P(z)$ такова, что выполнено условие E_{1jl}, $j \in \{1, 2, 3\}$, $l \in \{+, -\}$:*

$$E_{11+} = \{(t,\nu) : \cos(\nu + \alpha_{jj\nu}(t)) > 0, \sin(\nu + \alpha_{jjt}(\nu)) < 0, \ j = \overline{1,m}, t \in (0, t_1], \nu \in [\nu_1, \nu_2]\},$$

$$E_{11-} = \{(t,\nu) : \cos(\nu + \alpha_{jj\nu}(t)) > 0, \sin(\nu + \alpha_{jjt}(\nu)) > 0,\ j = \overline{1,m}, t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2]\},$$

$$E_{12+} = \{(t,\nu) : \cos(\nu + \alpha_{jj\nu}(t)) < 0, \sin(\nu + \alpha_{jjt}(\nu)) < 0,\ j = \overline{1,m}, t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2]\},$$

$$E_{12-} = \{(t,\nu) : \cos(\nu + \alpha_{jj\nu}(t)) < 0, \sin(\nu + \alpha_{jjt}(\nu)) > 0,\ j = \overline{1,m}, t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2]\},$$

$$E_{13+} = \left\{ \begin{array}{l} (t,\nu) : \cos(\nu + \alpha_{jj\nu}(t)) < 0,\ j = \overline{1,l}, \cos(\nu + \alpha_{jj\nu}(t)) > 0, j = \overline{l+1,m}, \\ \sin(\nu + \alpha_{jjt}(\nu)) < 0, j = \overline{1,m}, 1 \le l < m, t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2] \end{array} \right\},$$

$$E_{13-} = \left\{ \begin{array}{l} (t,\nu) : \cos(\nu + \alpha_{jj\nu}(t)) < 0,\ j = \overline{1,l}, \cos(\nu + \alpha_{jj\nu}(t)) > 0, j = \overline{l+1,m}, \\ \sin(\nu + \alpha_{jjt}(\nu)) > 0, j = \overline{1,m}, 1 \le l < m, t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2] \end{array} \right\},$$

где $t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2]$ *и через* $\alpha_{jj\nu}(t)$ *и* $\alpha_{jjt}(\nu)$ *обозначены функции, косинусы и синусы которых соответственно равны*

$$\cos(\alpha_{jj\nu}(t)) = \frac{\operatorname{Re} p_{jk\nu}(t)}{\sqrt{(\operatorname{Re} p_{jk\nu}(t))^2 + (\operatorname{Im} p_{jk\nu}(t))^2}},$$

$$\sin(\alpha_{jj\nu}(t)) = \frac{\operatorname{Im} p_{jk\nu}(t)}{\sqrt{(\operatorname{Re} p_{jk\nu}(t))^2 + (\operatorname{Im} p_{jk\nu}(t))^2}},$$

$$j,k \in \{1,\ldots,n\},$$

где $p_{jk\nu}(t) = p_{jk}(z(t,\nu)) = \operatorname{Re} p_{jk}(t) + i\operatorname{Im} p_{jk}(t)$ *при фиксированном* $\nu \in [\nu_1,\nu_2]$, *и*

$$\cos(\alpha_{jjt}(\nu)) = \frac{\operatorname{Re} p_{jkt}(\nu)}{\sqrt{(\operatorname{Re} p_{jkt}(\nu))^2 + (\operatorname{Im} p_{jkt}(\nu))^2}},$$

$$\sin(\alpha_{jjt}(\nu)) = \frac{\operatorname{Im} p_{jkt}(\nu)}{\sqrt{(\operatorname{Re} p_{jkt}(\nu))^2 + (\operatorname{Im} p_{jkt}(\nu))^2}},$$

$$j,k \in \{1,\ldots,n\},$$

где $p_{jkt}(\nu) = p_{jk}(z(t,\nu)) = \operatorname{Re} p_{jk}(\nu) + i \operatorname{Im} p_{jk}(\nu)$ *при фиксированном* $t \in (0,t_1]$.

Обозначим через $\widetilde{G}_{1,jl}(\rho)$ множество $\widetilde{G}_{1,jl}(\rho) = \{z : 0 < |z| \le \rho, \operatorname{Arg} z \in E_{1,jl}(\rho)\}$, $j \in \{1,2,3\}, l \in \{+,-\}, \rho > 0$.

Теорема 2 $(j = 1,2,3)$. *Пусть для системы (1) выполнены следующие условия:*

1) однозначная матрица $A : D \to C^{m\times n}$, $m < n$, *аналитична в области* D*;*

2) существует область $D_1 \subset D, 0 \in D_1$*, такая, что в* D_1 $\operatorname{rang} A(z) = m$*, причем* $A(z)$ *представима в виде (4);*

3) матрицы $A(z), B(z)$ *и вектор-функция* $f(z,Y)$ *представимы в виде (4), причем матрица* $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ *аналитична в области* D_{10} *и в точке* $z = 0$ *имеет устранимую особую точку, а вектор-функция* $\widetilde{f}(z,Y_1,Y_2)$ *аналитична в* $D_{10} \times G_{210} \times G_{220}$*, в точке* $(0,0,0)$ *имеет изолированную точку и в разложении в окрестности точки* $(0,0,0)$ *имеет конечное число членов по степеням* Y_2*;*

4) функция Y_2 *принадлежит классу* $H_{1,k}^{n-m}$ *и представима в виде (6);*

5) система (8), соответствующая системе (5), такова, что для каждого произвольного фиксированного $\widetilde{Y}_2 = z^k Y_2(z)$, выполнено:

а) система (8) имеет свойство S_1 относительно функций $|\varphi_j^{(1)}(z(t,\nu))|^2$, $j = \overline{1,m}$, $|\varphi_j^{(2q)}(z(t,\nu))|^2, j = \overline{1,n-m}, q = 0,1,$ при $t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2]$;

б) система (8) принадлежит классу T_{1j};

в) система (8) имеет свойство M_1 относительно вектор-функции $F(z(t,\nu),Y_1,\widetilde{Y}_2)$, $F_j = F_{1j} + i\,F_{2j}, j = \overline{1,m}$, для каждого произвольного фиксированного $\widetilde{Y}_2$.

Тогда:

при $j = 1$ найдется такое $\rho \in (0,t_1]$, что при $z \in \widetilde{G}_{1,1l}(\rho)$, $l \in \{+,-\}$, задача Коши для системы (1) с начальными значениями $(z_0, Y_1^0, Y_2^0) : z_0 \in \widetilde{G}_{1,1l}(\rho)$, $l \in \{+,-\}$, $Y_1^0 \in \in \{Y_1 : |Y_{1kj}(z_0)| < \delta_j|\varphi_j^{(1)}(z_0)|, j = \overline{1,m}, k = 1,2\}$, $Y_{1j}(z) = Y_{11j}(z) + iY_{12j}(z), \widetilde{Y}_2^0(z) = = z_0^k Y_2^0$, $0 < \delta_i, i = \overline{1,m}$, — постоянные;

для каждого $\widetilde{Y}_2(z)$, удовлетворяющего соотношению

$$|(\widetilde{Y}_{2kj}(z))^{(q)}| = O(|\varphi_j^{(2q)}(z)|), \quad k = 1,2,$$
$$\widetilde{Y}_{2j}(z) = \widetilde{Y}_{21j}(z) + i\widetilde{Y}_{22j}(z), \quad j = \overline{1,n-m},\ q = 0,1, \tag{9}$$

имеет семейство аналитических решений $Y(z) = \operatorname{col}(Y_{11}(z),\ldots,Y_{1m}(z),\widetilde{Y}_{21}(z),\ldots \ldots,\widetilde{Y}_{2(n-m)}(z))$, для первых m компонент которых выполняется неравенство

$$|Y_{1j}(z)| < \delta_j|\varphi_j^{(1)}(z)|, \quad j = \overline{1,m}; \tag{10}$$

при $j = 2,3$ найдется такое $\rho \in (0,t_1]$, что при $z \in \widetilde{G}_{1,jl}(\rho), l \in \{+,-\}$, задача Коши для системы (1) с начальными значениями $(z_0, Y_1^0, Y_2^0) : z_0 \in \widetilde{G}_{1,jl}(\rho)$, $l \in \{+,-\}$, $Y_1^0 \in \{Y_1 : |Y_{1kj}(z_0)| < \delta_j|\varphi_j^{(1)}(z_0)|, j = \overline{1,m}, k = 1,2\}$, $Y_{1j}(z) = Y_{11j}(z) + iY_{12j}(z), \widetilde{Y}_2^0(z) = = z_0^k Y_2^0$, для каждого $\widetilde{Y}_2(z)$, удовлетворяющего соотношению (9), имеет хотя бы одно аналитическое решение $Y(z) = \operatorname{col}(Y_{11}(z),\ldots,Y_{1m},\widetilde{Y}_{21}(z),\ldots,\widetilde{Y}_{2(n-m)}(z))$, для первых m компонент которого выполняется неравенство (10).

Докажем теорему для случая $j = 1$.

Доказательство проведем в три этапа согласно методу аналитического продолжения решений.

Этап 1. Пусть z изменяется вдоль произвольного фиксированного отрезка луча из семейства $L_\nu : z = z(t,\nu) = te^{i\nu}, t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2]$ фиксировано. При $z \in L_\nu$ полагаем $Y_1(z(t,\nu)) = Y_{11}(t) + iY_{12}(t)$, $\widetilde{Y}_2(z(t,\nu)) = \widetilde{Y}_{21}(t) + i\widetilde{Y}_{22}(t)$, $P(z(t,\nu)) = P_1(t) + +iP_2(t)$, $Q(z(t,\nu)) = Q_1^1(t) + iQ_2^1(t)$, $R(z(t,\nu)) = R_1(t) + iR_2(t)$, $F(z(t,\nu),Y_1(z(t,\nu)), \widetilde{Y}_2(z(t,\nu))) = F_{1\nu}(t,Y_{11}(t),Y_{12}(t),\widetilde{Y}_{21}(t),\widetilde{Y}_{22}(t)) + iF_{2\nu}(t,Y_{11}(t),Y_{12}(t),\widetilde{Y}_{21}(t),\widetilde{Y}_{22}(t))$.

Относительно вещественной вектор-функции

$$Y(t) = \operatorname{col}(Y_{111}(t),\ldots,Y_{11m}(t),Y_{121}(t),\ldots$$
$$\ldots,Y_{12m}(t),\widetilde{Y}_{211}(t),\ldots,\widetilde{Y}_{21(n-m)}(t),\widetilde{Y}_{221}(t),\ldots,\widetilde{Y}_{22(n-m)}(t))$$

вдоль L_ν получаем систему

$$\begin{aligned}
t^{kl+1}((Y_{11})' + i(Y_{12})')e^{ikl\nu} &= t^{kl+1}e^{i(kl+1)\nu}(P_1 + iP_2)(Y_{11} + iY_{12}) + \\
&+ t^{k(l-1)+1}e^{i(k(l-1)+1)\nu}(Q_1^1 + iQ_2^1)(\widetilde{Y}_{21} + +i\widetilde{Y}_{22}) + \\
&+ kt^{k(l-1)}e^{ik(l-1)\nu}(R_1 + iR_2)(\widetilde{Y}_{21} + i\widetilde{Y}_{22}) - \\
&- t^{k(l-1)+1}e^{ik(l-1)\nu}(R_1 + iR_2)((\widetilde{Y}_{21})' + i(\widetilde{Y}_{22})') + +te^{i\nu}(F_{1\nu} + iF_{2\nu}). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Выделяя вещественную и мнимую части в системе (11), получаем вещественную систему вида

$$\begin{aligned}
t^{kl+1}Y_1' &= t^{kl+1}\widetilde{P}(t)Q_2(\nu)Y_1(t) + t^{k(l-1)+1}\widetilde{Q}(t)Q_1(\nu)\widetilde{Y}_2 + \\
&+ kt^{k(l-1)}\widetilde{R}(t)Q_3(\nu)\widetilde{Y}_2 - t^{k(l-1)+1}\widetilde{R}(t)Q_3(\nu)\widetilde{Y}_2'(t) + tQ_4(\nu)\widetilde{F}(t, Y_1, \widetilde{Y}_2), \qquad (12)
\end{aligned}$$

где

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} Y_{11}(t) \\ Y_{12}(t) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} Y_{21}(t) \\ Y_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) & -P_2(t) \\ P_2(t) & P_1(t) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{Q}(t) = \begin{pmatrix} Q_1^1(t) & -Q_2^1(t) \\ Q_2^1(t) & Q_1^1(t) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{R}(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & -R_2(t) \\ R_2(t) & R_1(t) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{Q}_1(\nu) = \begin{pmatrix} q_1(\nu) & q_2(\nu) \\ -q_2(\nu) & q_1(\nu) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}_2(\nu) = \begin{pmatrix} q_3(\nu) & -q_4(\nu) \\ q_4(\nu) & q_3(\nu) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{Q}_3(\nu) = \begin{pmatrix} q_5(\nu) & q_6(\nu) \\ -q_6(\nu) & q_5(\nu) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}_4(\nu) = \begin{pmatrix} q_7(\nu) & q_8(\nu) \\ -q_8(\theta) & q_7(\nu) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{F}(\theta, Y_1, \widetilde{Y}_2) = \begin{pmatrix} F_{1\nu}(\theta, Y_1, \widetilde{Y}_2) \\ F_{2\nu}(\theta, Y_1, \widetilde{Y}_2) \end{pmatrix},$$

$q_1(\nu) = \cos(k-1)\nu \cdot E$, $q_2(\nu) = \sin(k-1)\nu \cdot E$, $q_3(\nu) = \cos\nu \cdot E$, $q_4(\nu) = \sin\nu \cdot E$, $q_5(\nu) = \cos k\nu \cdot E$, $q_6(\nu) = \sin k\nu \cdot E$, $q_7(\nu) = \cos(kl-1)\nu \cdot E$, $q_8(\nu) = \sin(kl-1)\nu \cdot E$, E — единичная матрица соответствующей размерности.

Согласно преобразованиям $\widetilde{Y}_2(z(t,\nu))$ принадлежит множеству $\widetilde{\Omega}_6(t, \widetilde{Y}_2)$.

Построим область

$$\Omega_5(t, Y_1, \delta_j) = \{(t, Y_1) : Y_{11j}^2(t) + Y_{12j}^2(t) < \delta_j^2|\varphi_j^{(1)}(z(t,\nu))|^2, \ j = \overline{1,m}, t \in (0, t_1]\},$$

где $\delta_j > 0, j = \overline{1,m}$, — постоянные, $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ фиксировано.

Часть границы области $\Omega_5(t, Y_1, \delta_j)$ обозначим

$$\Omega_{50}(t, Y_1, \delta_j) = \{(t, Y_1) : Y_{11j}^2(t) + Y_{12j}^2(t) = \delta_j^2 |\varphi_j^{(1)}(z(t,\nu))|^2, \quad j = \overline{1,m}, t \in (0, t_1)\}.$$

Исследуем распределение знака функции

$$\begin{aligned}(t^{kl+1}\overline{T}, \overline{N}_j/2) = {} & t^{kl+1}(p_{jj}^1 \cos\nu - p_{jj}^2 \sin\nu)((Y_{11j})^2 + (Y_{12j})^2) + \\ & + t^{kl+1} \sum_{i=1, i\neq j}^{m} (p_{ji}^1 \cos\nu - p_{ji}^2 \sin\nu)(Y_{11i}Y_{11j} + Y_{12i}Y_{12j}) + \\ & + t^{kl+1} \sum_{i=1, i\neq j}^{m} (p_{ji}^1 \sin\nu + p_{ji}^2 \cos\nu)(Y_{11i}Y_{12j} - Y_{12i}Y_{11j}) + \\ & + t^{k(l-1)+1} \sum_{i=1}^{m} (q_{ji}^1 \cos(k-1)\nu + q_{ji}^2 \sin(k-1)\nu)(\widetilde{Y}_{21i}Y_{11j} + \widetilde{Y}_{22i}Y_{12j}) + \\ & + t^{k(l-1)+1} \sum_{i=1}^{m} (q_{ji}^1 \sin(k-1)\nu - q_{ji}^2 \cos(k-1)\nu)(\widetilde{Y}_{22i}Y_{11j} - \widetilde{Y}_{21i}Y_{12j}) + \\ & + kt^{k(l-1)} \sum_{i=1}^{m} (r_{ji}^1 \cos k\nu + r_{ji}^2 \sin k\nu)(\widetilde{Y}_{21i}Y_{11j} + \widetilde{Y}_{22j}Y_{12i}) + \\ & + kt^{k(l-1)} \sum_{i=1}^{n-m} (r_{ji}^1 \sin k\nu - r_{ji}^2 \cos k\nu)(\widetilde{Y}_{22i}Y_{11j} - \widetilde{Y}_{21i}Y_{12j}) - \\ & - t^{k(l-1)+1} \sum_{i=1}^{n-m} (r_{ji}^1 \cos k\nu + r_{ji}^2 \sin k\nu)((\widetilde{Y}_{22i})'Y_{11j} + (\widetilde{Y}_{21i})'Y_{12j}) - \\ & - t^{k(l-1)+1} \sum_{i=1}^{n-m} (r_{ji}^1 \sin k\nu - r_{ji}^2 \cos k\nu)(Y_{11j}(\widetilde{Y}_{22i})' - Y_{12j}(\widetilde{Y}_{21i})') + \\ & + t(F_{1j\nu}\cos(kl-1)\nu - F_{2j\nu}\sin(kl-1)\nu)Y_{11j} + t(F_{1j\nu}\sin(kl-1)\nu + \\ & + F_{2j\nu}\cos(kl-1)\nu)Y_{12j} - \delta_j^2 |\varphi_j^{(1)}(z(t,\nu))| (\psi_j^{(1)}(t,\nu))_t',\end{aligned}$$

где $\overline{T}$ — вектор поля направлений системы (12), определяемый в точке $(z, Y_1, \widetilde{Y}_2)$, где $(z, Y_1) \in \partial\Omega_5(t, Y_1, \delta_j), \widetilde{Y}_2 \in \Omega_6(t, \widetilde{Y}_2))$, а $\overline{N}$ — вектор внешней нормали к поверхности $\Omega_5(t, Y_1, \delta_j)$ в той же точке.

В силу того, что в области $\Omega_5(t, Y_1, \delta_j)$ система (8) имеет свойство S_1 для каждого $\widetilde{Y}_2$ из $\Omega_6(t, \widetilde{Y}_2)$ относительно функций $|\varphi_j^{(1)}(z(t,\nu))|^2, j = \overline{1,m}$, и $|\varphi_j^{(2q)}(z(t,\nu))|^2, j = \overline{1, n-m}$, $q = 0, 1$, при $t \in (0, t_1]$ равномерно относительно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$, и свойство M_1 относительно $F(z(t,\nu), Y_1, \widetilde{Y}_2)$ при $t \in (0, t_1]$, $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ для произвольного фиксированного $\widetilde{Y}_2$ из

$\Omega_6(t,\widetilde{Y}_2)$, знак скалярного произведения

$$\operatorname{sign}(t^{kl+1}\overline{T},\overline{N}_j/2) = \operatorname{sign}\cos(\nu+\alpha_{jj\nu}(t)),\ j=\overline{1,m}.$$

Поскольку система (8) определена в классе T_{11} для каждого данного $(\widetilde{Y}_{2kj})^{(q)}, q=0,1,$ из множества $\Omega_6(t,\widetilde{Y}_2),(t,\nu)\in E_{11k}(t_1)$, найдется такое достаточно малое число $t_0\in\in(0,t_1)$ для ν по всему промежутку $[\nu_1,\nu_2]$, что при $t\in(0,t_0]$ для каждого $\widetilde{Y}_2$ из класса $\Omega_6(t,\widetilde{Y}_2)$ $(\partial\Omega_5(t,Y_1,\delta_j))_{t\in(0,t_0]}$ является поверхностью без контакта для системы (12), причем точки $(\partial\Omega_5(t,Y_1,\delta_j))_{t\in(0,t_0]}$ являются точками строгого входа, так как $\operatorname{sign}(t^{kl+1}\overline{T},\overline{N}_j/2)>0, j=\overline{1,m}$, а точки сечения $\Omega_5(t,Y_1,\delta_j)\bigcap(t=t_0)$ являются точками строгого входа при убывании t из промежутка $(0,t_0]$.

Через каждую точку множества $\Omega_5(t,Y_1,\delta_j)\bigcap(t=t_0)$ вследствие справедливости для системы (8) теоремы существования и единственности Пикара для каждого данного $(\widetilde{Y}_2)^{(q)}, q=0,1$, из множества $\Omega_6(t,\widetilde{Y}_2)$ проходит одна и только одна непрерывно дифференцируемая интегральная кривая системы (12), и так как $\operatorname{sign}(t^{kl+1}\overline{T},\overline{N}_j/2)>0,\ j==\overline{1,m}$, в $E_{11k}(t_0)$ при $t\in(0,t_0]$, все интегральные кривые этой системы, проходящие через точки сечения $\overline{\Omega}_5(t,Y_1,\delta_j)\bigcap(t=t_0)$, остаются в области $\Omega_5(t,Y_1,\delta_j)\bigcap(t=t_0)$ для каждого $(\widetilde{Y}_2)^{(q)}, q=0,1$, из множества $\Omega_6(t,\widetilde{Y}_2)$ при убывании $t,(t,\nu)\in E_{11k}(t_0)$, ν фиксировано, причем

$$|Y_{1lj}(z(t,\nu))|<\delta_j|\varphi_j^{(1)}(z(t,\nu))|,\ j=\overline{1,m},\ l=1,2,(t,\nu)\in E_{1,1k}(t_0). \tag{13}$$

Этап 2. Пусть z изменяется вдоль произвольной фиксированной дуги окружности $O_r: z=z(r,\theta), r\in(0,t_0],(r,\theta)\in E_{11j}(t_0)$, r фиксировано.

При $z\in O_r$ полагаем $Y_1(z(r,\theta))=Y_{11}(\theta)+iY_{12}(\theta)$, $\widetilde{Y}_2(z(r,\theta))=\widetilde{Y}_{21}(\theta)+i\widetilde{Y}_{22}(\theta)$, $P(z(r,\theta))=P_1(\theta)+iP_2(\theta)$, $Q(z(r,\theta))=Q_1^1(\theta)+iQ_2^1(\theta)$, $R(z(r,\theta))=R_1(\theta)+iR_2(\theta)$, $F(z(r,\theta),Y_1(z(r,\theta)),\widetilde{Y}_2(z(r,\theta)))=F_{1r}(\theta,Y_{11}(\theta),Y_{12}(\theta),\widetilde{Y}_{21}(\theta),\widetilde{Y}_{22}(\theta))+iF_{2r}(\theta,Y_{11}(\theta),Y_{12}(\theta),\widetilde{Y}_{21}(\theta),\widetilde{Y}_{22}(\theta))$.

Относительно вещественной вектор-функции

$$Y(\theta)=\operatorname{col}(Y_{111}(\theta),\ldots,Y_{11m}(\theta),Y_{121}(\theta),\ldots$$
$$\ldots,Y_{12m}(\theta),\widetilde{Y}_{211}(\theta),\ldots,\widetilde{Y}_{21(n-m)}(\theta),\widetilde{Y}_{221}(\theta),\ldots,\widetilde{Y}_{22(n-m)}(\theta))$$

получаем вещественную систему вида

$$r^{kl+1}Y_1'(\theta)=r^{kl+1}\widetilde{P}(\theta)Q_1(\theta)Y_1(\theta)+r^{k(l-1)+1}\widetilde{Q}(\theta)Q_2(\theta)\widetilde{Y}_2(\theta)+$$
$$+kr^{k(l-1)}\widetilde{R}(\theta)Q_3(\theta)\widetilde{Y}_2(\theta)-r^{k(l-1)+1}\widetilde{R}(\theta)Q_2(\theta)\widetilde{Y}_2'(\theta)+rQ_4(\theta)\widetilde{F}(\theta,Y_1(\theta),\widetilde{Y}_2(\theta)), \tag{14}$$

где

$$Y_1(\theta)=\begin{pmatrix}Y_{11}\\Y_{12}\end{pmatrix},\qquad \widetilde{Y}_2(\theta)=\begin{pmatrix}Y_{21}\\Y_{22}\end{pmatrix},\qquad \widetilde{P}(\theta)=\begin{pmatrix}P_1(\theta)&-P_2(\theta)\\P_2(\theta)&P_1(\theta)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}(\theta)=\begin{pmatrix}Q_1^1(\theta)&-Q_2^1(\theta)\\Q_2^1(\theta)&Q_1^1(\theta)\end{pmatrix},\quad \widetilde{R}(\theta)=\begin{pmatrix}R_1(\theta)&-R_2(\theta)\\R_2(\theta)&R_1(\theta)\end{pmatrix},\quad \widetilde{Q}_1(\theta)=\begin{pmatrix}-q_7(\theta)&-q_8(\theta)\\q_8(\theta)&-q_7(\theta)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}_2(\theta)=\begin{pmatrix} q_9(\theta) & -q_{10}(\theta)\\ q_{10}(\theta) & q_9(\theta)\end{pmatrix},\qquad \widetilde{Q}_3(\theta)=\begin{pmatrix} q_{11}(\theta) & -q_{12}(\theta)\\ q_{12}(\theta) & q_{11}(\theta)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}_4(\theta)=\begin{pmatrix} q_{13}(\theta) & -q_{14}(\theta)\\ q_{14}(\theta) & q_{13}(\theta)\end{pmatrix},\qquad \widetilde{F}(\theta,Y_1,\widetilde{Y}_2)=\begin{pmatrix} F_{1r}(\theta,Y_1,\widetilde{Y}_2)\\ F_{2r}(\theta,Y_1,\widetilde{Y}_2)\end{pmatrix},$$

$q_7(\theta)=\sin\theta\cdot E$, $q_8(\theta)=\cos\theta\cdot E$, $q_9(\theta)=\sin(k-1)\theta\cdot E$, $q_{10}(\theta)=\cos(k-1)\theta\cdot E$, $q_{11}(\theta)=$ $=\sin k\theta\cdot E$, $q_{12}(\theta)=\cos k\theta\cdot E$, $q_{13}(\theta)=\cos(kl-1)\theta\cdot E, q_{14}(\theta)=\sin(kl-1)\theta\cdot E$, E — единичная матрица соответствующей размерности.

Согласно преобразованиям $\widetilde{Y}_2(\theta)$ принадлежит множеству $\widetilde{\Omega}_{61}(\theta,\widetilde{Y}_2)$, где $r\in(0,t_1]$ фиксировано.

Изучим поведение интегральных кривых системы (14) относительно области

$$\Omega_{51}(\theta,Y_1,\eta_j)=\{(\theta,Y_1): Y_{11j}^2(\theta)+Y_{12j}^2(\theta)<\eta_j^2|\varphi_j^{(1)}(z(r,\theta))|^2,\ j=\overline{1,m},\theta\in[\nu_1,\nu_2])\},$$

где $\eta_j>0$, $j=\overline{1,m}$, — постоянные, $r\in(0,t_1]$ фиксировано.

Исследуем распределение знака функции

$$\begin{aligned}(r^{kl}\overline{T},\overline{N}_j/2)=&-r^{kl+1}(p_{jj}^1\sin\theta+p_{jj}^2\cos\theta)((Y_{11j})^2+(Y_{12j})^2)-\\
&-r^{kl+1}\sum_{i=1,i\neq j}^{m}(p_{ji}^1\sin\theta+p_{ji}^2\cos\theta)(Y_{11i}Y_{11j}+Y_{12i}Y_{12j})+\\
&+r^{kl+1}\sum_{i=1,i\neq j}^{m}(p_{ji}^1\cos\theta-p_{ji}^2\sin\theta)(Y_{11i}Y_{12j}-Y_{12i}Y_{11j})+\\
&+r^{k(l-1)+1}\sum_{i=1}^{n-m}(q_{ji}^1\cos(k-1)\theta+q_{ji}^2\sin(k-1)\theta)(\widetilde{Y}_{21i}Y_{12j}-\widetilde{Y}_{22i}Y_{11j})+\\
&+r^{k(l-1)+1}\sum_{i=1}^{n-m}(q_{ji}^1\sin(k-1)\theta-q_{ji}^2\cos(k-1)\theta)(\widetilde{Y}_{21i}Y_{11j}+\widetilde{Y}_{22i}Y_{12j})+\\
&+kr^{k(l-1)}\sum_{i=1}^{n-m}(r_{ji}^1\sin k\theta-r_{ji}^2\cos k\theta)(\widetilde{Y}_{21i}Y_{11j}+\widetilde{Y}_{22i}Y_{12j})+\\
&+kr^{k(l-1)}\sum_{i=1}^{n-m}(r_{ji}^1\cos k\theta+r_{ji}^2\sin k\theta)(\widetilde{Y}_{21i}Y_{12j}-\widetilde{Y}_{22i}Y_{11j})+\\
&+r^{k(l-1)+1}\sum_{i=1}^{n-m}(r_{ji}^1\cos(k-1)\theta-r_{ji}^2\sin(k-1)\theta)((\widetilde{Y}_{21i})'Y_{12j}-(\widetilde{Y}_{22i})'Y_{11j})+\end{aligned}$$

$$+ r^{k(l-1)+1} \sum_{i=1}^{n-m} (r^1_{ji} \sin k\nu - r^2_{ji} \cos k\nu)(Y_{11j}(\widetilde{Y}_{22i})' - Y_{12j}(\widetilde{Y}_{21i})') + r(F_{1jr} \cos(kl-1)\theta -$$

$$+ F_{2jr} \sin(kl-1)\theta) Y_{11j} r(F_{1jr} \sin(kl-1)\theta + F_{2jr} \cos(kl-1)\theta) Y_{12j} - \eta_j^2 |\varphi_j^{(1)}| (\psi^{(1)}_{j\theta})'_\theta.$$

Поскольку система (8) имеет свойство S_1 для каждого $(\widetilde{Y}_2)^{(q)}$, $q = 0, 1$, из $\Omega_{61}(\theta, \widetilde{Y}_2)$ относительно функций $|\varphi_j^{(1)}(z(r,\theta))|^2$, $j = \overline{1,m}$, и $|\varphi_j^{(2q)}(z(r,\theta))|^2$, $j = \overline{1,n-m}$, $q = 0, 1$, из условий 1б), 2б) и 3б) следует, что существует $r_1 \in (0, t_0]$ такое, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при $r \in (0, r_1], \theta \in [\nu_1, \nu_2]$

$$(\psi_j^{(1)}(r,\theta))'_\theta < \varepsilon r |p_{jj}(z(r,\theta))|^2 \psi_j^{(1)}(r,\theta), \quad j = \overline{1,m},$$

$$|p_{jk}(z(r,\theta))| \psi_k^{(1)}(r,\theta) < \varepsilon |p_{jj}(z(r,\theta))| \psi_j^{(1)}(r,\theta), \quad j,k = \overline{1,m},\ j \neq k,$$

$$r^{k(l-1)} |q_{jk}(z(r,\theta))| \psi_k^{(20)}(r,\theta) < \varepsilon r^{kl+1} |p_{jj}(z(r,\theta))| \psi_j^{(1)}(r,\theta), \quad j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,n-m},$$

$$r^{k(l-1)+q} |r_{jk}(z(r,\theta))| \psi_k^{(2q)}(r,\theta) < \varepsilon r^{kl+1} |p_{jj}(z(r,\theta))| \psi_j^{(1)}(r,\theta),$$

$$k = \overline{1,n-m}, q = 0, 1, j = \overline{1,m}.$$

В силу того, что система (8) имеет свойство M_1 относительно функции $F(z(r,\theta), Y_1, \widetilde{Y}_2)$ для некоторого r_2, $0 < r_2 \leq t_0$, $\theta \in [\nu_1, \nu_2]$ для каждого произвольного $\widetilde{Y}_2$ из $\Omega_{61}(\theta, \widetilde{Y}_2)$, существует такое достаточно малое число $r_0 \in (0, \min(r_1, r_2))$, что для каждого фиксированного $r \in (0, r_0)$ для каждого $\widetilde{Y}_2(\theta)$ из множества $\Omega_{61}(\theta, \widetilde{Y}_2)$ $\partial\Omega_{51}(\theta, Y_1, \eta_j))_{(r,\theta) \in E_{11j}(r)}$ является поверхностью без контакта для системы (14) и

$$\operatorname{sign}(r^{kl}\overline{T}, \overline{N}_j/2) = -\operatorname{sign} \sin(\theta + \alpha_{jjr}(\theta)), j = \overline{1,m}.$$

В силу того, что система (8) принадлежит классу T_{11} для каждого $\widetilde{Y}_2$ из множества $\Omega_{61}(\theta, \widetilde{Y}_2), (r,\theta) \in E_{11j}(r_0)$, любая интегральная кривая системы (14), проходящая через точку множества $\overline{\Omega}_{51}(\theta, Y_1, \eta_j) \cap (\theta = \theta_0), \theta_0 \in E_{11+}(r_0)(\theta_0 \in E_{11-}(r_0))$, остается в области $\Omega_{51}(\theta, Y_1, \eta_j)$ для всех $\widetilde{Y}_2$ из множества $\Omega_{61}(\theta, \widetilde{Y}_2)$ при убывании (возрастании) θ и удовлетворяет оценке

$$|Y_{1kj}(z(r,\theta))| < \eta_j |\varphi_j^{(1)}(z(r,\theta))|,\ j = \overline{1,m},\ k = 1, 2. \tag{15}$$

Этап 3. Полагаем, что выполняется соотношение

$$\delta_j^2 < \eta_j^2. \tag{16}$$

Обозначим $\rho = r_0$. По аналогии с доказательством этапа 3 теоремы 2.1 [8]:

а) осуществляется аналитическое продолжение решения с $L_\nu(0, |\widetilde{z}|]$, где $(t,\nu) \in E_{11l}(\rho)$, ν фиксировано для каждого $\widetilde{Y}_2(\theta) \in \Omega_{61}(\theta, \widetilde{Y}_2)$, на содержащую ее область с сохранением оценки (13), $(t,\nu) \in E_{11l}(\rho)$;

б) в силу неравенства (16) для каждого фиксированного $r \in (0, r_0]$ для каждого $\widetilde{Y}_2 \in \Omega_6(t, \widetilde{Y}_2)$ любое решение из множества (13) продолжается с кривой $L_\nu(0, |\widetilde{z}|]$ вдоль кривых $O_t(E_{11l}(\rho))$, когда $t \in (0, |z_0|]$;

с) решение $Y_{\theta_0^0(z)}$ для каждого $\widetilde{Y}_2$ из множества (9) аналитично продолжимо в области $\widetilde{G}_{1,1l}(\rho) \times \{|Y_{1kj}| < \delta_j |\varphi_j^{(1)}(z_0)|, j = \overline{1,m}, k = 1,2\}$, причем в ней оно удовлетворяет оценке (10).

Теорема доказана.

5. Выводы. Данная работа является продолжением исследований, проведенных в [8]. Ранее система (1) была изучена в предположении, что $m > n$, $\operatorname{rang} A(0) = n$ и остается постоянным всюду в некоторой области $D_1 = \{z : |z| < R_1\} \subset D$, когда матрица $B(z)$ аналитична в D_{10} и в точке $z = 0$ имеет либо устранимую особенность, либо полюс q-го порядка, $q \in N, q \geq 2$.

В настоящей работе система (1) изучена в предположении, что $m < n$, $\operatorname{rang} A(z) = m$, $z \in D_1$, когда часть компонент искомой вектор-функции принадлежат либо классу H_0^{n-m}, либо классу $H_{1,k}^{n-m}$. В каждом из этих случаев получены достаточные условия существования решений системы (1), причем если последние $n-m$ компонент являются произвольными функциями из класса $H_{1,k}^{n-m}$ и удовлетворяют (9), то первые m компонент решения имеют асимптотику (10) при $z \in G_{1,jl}$, $j \in \{1,2,3\}$, $l \in \{+,-\}$. Изучен вопрос о числе таких решений.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. *Самойленко А. М., Шкиль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
3. *Чистяков В. Ф.* О свойствах квазилинейных вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Динамика нелинейных систем. — 1993. — С. 164–173.
4. *Campbell St.* Uniqueness of completions for linear time varing differention algebraic equations // Linear Algebra and Appl. — 1992. — **161**. — P. 55–67.
5. *Marz R.* Criteria for the trivial solution of differential algebraic equations with small nonlinearities to be asymptotically stable // J. Math. Anal. and Appl. — 1998. — **225**. — P. 587–607.
6. *Руткас А. Г.* О классификации и свойствах решений уравнения $Ax' + Bx = f(t)$ // Дифференц. уравнения. — 1989. — **25**, № 7. — С. 1150–1151.
7. *Jwano M.* A method to construct stable domain of a sectorial type // Funkc. ekvacioj. — 1999. — **42**, № 1. — P .71–103.
8. *Самкова Г. Е., Шарай Н. В.* Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 2. — С. 224–236.

Получено 20.12.2004